



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DO TOCANTINS
CAMPUS PALMAS
CURSO SUPERIOR LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

RAQUEL NOBRE MORAES

MATEMÁTICA APLICADA NA AGRIMENSURA

**Palmas
2022**

RAQUEL NOBRE MORAES

MATEMÁTICA APLICADA NA AGRIMENSURA

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia do Tocantins, *Campus*
Palmas, como parte das exigências para a
conclusão do Curso de Licenciatura em
Matemática, sob a orientação do Professor
Mestre Magno Márcio de Azevedo.

**Palmas
Agosto/2022**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Bibliotecas do Instituto Federal do Tocantins

N754m Nobre Moraes, Raquel
Matemática aplicada na agrimensura / Raquel Nobre Moraes. –
Palmas, TO, 2022.
52 p. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) –
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins,
Campus Palmas, Palmas, TO, 2022.

Orientador: Me. Magno Marcio de Azevedo

1. topografia. 2. matemática. 3. geometria. I. Azevedo, Magno
Marcio de. II. Título.

CDD 510

A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio, deste documento é autorizada para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica do IFTO com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).



Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins
CAMPUS PALMAS
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

**FOLHA DE APROVAÇÃO DE TRABALHO DE CONCLUSÃO
DE CURSO DE GRADUAÇÃO**

1. **TÍTULO: MATEMÁTICA APLICADA A AGRIMENSURA**
2. **AUTORA: RAQUEL NOBRE MORAES**
3. **ORIENTADOR: Prof. Mestre Magno Márcio de Azevedo**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Instituto Federal de Educação, Ciência e
Tecnologia do Tocantins, *campus* Palmas,
como parte das exigências para a conclusão
do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovado em 02/08/2022.

Prof. Me. Magno Márcio de Azevedo
IFTO – Campus Palmas
Presidente/Orientador

Prof. Me. Jamerson Montenegro Lima
IFTO – Campus Palmas
Avaliador Interno

Prof. Esp. Luiz Antônio da Silva
IFTO – Campus Palmas
Avaliador Externo

Documento assinado eletronicamente por **Magno Marcio de Azevedo, Servidor**,
em 03/08/2022, às 15:31, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no
art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Jamerson Montenegro Lima, Servidor**, em 04/08/2022, às 17:30, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Luiz Antonio da Silva, Servidor**, em 05/08/2022, às 21:40, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.iftto.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1706307** e o código CRC **DB22A217**.

Quadra 310 Sul, Lo 5, s/n, esquina com a Avenida NS 10 - Plano Diretor Sul — CEP 77.021-090
Palmas/TO — (63) 3236-4000
portal.iftto.edu.br — reitoria@iftto.edu.br

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus pela oportunidade de superar todos os desafios no curso de licenciatura em matemática, foi um grande desafio. Agradeço a minha família e principalmente minha mãe e meu pai que estiveram presentes durante todo o meu percurso enquanto acadêmica dando suporte para que eu estivesse presente nas aulas. Aos meus irmãos que torceram para que eu alcançasse meus objetivos, e ao meu filho Davi que foi meu maior motivo para concluir este curso, Aos amigos do curso, especialmente Janaina e Mirene, que me incentivaram a não desistir, sempre dando apoio para que eu pudesse terminar.

E por fim ao meu professor orientador Mestre Magno Márcio de Azevedo que durante meses acompanhou na elaboração do trabalho.

RESUMO

MORAES, Raquel Nobre. Matemática Aplicada na Agrimensura. 2022. 49f. Trabalho de Conclusão de Curso. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, *Campus Palmas*, Palmas-TO, 2022.

O trabalho busca utilizar conhecimentos da agrimensura para ensinar conceitos de geometria e trigonometria facilitando o aprendizado de matemática entre alunos do ensino médio, uma vez que a aplicação de conceitos abstratos em casos concretos é de mais interesse para os alunos aumenta sua motivação e otimiza o aprendizado. Para atingir o objetivo proposto a pesquisa se inicia com uma contextualização histórica da origem e evolução da agrimensura em paralelo com uma descrição dos conceitos de trigonometria e geometria por ela utilizados. No referencial teórico foram utilizados conceitos básicos da trigonometria e exemplo de aplicação desses conceitos em diversas áreas de trabalho, sobretudo aplicações relacionadas à topografia. Ocorre também a apresentação e conceituação de aparelhagem moderna em contraponto com o equipamento rudimentares utilizados no dia a dia do profissional agrimensor. Pode se perceber através da análise de dados que o experimento aplicado a 41 alunos de uma turma do curso técnico da 1ª Série do Ensino Médio realizada no Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Tocantins Campus Palmas no ano de 2019 demonstra que a aplicação de aparelhos utilizados na agrimensura para ensino da matemática foi de crucial importância para assimilação dos conceitos abordados em aula.

Palavras-chave: Topografia; matemática; geometria; trigonometria.

ABSTRACT

MORAES, Raquel Nobre. Applied Mathematics in Land Surveying. 2022. 49f. Completion of course work. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, *Campus Palmas*, Palmas - TO, 2022,

This work seeks to use land surveying knowledge to teach concepts of geometry and trigonometry, facilitating the learning of mathematics among high school students, since the application of abstract concepts in concrete cases is of more interest to students, increases their motivation and optimizes learning. To achieve the proposed objective, the research begins with a historical contextualization of the origin and evolution of land surveying in parallel with a description of the concepts of trigonometry and geometry used by it. In the theoretical framework, basic concepts of trigonometry were used and an example of application of these concepts in several areas of work, especially applications related to topography. There is also the presentation and conceptualization of modern equipment in contrast with the rudimentary equipment used in the day to day of the professional surveyor. It can be seen through the data analysis that the experiment applied to 41 students from a technical course class of the 1st Grade of High School held at the Federal Institute of Science and Technology of Tocantins Campus Palmas in 2019 demonstrates that the application of devices used in surveying for teaching mathematics was of crucial importance for the assimilation of the concepts covered in class.

Keywords: Topography; math; geometry, trigonometry.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

<i>Figura 1- Estiradores de corda</i>	<i>12</i>
<i>Figura 2 – Groma Egípcia.....</i>	<i>16</i>
<i>Figura 3 - Dioptra.....</i>	<i>16</i>
<i>Figura 4 - Chorobate.....</i>	<i>17</i>
<i>Figura 5- Primeiro teodolito primitivo</i>	<i>17</i>
<i>Figura 6 Modelos de primeiras estações totais.....</i>	<i>18</i>
<i>Figura 7 - Implantação de um piquete e estaca testemunha</i>	<i>19</i>
<i>Figura 8 - Níveis de cantoneira</i>	<i>20</i>
<i>Figura 9 - Modelos terrestres</i>	<i>21</i>
<i>Figura 10 - Geóide</i>	<i>22</i>
<i>Figura 11 - Estiradores de corda</i>	<i>23</i>
<i>Figura 12 - Método Eratóstenes para medida da circunferência da Terra</i>	<i>27</i>
<i>Figura 13 - Triângulo retângulo.....</i>	<i>28</i>
<i>Figura 14 - Ângulo.</i>	<i>30</i>
<i>Figura 15 - Circunferência</i>	<i>30</i>
<i>Figura 16 - Medidas dos ângulos de giro.....</i>	<i>31</i>
<i>Figura 17 - Lei dos senos para triângulos obtusângulos.....</i>	<i>32</i>
<i>Figura 18 - Lei dos senos para triângulos acutângulos.....</i>	<i>33</i>
<i>Figura 19- Medidas dos ângulos de giro.....</i>	<i>33</i>
<i>Figura 20- Lei dos cossenos para triângulos acutângulos</i>	<i>34</i>
<i>Figura 21- Cálculo de área de triângulos acutângulos.....</i>	<i>35</i>
<i>Figura 22- Cálculo de área de triângulos acutângulos.....</i>	<i>35</i>
<i>Figura 23- Aula prática de medidas</i>	<i>39</i>
<i>Figura 24- Exemplo prático.....</i>	<i>43</i>

LISTA DE QUADROS

<i>Quadro 1 - Ângulos Notáveis</i>	31
<i>Quadro 2 - Funções trigonométricas</i>	36

SUMÁRIO

Sumário

1. INTRODUÇÃO	10
2. REVISÃO DE LITERATURA	12
2.1- Histórias da Agrimensura	12
2.2 - Evolução dos Equipamentos Topográficos	15
2.3 - Acessórios Usados Para a Medição	18
2.4 - Piquetes	18
2.5 - Estacas testemunhas	19
2.6 - Baliza	19
2.7 - Níveis de Cantoneira	19
2.8 - Geodésia	20
2.9 - Elipsóide	22
2.10 - Geóide	22
2.11 - O uso da matemática na agrimensura	23
2.12 - As origens da Trigonometria	24
2.13 - Relações Métricas e trigonométricas	27
2.14 - Ângulos Notáveis e Arcos	29
2.15 - Lei dos senos	32
2.16 - Lei dos Cossenos	33
2.17 - ÁREA de um triângulo Retângulo	34
3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS E ANÁLISE DOS DADOS	37
4. CONSIDERAÇÕES FINAIS	46
REFERÊNCIAS	48

1. INTRODUÇÃO

A matemática tem uma vasta área de aplicação e tem sido considerada uma verdadeira incógnita, o pensamento crítico desempenha um papel significativo para essa área de conhecimento. Sua utilização em determinadas áreas como: fazer compras, aplicativos de celular, na cozinha, no transporte, nas transações bancárias entre outras é uma forma de mostrar como esses conhecimentos são aplicados no cotidiano, quando pensamos em conhecimentos matemáticos, procedimentos, experiências, decisões, ferramentas, representações e modelos matemáticos e os confrontamos através de problemas para resolver, as decisões e os critérios de resolução são lógicos e através de processos metodológicos.

No cotidiano os conceitos ligados à trigonometria são significativos para a sociedade. A trigonometria estuda as relações matemáticas envolvendo ângulos comprimentos e altura de diferentes triângulos. Sua criação é atribuída ao astrônomo e geógrafo grego Hiparco de Nicéia, no século III a.C. Conectada inicialmente à astronomia e aos estudos geométricos, com aplicação na navegação e construção de calendários.

Encontrar a altura e a distância entre dois objetos é uma das aplicações mais importantes da trigonometria que permite cálculos básicos como a altura de um edifício, torres ou montanha, no entanto, sua aplicação é bem mais abrangente em diversas áreas de conhecimento.

Este trabalho foi desenvolvido em uma turma do curso técnico de informática da 1ª Série do Ensino Médio com 41 alunos, no ano de 2019 no Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Tocantins Campus - Palmas, a escolha dessa turma se deu pela dificuldade que a mesma tinha em relação ao conteúdo. Tem como objetivo usar a Agrimensura para ensinar matemática especificamente os conteúdos de Geometria e Trigonometria relacionados a ângulos.

Baseando-se nessa problemática, surgem as seguintes questões: Que materiais poderemos utilizar para medir distâncias inacessíveis? Como esses materiais serão usados para favorecer o ensino-aprendizagem de Trigonometria aliada à Agrimensura? E que conteúdos poderemos trabalhar com a utilização desses materiais nas turmas da 1ª série do ensino médio?

Sendo assim, faremos uso da Agrimensura, para auxiliar no processo de ensino-aprendizagem em matemática, pois é uma prática que permite resolver problemas ou realizar atividades por meio da manipulação, o que poderá estimular o aprendizado, comunicação, motivação e compreensão de conteúdos matemáticos relacionados à geometria e trigonometria, visto que a interdisciplinaridade faz parte do processo educacional. Acreditamos que dessa forma o ensino aprendizagem possa fazer sentido, desperte interesse e que a construção do conceito matemático seja prazerosa para o aluno. Este trabalho está organizado em dois capítulos, a saber:

No capítulo 1 apresentamos a revisão de literatura em que a história da Agrimensura, a evolução dos equipamentos topográficos, os acessórios usados para a medição, Geodésia, elipsoide, geoide, o uso da matemática na agrimensura, as origens da trigonometria, relações métricas e trigonométricas, ângulos notáveis e arcos, lei dos senos, lei dos cossenos e área de um triângulo retângulo.

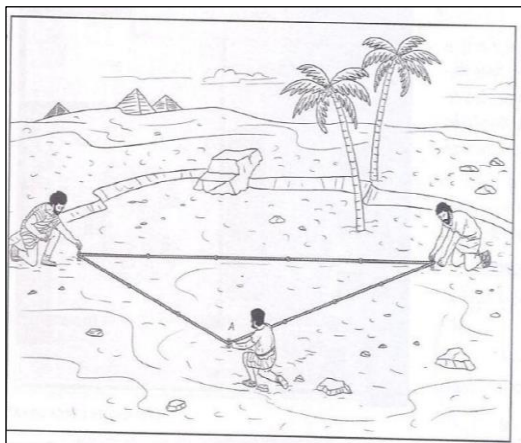
No capítulo 2 apresentamos os procedimentos metodológicos da proposta em trabalhamos o uso de material concreto como o teodolito caseiro e profissional, para viabilizar os cálculos de alturas inacessíveis e distâncias. E análise dos dados utilizados em nossa pesquisa.

2. REVISÃO DE LITERATURA

2.1- HISTÓRIAS DA AGRIMENSURA

Segundo Boyer (1906) registros históricos mostram que a agrimensura é uma das práticas mais antigas do homem, os agrimensores inicialmente eram chamados de geômetras e empregados dos faraós, suas funções eram fazer o controle das cheias do rio Nilo, com dever de analisar o controle de enchentes, eram chamados de estiradores de corda, pois as cordas eram usadas para traçar as bases de templos, bem como para determinar os limites das propriedades. Conforme apresentamos na figura 1

Figura 1- Estiradores de corda



Fonte: (FREITAS et al., 2020, p.20).

Conforme Espartel (1987) esses povos nos legaram fontes históricas de seus feitos.

Os egípcios, os gregos, os árabes e os romanos nos legaram instrumento e processos que, embora primitivos, serviram para descrever, delimitar e avaliar propriedades rurais, com finalidades cadastrais; na História da Topografia, de Laussedat, são mencionados plantas e cartas militares e geográficas bem interessantes, organizadas nos primórdios da Topografia, ou melhor, da chamada Geometria aplicada. (ESPARTEL, 1987, p. 04).

Quando os nômades começaram a aprender a plantar e domesticar animais se iniciou o processo de revolução agrícola e assim foram surgindo às primeiras

organizações sociais, políticas e vilas da história, já que agora eles não precisavam sair de uma localidade quando acabavam os recursos, pois podiam plantar e criar animais para sua subsistência, as civilizações antigas, por necessidades específicas e surgimento de problemas locais foi se aprimorando em determinadas áreas da ciência.

No Egito os primeiros indícios da geometria surgiram da necessidade de medição de terras agrícolas, próximo ao rio Nilo, nos períodos de cheia, parte das terras eram cobertas pelas enchentes anuais que derrubavam as demarcações de terra, como havia uma disputa pelas terras mais férteis, os agricultores tinham que refazer os limites de suas áreas de cultivo para não terem prejuízo, possivelmente por fazer essas demarcações ano após ano, foram se tornando hábeis demarcadores de terras com conhecimentos geométricos limitados a resolver problemas concretos. Como afirma o historiador grego Heródoto que.

[...] nos diz que o apagamento das demarcações pelas inundações do Nilo tornou necessários os mensurados. Os conhecimentos dos “estiradores de corda” egípcios eram evidentemente admirados por Demócrito, um matemático de competência [...] em parte em consequências da precisão admirável da construção das pirâmides. (BOYER, 1906, p.13).

Agrimensura é a ciência que usa conhecimento da geomática, como ferramenta para aquisição e gerenciamento de dados espaciais necessários como parte de operações científicas, ela tem uma função essencial na evolução de cidades e áreas urbanas. A Topografia vem da palavra Grega “topos” no qual significa “lugar” e “graphein” significa “descrever” assim a topografia é uma ciência essencial para fazer medições. Usamos todos os tipos de instrumentos de medição em nosso dia a dia como: réguas, esquadros, fitas métricas transferidores, entre outros. Espartel (1987) afirma que a topografia tem por finalidade.

[...] determinar o contorno, dimensão e posição relativa de uma porção limitada da superfície terrestre, sem levar em conta a curvatura resultante da esfericidade terrestre. [...] é uma ciência aplicada, baseada na Geometria e na Trigonometria [...] que têm por objetivo o estudo da forma e dimensões da Terra. (ESPARTEL, 1987,p.03).

Segundo este autor a medição de superfícies agrárias é uma das carreiras mais antigas do mundo, e também uma das mais importantes, por essa razão a mesa era chamada Agrimensura.

A terra é importante na vida das pessoas, um bem muito valioso e alvo de disputas e conflitos entre os povos ao longo da história da humanidade o levantamento topográfico é normalmente usado para encontrar as condições existentes de um pedaço de terra. Isso inclui as elevações do solo, os recursos existentes ou qualquer outra utilidade presente na superfície, esses levantamentos dependem muito das elevações e da capacidade de descobrir quão altos ou baixos são os seus pontos no local escolhido. Segundo Garbi (2009) os egípcios desenvolveram matemática de forma indutiva, basicamente para finalidades práticas como:

A Agrimensura, a Arquitetura e as obras de irrigação. [...] sobre a história do Egito, o grego Heródoto (o Pai da História) disse o seguinte: “Esse faraó (Sesóstris) realizou a partilha da terras, concedendo a cada egípcio um porção igual, com a condição de ser-lhe pago todos os anos certo tributo; se o rio carregava alguma parte do lote de alguém, o prejudicado ia procurar o rei e expor-lhe o ocorrido. O soberano enviava agrimensores para o local, para determinar a redução sofrida pelo terreno, passando o proprietário a pagar um tributo proporcional ao que restara. Eis, ao que me parece, a origem da Geometria, que teria passado do Egito para a Grécia.” (GARBI, 2009, p. 12).

É preciso certificar-se de que conhecemos nossas distâncias e onde estamos em termos de espaço, para isso, a precisão horizontal é muito importante, quando se trata do topo, iremos encontrar as diferenças de altura entre os pontos usando medições horizontais e verticais, podemos combinar essas duas medidas e criar um mapa completo que mostra as condições exatas do terreno pesquisado, como sua localização, estabelecimento de escalas e área.

A ferramenta principal para uma pesquisa topográfica que trata da medida da execução de superfície no plano, sua divisão em parcelas, condições preestabelecidas como: direção, medir as distâncias, estimar as alturas e parcelas dos terrenos é chamada de teodolito, e seu trabalho é medir os ângulos entre dois pontos, combinando esses ângulos com distâncias de uma corrente ou fita métrica podemos triangular a localização de qualquer um desses pontos usando trigonometria. Como afirma Mol (2013) os egípcios faziam isso intuitivamente, pois sua geometria era pratica e as demonstrações eram essenciais com o objetivo de.

[...] por meio de tentativas e aproximações, obter métodos e regras eficazes do ponto de vista da aplicação. Assim, os egípcios eram capazes de calcular áreas de figuras retilíneas, como o quadrado, o triângulo e o trapézio. Por exemplo, no problema 51 do Papiro de Rhind, a área de um triângulo isósceles é calculada tomando metade da base e multiplicando pela altura. A justificativa apresentada é a de que o triângulo isósceles pode ser pensado como dois triângulos retos que, ao serem justapostos, formam um retângulo. [...] Todas essas fórmulas envolvendo áreas e volumes eram empregadas no cálculo da

quantidade de material necessário na construção de monumentos.(MOL, 2013, p. 23).

Os topógrafos são especialistas em medição, estabelecem limites terrestres oficiais, escrevem descrições de terras para escrituras. Definem os limites de propriedades como escolas, estruturas comerciais, construção de estradas, habitação, torres telefônicas, linha de fibra óptica, fazendas, gasodutos, barragens, pontes, mineração, trilhos, exploração de petróleo entre outras demarcações exigem a assistência de um agrimensor.

Os teodolitos modernos chamados de estações totais podem não apenas medir ângulos, mas também distâncias e possuem computadores de bordo para fazer cálculos e registros de dados para uso posterior, mas temos maneiras de fazer nosso próprio levantamento topográfico com ferramentas básicas e baratas como é o caso do teodolito caseiro usado em nossa proposta de trabalho apresentada no capítulo II.

2.2 - EVOLUÇÃO DOS EQUIPAMENTOS TOPOGRÁFICOS

A humanidade demorou muito tempo para evolução dos equipamentos topográficos, no decorrer dos anos, os aparelhos de medição e de uso do agrimensor foram sendo desenvolvidos, Assim apresentamos abaixo alguns aparelhos que foram desenvolvidos ao longo do tempo.

Por volta de 3.000 a.C. os babilônios e egípcios utilizavam cordas para medir as distâncias e um cordão de prumo, para atingir alinhamento vertical, oferecendo a possibilidade de levantar uma estrutura mais alta e com um equilíbrio maior.

A habilidade que levou os seres humanos a construir grandes coisas como as maravilhas do mundo antigo, dentre elas a Grande Pirâmide de Gizé construída no norte do Egito por volta de 2500 a.C. levou a geometria antiga ao estabelecimento de conhecimentos matemáticos e criação de instrumentos durante sua construção que são admirados e pesquisados até hoje pela sociedade com é o caso da Groma que é um instrumento ícone do agrimensor chamado de “Gromaticus”.

Segundo Wallis (2005) o primeiro instrumento para medir ângulos foi possivelmente o Groma os egípcios usaram na construção das pirâmides. Um instrumento esquadro óptico pendurado por um prumo com quatro quadrantes, usado com a finalidade de manter alinhamento e indicar ângulos retos, usado também pelos romanos nas medições topográficas, conforme apresentado na figura 2.

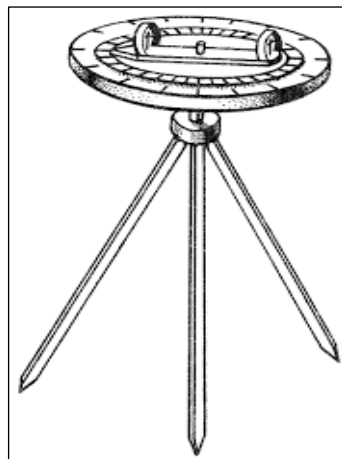
Figura 2 – Groma Egípcia



Fonte: Museu de Topografia. 2021

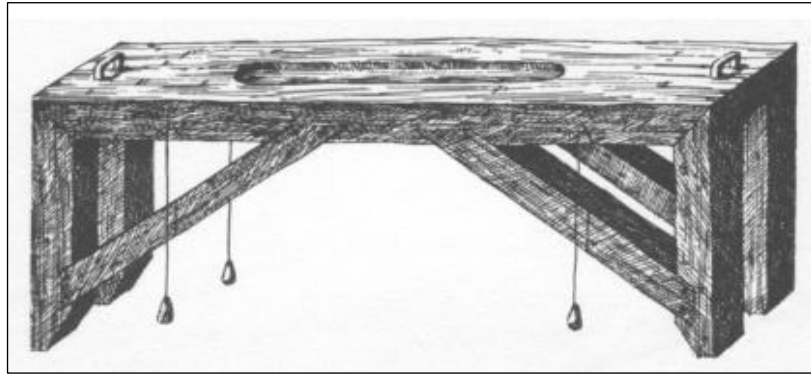
Dioptra apresentada na figura 3, uma versão mais precisa da groma, instrumento semelhante ao teodolito, projetado para medição de ângulos, a dioptra poderia ser utilizada para nivelamento, agrimensura, implantação de aquedutos, túneis e astronomia.

Figura 3 - Dioptra



Fonte: M3 MEDINA ENGENHARIA

Existem poucos relatos sobre o Chorobate, instrumento apresentado na figura 4, este instrumento é constituído por uma régua horizontal com sapatas nas pontas, na parte superior a régua era utilizada para manter o nivelamento da água, aproveitado pelos romanos na construção de seus aquedutos.

Figura 4 - Chorobate

Fonte: Macaulay 1973 p. 34

Segundo Wallis (2005) o primeiro teodolito primitivo desenvolvido pelo inglês Leonard Digges em 1571, chamado de “theodolitus”. Instrumento com círculo dividido com quadrado e bússola no centro e sem telescópio, movimentos graduados na vertical e horizontal em um tripé. A inversão do primeiro teodolito moderno é compartilhada entre o inglês Jonathan Sisson e o italiano Ignácio Porro. O equipamento era composto por quatro parafusos niveladores. Ignácio Porro em 1835 incluiu um dispositivo óptico que permite calcular distâncias, elevação e direção e diminuiu consideravelmente o tempo usado na topografia, conforme apresentado na figura 5.

Figura 5- Primeiro teodolito primitivo

Fonte: FRAGA, 2016 p. 45.

No final dos anos 70 e início dos anos 80 surgem às primeiras estações totais na Alemanha, é um instrumento eletrônico usado para medida de ângulos e distância, também é necessário de um prisma livre de barreira para mirar no ponto a ser medido, ela emite um laser que reflete no prisma e volta ao equipamento. As estações totais apresentadas na figura 6 é uma evolução do teodolito, a estação total diferente do teodolito não precisa de coleta de dados, permite que os dados coletados em campo

sejam gravados e descarregados e passado para um software que produz um mapa topográfico.

Figura 6 Modelos de primeiras estações totais



Fonte : VEIGA, 2012, p. 82.

2.3 - ACESSÓRIOS USADOS PARA A MEDIÇÃO

Para que o técnico em agrimensura faça o levantamento topográfico durante a medição do seu trabalho é comum o uso de alguns acessórios como: piquetes, estacas testemunhas, balizas e níveis de cantoneira.

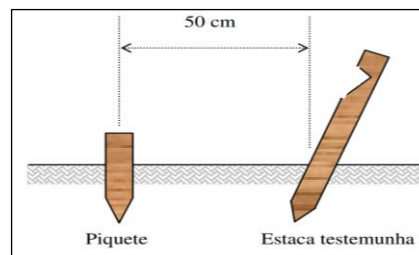
2.4 - PIQUETES

Este acessório é um dos mais utilizados em um levantamento topográfico, os piquetes são necessários para marcar corretamente os extremos do alinhamento a ser medido, suas características são fabricado de madeira roliça ou seção quadrada com superfície no topo plana, na parte superior com pregos ou outras formas de marcação que seja permanente, comprimento variante de 15 a 30 cm, cravado no solo, no entanto parte dele cerca de 3 a 5 cm deve permanecer visível.

2.5 - ESTACAS TESTEMUNHAS

Apresentamos na figura 7 a representação da implantação de um piquete e estaca testemunha, utilizada para facilitar a localização dos piquetes, apontando a sua posição aproximada, fixada próxima ao piquete, seu comprimento entre 15 a 45 cm, chanfrada na parte superior para permitir a marcação do número de ordem do piquete.

Figura 7 - Implantação de um piquete e estaca testemunha



Fonte: VEIGA, 2012, p. 49

2.6 - BALIZA

São utilizadas para manter o alinhamento entre os pontos no terreno. Características são construídas de ferro, arredondado, sextavado ou oitavado, terminadas com ponta guarnecida de ferro, comprimento de 2 metros, pintadas contrastantes (branco e vermelho ou branco e preto) para que facilite a visualização à distância.

2.7 - NÍVEIS DE CANTONEIRA

Nível de cantoneiras apresentado na figura 8 é um acessório utilizado para atribuir a bolha circular para que a pessoa firme a baliza corretamente na posição vertical sobre o piquete ou alinhamento a medir.

Figura 8 - Níveis de cantoneira



Fonte: VEIGA, 2012, p. 50.

2.8 - GEODÉSIA

A história da geodésia inicia pelos primeiros relatos documentados na época grega, relatos sobre a geodésia no período de Tales de Mileto (625-547 a.C) fundador da trigonometria, para ele a terra era como um disco que flutuava no oceano. Anaximander de Mileto (611-545 a.C) discípulo de Tales, acreditava que a terra tinha formato cilíndrico, que cercada por vários anéis sendo o sol e a lua um dos anéis e raios chegava através de furos em volta do planeta. A escola Pitágoras (580 - 500 a.C) é a primeira a analisar a terra esférica.

A palavra Geodésia vem do grego Geo no qual significa “terra” e désia que significa “divisões”. O filósofo Aristóteles no século II a.C mostrou as primeiras razões científicas da forma esférica para a terra, ele descobriu o raio da terra, quando o sol encontrava-se exatamente acima de um poço situado em uma cidade próximo do norte, medindo ângulo da sombra e multiplicado pela distância entre as duas cidade , conseguiria atingir a longitude do equador.

O matemático alemão Carl Friedrich Gauss no século XVIII constatou que o modelo matemático usado para terra, o elipsóide de revolução não era adequado. Apareceu uma forma relativamente irregular chamada de geóide, porém as referências do sistema de coordenadas permanecem o elipsóide de revolução.

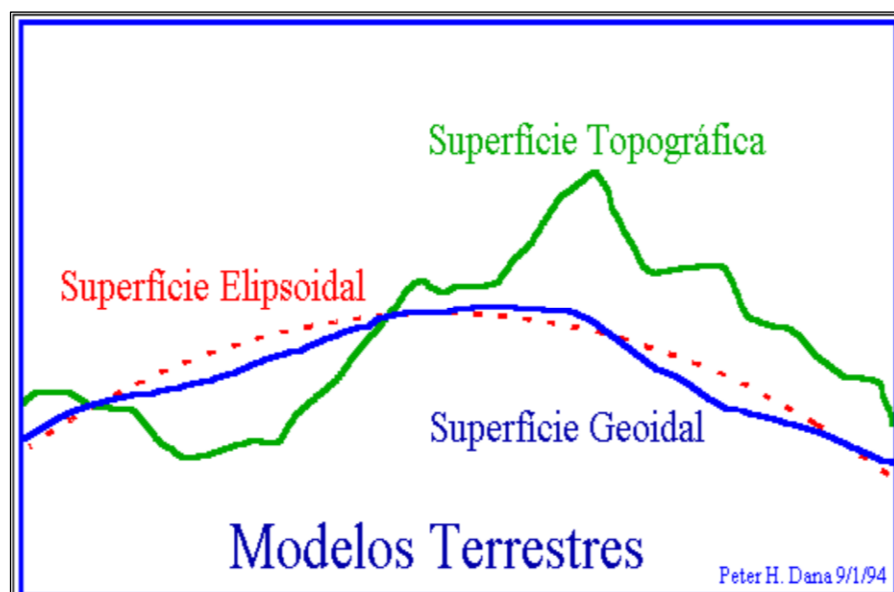
Geodésia é a ciência que se preocupa em estudar três propriedades principais da terra, sua forma, a orientação no espaço e também estudo do campo gravitacional

da superfície terrestre, utilizado no ramo da engenharia, da matemática e da física. A palavra geodésia se originou no grego e significa dividir a terra. Assim a geodesia segundo Espartel (1987) com o auxílio da geografia e matemática se ocupa dos:

Processos de medida e especificação para o levantamento e representação cartográfica de uma grande extensão da superfície terrestre de um estado ou de um país, projetada numa superfície de referência, geométrica e analiticamente definida por parâmetros, variáveis em número, de acordo com a consideração sobre a forma da Terra [...] A Geodésia, que determina com precisão as malhas triangulares justapostas à superfície do elipsóide de revolução terrestre determinando as coordenadas de seus vértices, é uma ciência que abrange o todo, ao passo que a Topografia se ocupa do detalhe de cada malha ou geometria planas, com ligação às coordenadas de referência determinadas, como dissemos, geodesicamente. (ESPARTEL, 1987, p. 04).

Existe uma diferença entre a topografia e a geodésia, enquanto uma é uma pequena apresentação de uma porção da superfície terrestre, a outra respectivamente estuda a representação de grandes porções completas da superfície terrestre, considerando no entorno da mesma. Com o propósito de definir ensinamento de campo, o formato, o tamanho da terra, as coordenadas de pontos, posição de linhas da superfície terrestre e alteração do campo de gravidade, a forma da superfície terrestre vem com dois conceitos principais de modelos, que são eles o elipsóide e geóide apresentados na figura 9.

Figura 9 - Modelos terrestres



Fonte: UNICAMP 2014, P. 23.

2.9 - ELIPSÓIDE

Pitágoras no século VI a.C considerou a terra como sendo uma forma esférica, no final do século XVII seguindo conceitos de Isaac Newton definiu-se a terra como apresentando uma forma de um elipsóide.

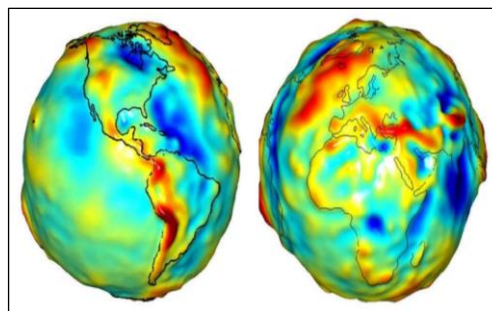
O elipsóide modelo matemático é muito utilizado na superfície terrestre, da mesma forma na cartografia, pois é fácil que consiga utilizar esse modelo para representação à superfície terrestre de uma forma mais simples, tem uma altitude que varia entre mais cem metros a menos cem metros da média de altitude da sua representação total. Para Espartel a diferença entre é:

O geóide e o elipsóide em um dado ponto, ou em outras palavras, o afastamento angular entre as duas superfícies, é determinada em função do desvio da vertical, entre as normais às superfícies do geóide e do elipsóide. (ESPARTEL, 1987, p. 11).

2.10 - GEÓIDE

Geóide é um modelo físico de representação da superfície equipotencial do campo gravitacional da terra, tem maior variação da altitude da superfície terrestre, e tem uma representação mais equilibrada da sua altitude diferente do elipsóide. Geóide mostra apenas a forma da Terra aspectos em suporte nas forças gravitacionais e massas, não possui superfície geometricamente definida nem forma matemática, conforme apresentado na figura 10.

Figura 10 - Geóide



Fonte: UNICAMP 2014, P. 7.

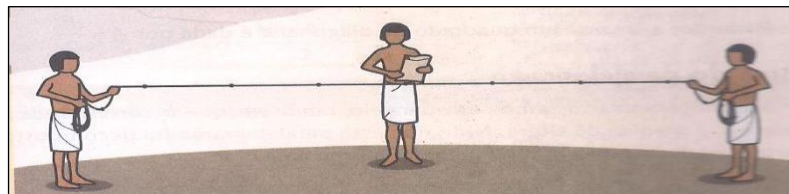
2.11 - O USO DA MATEMÁTICA NA AGRIMENSURA

A matemática está presente desde sempre na humanidade, antes mesmo de existirem os números, as pessoas usavam o próprio corpo como instrumento de medida de contagem, assim que surgiu a polegada, o palmo, o pé, a jarda, a braça e o passo, refere-se às primeiras unidades de medidas.

Cerca de 4.000 anos atrás, os egípcios utilizavam como padrão para medir o comprimento baseado na distância do cotovelo até a ponta do dedo médio, devido ao tamanho da pessoa varia para pessoa, causando confusão nos resultados da medição, então decidiram estabelecer um único padrão, começaram usar barras de pedra do mesmo comprimento em vez do próprio corpo, assim surgiu o cúbito padrão.

À medida que a civilização egípcia cresceu nas margens do Rio Nilo, semeada por agricultores que pagavam impostos anuais ao faraó, às terras necessitavam ser medidas, pois os impostos eram cobrados com base no aumento da terra. Como era impossível medir grandes extensões usando barra de pedra igual ao cúbito, os agrimensores de faraó usaram cordas, contendo nós uniformemente distribuídos conforme apresentado na figura 11. O intervalo entre dois nós correspondia a cinco cúbitos, esticando as cordas podia facilmente medir longas distâncias.

Figura 11 - Estiradores de corda



Fonte: RIBEIRO, 2010, p. 77.

Ribeiro (2010) afirma que:

Os agrimensores, pessoas encarregadas de fazer as medições, esticavam as cordas e verificavam quantas vezes aquela unidade de medida cabia nos lados dos terrenos. Para realizar as medições, os egípcios utilizavam cordas que continham vários nós, cuja unidade de medida correspondia à distância entre um nó e outro. A partir das medidas obtidas com as medições das áreas dos terrenos utilizando cordas, os egípcios realizavam cálculos utilizando métodos aproximados. Muitos desses problemas se encontram nos papiros Rhind e Moscou, o que leva historiadores a acreditar que eles conheciam a fórmula para o cálculo da área de triângulo, retângulos, entre outros. (RIBEIRO, 2010, p. 77).

2.12 - AS ORIGENS DA TRIGONOMETRIA

Quando se fala em trigonometria, geralmente o que vem à mente são as relações no triângulo retângulo, isso devido ao fato de que essas elas são estudadas no ensino médio, principalmente as que envolvem o teorema de Pitágoras, Lei dos Senos e Cossenos, Relações métricas entre outras. As funções trigonométricas se desenvolveram no século XVII logo após o desenvolvimento do simbolismo algébrico.

A expansão das funções trigonométricas ocorreu de fato no século XVIII, em série, e se deu ao fato do progresso de outras áreas da matemática que foram se desenvolvendo conforme a necessidade do dia a dia, suas aplicações práticas se iniciaram na Astronomia, Agrimensura e Navegação, vários povos contribuíram para o desenvolvimento da trigonometria como os gregos, hindus, árabes, persas e até mesmo os povos europeus. Boyer (1906) afirma que a trigonometria, como os outros ramos da matemática, não foi obra de um só homem ou nação, mas que:

Teoremas sobre as razões entre lados de triângulos semelhantes tinham sido conhecidos e usados pelos antigos egípcios e babilônios. Dada a falta, no período pré-helênico, do conceito de medida de ângulo, um tal estudo seria melhor chamado “trilaterometria”, ou medida de polígonos de três lados (triláteros), do que “trigonometria”, a medida de partes de um triângulo,. Com os gregos pela primeira vez encontramos um estudo sistemático de relações entre ângulos (ou arcos) num círculo e os comprimentos da corda que subentendem. As propriedades das cordas, como medidas de ângulos centrais ou inscritos em círculos, eram conhecidas dos gregos do tempo Hipócrates, e é provável que Eudoxa tenha usado razões e medidas de ângulos para determinar o tamanho da Terra e as distâncias relativas do Sol e da Lua. (BOYER, 1906, p. 116).

No Egito um dos primeiros casos de estudo da trigonometria surgiu através do Papiro Ahmes, neste papiro surgiu triângulos semelhantes, e com isso a necessidade de calcular a razão entre os ângulos e lados dessa pirâmide regular. Além das pirâmides em si, a sombra das pirâmides foram importantes para o desenvolvimento da trigonometria, a ideia surgiu devido às sombras projetadas por uma vara vertical, através do comprimento foram descobertas as funções tangente e cotangente.

Os egípcios mediam a inclinação de uma face de uma pirâmide pela razão entre o “percurso” e a “Elevação” – isto é, dando o afastamento da face oblíqua da vertical para cada unidade de altura. Tomava-se como unidade vertical o cúbito e como unidade horizontal a mão, havia sete mãos num cúbito. Utilizando-se essa unidade de medida, chamava-se seqt de uma pirâmide a medida da inclinação. (EVES, 2011, p.83).

Devido ao vínculo forte com a religião, os povos Babilônicos admiravam a astronomia, baseavam o cotidiano a partir de observações dos astros e planetas e criaram calendários, esses calendários eram criados com base nas fases da lua e estações do ano. Para realizar essa organização do tempo é necessário usar escalas, e por essa necessidade surgiram às unidades de medidas e a utilização dos triângulos foi necessária para as observações astronômicas. Segundo (Smith 1958) há evidências do compartilhamento de informações da trigonometria primitiva entre os povos babilônicos e egípcios.

“O conhecimento vem da sombra, e a sombra vem do gnômon” essa frase faz parte de escritos antigos da literatura chinesa no segundo milênio a.C durante o reinado de Chóu-pei Suan-king esses escritos mostram que o conhecimento das relações trigonométricas e conceitos de ângulos já eram difundidos no oriente .

Gnômon que é citado nos textos chineses foi nome dado ao relógio do sol pelos gregos, o gnômon é uma vareta, ela foi usada como instrumento para observações astronômicas, eles colocavam uma das pontas fincadas na terra e sua sombra formava um ângulo de 90° e o comprimento da sombra poderia ser observado em diferentes momentos do dia (horas), a hora exata do dia através do gnômon é ao meio dia. O relógio do sol possibilitou aos gregos de desenvolverem uma forma de dividir o ano e as estações. Mol (2013) afirma que as necessidades prática serviram de estímulo para o desenvolvimento da matemática egípcia e que:

[...] A partir do ano 3000 a.C., inicia-se um período de grande desenvolvimento da engenharia, em que a face mais visível é a construção de pirâmides e de outros monumentos grandiosos. A maior das pirâmides, a grande pirâmide de Quéops, construída por volta do ano de 2550 a.C. tinha originalmente 146,6 m de altura (o que equivale a um prédio de 49 andares) e foi, até cerca do ano 1300 d.C., a mais alta estrutura erguida pelo homem. Sua construção envolveu níveis de precisão surpreendentes, sua base é quadrada, com um erro de $1/14000$ do comprimento total, na medida do comprimento, e um erro de $1/27000$ de um ângulo reto, na medida do ângulo. No entanto, sugestões de que as pirâmides guardavam em suas proporções sinais de um conhecimento matemático ainda mais avançado [...]. De todo modo, o desafio lançado pela engenharia gerou necessidades que fizeram impulsionar o estoque de conhecimentos matemáticos da civilização egípcia. (MOL, 2013, p. 21).

O progresso da trigonometria está profundamente conectado à geometria. A Grécia, neste caso tem grandes sábios, que contribuíram de forma significativa como Thales, Pitágoras, Eratóstenes, Aristarco, Nicolau Copérnico entre outros. Dante (2004) afirma que a geometria acompanhou o ser humano na busca pelo conhecimento e que:

Os gregos assumiram seu desenvolvimento. E questões que sempre intrigaram a humanidade, como o tamanho do raio da Terra, a distância da Terra à Lua ou da Terra ao Sol, já estimadas em outras épocas por outros sábios, passaram, a partir de então, a ser tratadas com o auxílio dos conhecimentos geométricos. [...] Eis alguns bons exemplos de contribuições da Geometria à ciência ao longo do tempo: O grego Aristarco de Samos (310 A.C.-230 a.C.) foi brilhante em perceber como comparar as distâncias da Terra à Lua e da Terra ao Sol usando triângulos retângulos, semelhanças de triângulos e proporções. Eratóstenes (276 a.C.-196 a.C.). Ficou conhecido por sua versatilidade e por uma engenhosa ideia para calcular o raio da Terra, baseado na proporcionalidade entre medida e comprimento de arcos, nos ângulos correspondentes em paralelas cortadas por transversais e na razão entre comprimento da circunferência e seu diâmetro. Nicolau Copérnico (1473-1543) retomou as hipóteses heliocêntricas de Aristarco [...] e elaborou toda uma teoria em que os planetas teriam órbitas circulares em torno do Sol, calculando os períodos de revolução dos planetas e suas distâncias até o Sol, com base na proporcionalidade de arcos e semelhança de triângulos (já na forma de Trigonometria). A Geometria que estudamos hoje é essencialmente a mesma que serviu de alicerce para que os estudiosos do passado conseguissem cada vez mais adquirir conhecimento e entender melhor a natureza que nos cerca. (DANTE, 2004, p 235).

O teorema de Pitágoras teve uma contribuição significativa em estudos conectados à trigonometria. Mas segundo Boyer, as obras de Tales e Pitágoras são indefinidas.

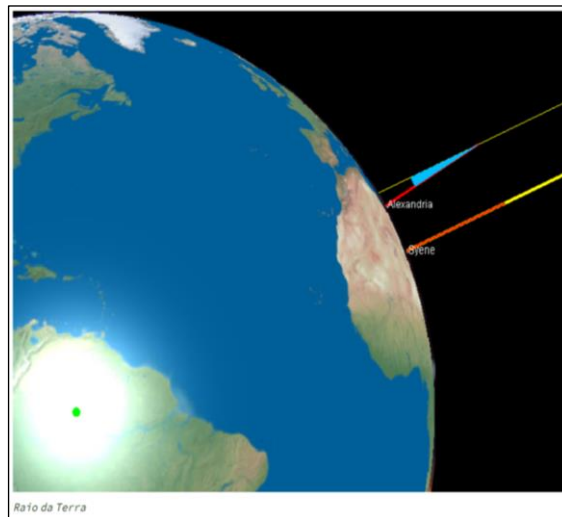
Não sobreviveu nenhuma obra de qualquer deles, nem se sabe se Tales ou Pitágoras jamais compuseram tal obra. O que fizeram deve ser reconstruído com base numa tradição, não muito digna de confiança, que se formou em torno desses dois matemáticos antigos. (BOYER, 1906, p. 34)

Vários astrônomos que vivem na Grécia por volta de 200 a.C. interessados em calcular a distância entre dois pontos inacessíveis na superfície da Terra, despertou curiosidade sobre a medição do raio da Terra. Mas que grande popularidade Eratóstenes de Cirene (276-194 a.C) usou a semelhança de triângulos para alcançar a medida mais precisa do raio da Terra nos tempos antigos, tal façanha o fez perceber a importância de obter uma relação mais sistemática entre ângulos e cordas. Dante (2014) afirma que coube ao filósofo e astrônomo Eratóstenes a tarefa de:

Medir a circunferência da Terra. Também conhecedor de Matemática, Eratóstenes usou a Trigonometria em seus cálculos. Ele observou que nos dias 20 e 21 de junho o ângulo que os raios do Sol faziam com a superfície da Terra na cidade de Siena (hoje Assuã) era de 90° . Nos mesmos dias, esse ângulo era de 7° para a cidade de Alexandria. Por meio de relatos de viajantes, Eratóstenes sabia que a distância entre as duas cidades era de cerca de 5.000 estádios, ou 206 250 metros. Mais uma vez usando Trigonometria, ele foi capaz de calcular a circunferência da Terra. Chegou ao resultado de 45000 quilômetros. Uma precisão razoável, já que o valor real é de 40076 quilômetros. (DANTE, 2004, p 25).

Destaca-se que para fazer os escritos de Eratóstenes, o conhecimento do conceito de perspectiva e como medi-lo conforme apresentado na figura 12 o artigo “Sobre a medida da Terra” resume suas conclusões, mas infelizmente esses escritos estão perdidos e tudo o que sabemos sobre o assunto veio registros de Ptolomeu e Heron.

Figura 12 - Método Eratóstenes para medida da circunferência da Terra



Fonte: AGOSTINHO, 2014 p. 3

2.13 - RELAÇÕES MÉTRICAS E TRIGONOMÉTRICAS

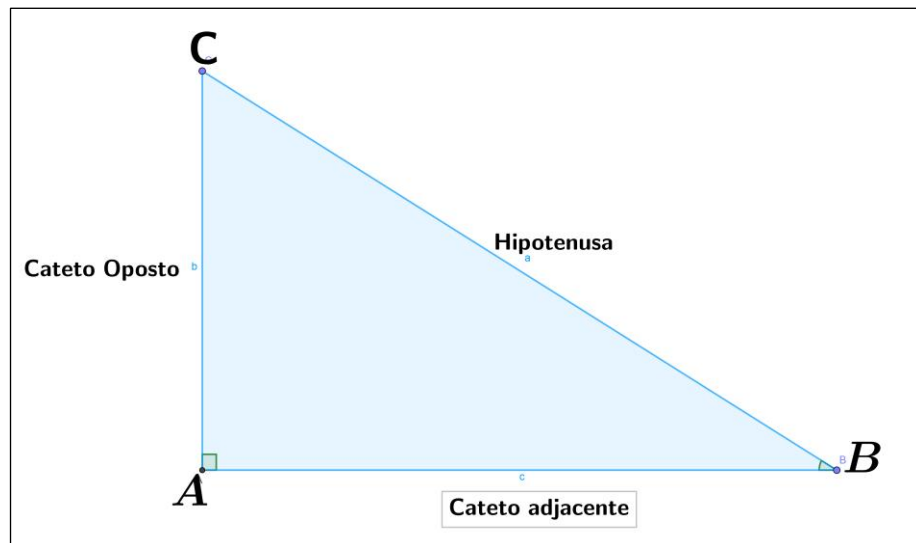
Segundo Chavante (2020) define que as relações métricas envolvem as medidas dos lados dos triângulos, já as relações que envolvem medidas de lados e seus ângulos internos são chamadas de relações trigonométricas. Para Paranaguá (1938) O menor número de retas, que se pode empregar para fechar espaço, é o de três, concorrendo duas a duas, formam três ângulos, que estão todos no mesmo plano. Por isso chama-se:

Triângulo retilíneo, ou triângulo simples, a figura terminada por três linhas retas, cada uma desta se diz lado do triângulo. Se duas somente iguais; chama-se triângulo equilátero. Se todas são iguais, chama-se triângulo isósceles. Se todas desiguais; chama-se triângulo escaleno. Distingue-se, pois no triângulo sete coisas: três ângulos, três lados, e a área [...]. Em todo triângulo a soma de quaisquer dois lados é maior do que o terceiro [...]. Logo com três retas quaisquer nem sempre se forma triângulo [...]. A soma dos ângulos de qualquer triângulo é $= 180^\circ$. (Paranaguá, 1838, p.32).

Do triângulo retângulo temos:

Se α é um ângulo em um triângulo retângulo conforme apresentado na figura 13, então:

Figura 13 - Triângulo retângulo



Fonte: Elaboração própria aplicativo geogebra

No triângulo retângulo em A, acima, o maior lado é o segmento BC que chamamos de hipotenusa do triângulo.

O segmento AB é adjacente ao ângulo alfa, por isso damos-lhe o nome de cateto adjacente.

O segmento CA é oposto ao ângulo alfa, e por isso damos-lhe o nome de cateto oposto.

Para Giovanni (2018) o triângulo retângulo dos egípcios e a construção de pirâmides de base quadrada é uma das aplicações do conhecimento geométrico dos antigos que.

Usavam um processo prático para obter “cantos” retos (ângulos retos). Com o auxílio de uma corda com 12 nós, os egípcios parecem ter construído um retângulo particular para obter “cantos” em ângulos retos. Nesse triângulo, cujos lados medem 3 unidades, 4 unidades e 5 unidades de comprimento, o ângulo formado pelos dois lados menores é um ângulo reto. (GIOVANNI, 2018, p.199)

De acordo com esse autor é atribuído a Pitágoras de Samos a descoberta e demonstração geral do teorema que leva seu nome. Embora esse teorema tenha sido conhecido pelos babilônios é possível que para essa demonstração Segundo Giovanni (2018) Pitágoras e seus discípulos tenha se baseado em:

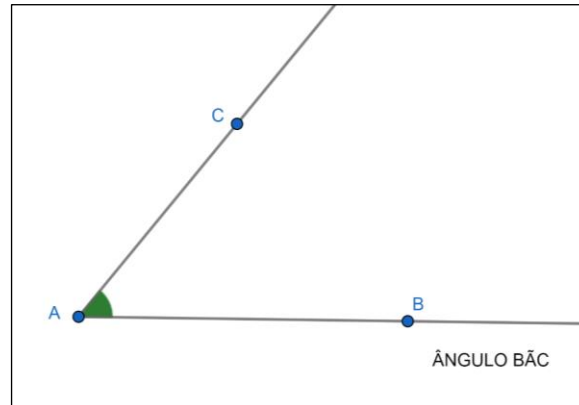
Conhecimentos geométricos dos egípcios e em mosaicos que eram vistos com frequência em paredes das construções do Egito antigo. A área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos. Essa descoberta estava inicialmente restrita a um triângulo retângulo particular: O triângulo retângulo isóscele. Porém, estudos realizados posteriormente mostram que a relação métrica descoberta era válida para todos os triângulos retângulos. Tomando, por exemplo, o triângulo retângulo particular dos egípcios e construindo quadrados sobre os lados desse triângulo, podemos obter a figura ao lado, que nos permite estabelecer uma relação entre as medidas dos lados desse triângulo retângulo escaleno. (GIOVANNI, 2018, p.200)

Esse teorema de acordo com Giovanni (2018) pode ser enunciado como “Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos”. E obtemos a relação seguinte $a^2 = b^2 + c^2$ esse teorema possui importância relativa para a matemática, o que torna possível o conhecimento de outras relações matemáticas, não se sabe ao certo a data de sua descoberta no entanto registros nos apontam que:

Data o começo da história documentada da Matemática chinesa não é fácil. Estimavas quanto à data de *Chou Pei Suan Ching*, considerado o mais antigo dos clássicos matemáticos, diferem por quase mil anos. Alguns consideram esse registro como uma obra no primeiro século de nossa era. Quase tão antigo essa obra, talvez o mais influente livro chinês de Matemática, foi *Chui-Chang Suan-Shu* ou *Nove capítulos sobre a arte matemática*. Esse livro contém 246 problemas, e maior parte deles envolve situações práticas. O famoso problema do “bambu quebrado” apresentado o seguinte texto: “Um bambu com 1 zhang de altura partiu-se, e a parte de cima tocou o chão a 3 chih base do bambu. Qual é altura da quebra? (Nota: 1 zhang = 1chih)” No século XII, o matemático hindu Bhaskara publicou o mesmo assim: “Se um bambu de 32 cúbitos de altura é quebrado pelo vento de modo que ponta encontra o chão a 16 cúbitos da base, que altura a partir do chão ele foi quebrado?” (GIOVANNI, 2018, p.203)

2.14 - ÂNGULOS NOTÁVEIS E ARCOS

Segundo Bonjorno (2014) dentre as ideias associadas a ângulos, uma delas é a de que ângulo é a figura formada por duas semirretas de mesma origem conforme apresentado na figura 14.

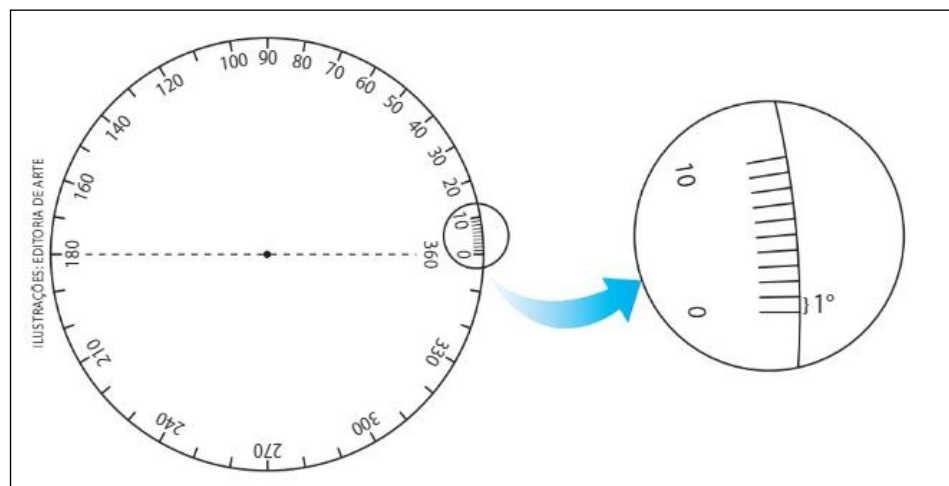
Figura 14 - Ângulo.

Fonte: Elaboração Própria adaptada de Bonjorno, 2014, p. 166.

Para esse autor ao analisamos a figura 14 podemos notar que:

As semirretas OA e OB são os lados, e o ponto O é o vértice do ângulo. Uma das unidades de medidas de ângulo é o grau, que corresponde a cada uma das partes de uma circunferência dividida em 360 partes iguais. (BONJORNO, 2014, p. 166).

Conforme apresentado na figura 15 o ciclo trigonométrico tem 360 centímetros, que é dividido em 360 partes chamadas de graus:

Figura 15 - Circunferência

Fonte: Bonjorno, 2020, p. 90.

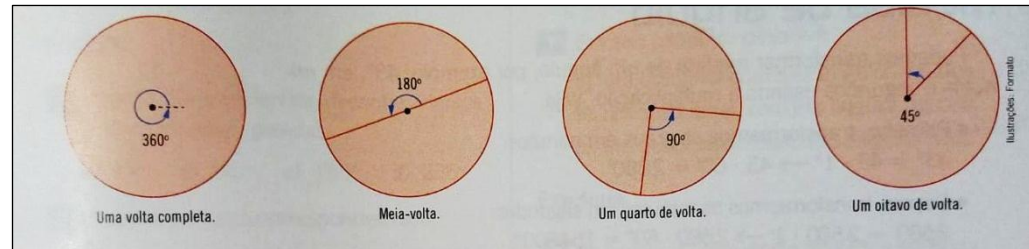
Assim, de acordo com Bonjorno (2014).

Cada uma dessas 360 partes em que essa circunferência foi dividida mede 1 grau (1°). Assim, o ângulo correspondente a uma volta completa mede 360 graus, que podemos representar assim: 360° . Como cada uma das partes em

que a circunferência foi dividida em 1 grau, considere as medidas dos ângulos de giro a seguir: (BONJORNIO, 2014, p. 166).

Conforme apresentado na figura 16

Figura 16 - Medidas dos ângulos de giro.



Fonte: Bonjorno, 2014, p. 167.

Para medir alturas de diferentes objetos, usamos razões trigonométricas, para medição de ângulos de elevação e depressão na resolução de alturas e distâncias, usamos as razões trigonométricas para ângulos notáveis conforme apresentado no quadro 1.

Quadro 1- Ângulos Notáveis

Ângulo	30°	45°	60°
Sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
Cot	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
Sec	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2
Cossec	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Fonte: Elaboração própria.

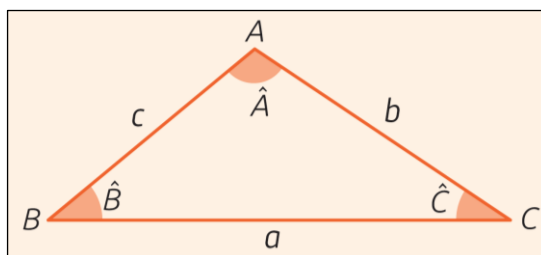
2.15 - LEI DOS SENOS

Dentre as relações matemáticas da trigonometria temos a lei dos senos, relação matemática de proporção para triângulos arbitrários em um plano que permite relacionar lados e ângulos de qualquer triângulo. A lei dos senos afirma que a razão entre o comprimento do lado de um triângulo é o seno do ângulo oposto, que é o mesmo para os outros três lados, essa lei serve para encontrarmos um ângulo ausente, quando dado um ângulo e dois lados, ou mesmo para encontrar um lado ausente quando dado dois ângulos e um lado.

Segundo Chavante (2020) Conforme o esquema para se determinar a medida do lado AB do triângulo obtusângulo ABC. Podemos utilizar a lei dos senos. Que afirma que Dado um triângulo qualquer ABC, as medidas de seus lados são proporcionais aos senos dos ângulos oposto correspondentes: $\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$.

Conforme Chavante (2020) dado um triângulo qualquer, as medidas de seus lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos correspondentes, apresentado na figura 17.

Figura 17 - Lei dos senos para triângulos obtusângulos.

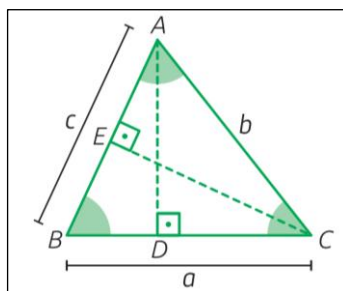


CHAVANTE, 2020, p. 28

Para demonstrar a validade da lei dos senos para triângulos acutângulos, Chavante (2020) afirma que:

Triângulos que possuem ângulos internos agudos conforme apresentado na figura 19. E considerando o triângulo ABC e duas de suas alturas. No triângulo BCE, temos $\text{sen } \hat{B} = \frac{EC}{a} \Rightarrow EC = a \cdot \text{sen } \hat{B}$. No triângulo ACE, temos $\text{sen } \hat{A} = \frac{EC}{b} \Rightarrow EC = b \cdot \text{sen } \hat{A}$. Comparando essas duas igualdades, tem-se: $a \cdot \text{sen } \hat{B} = b \cdot \text{sen } \hat{A} \Rightarrow \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}}$ (CHAVANTE, 2020, p. 28).

Figura 18 - Lei dos senos para triângulos acutângulos.



CHAVANTE, 2020, p. 28

No triângulo ABD, temos:

$\sin \hat{B} = \frac{AD}{c} \Rightarrow AD = c \sin \hat{B}$. No triângulo ACD, temos $\sin \hat{C} = \frac{AD}{b} \Rightarrow AD = b \sin \hat{C}$. Comparando essas igualdades, tem-se $c \sin \hat{B} = b \sin \hat{C} \Rightarrow \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$. Das relações I e II, temos $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$, como queríamos demonstrar. Também é possível realizar a demonstração da lei dos senos para triângulos obtusângulos e para triângulos retângulos. Utilizando a lei dos senos para resolver a situação do início deste tópico, temos: $\frac{d}{\sin 113^\circ} = \frac{22}{\sin 26^\circ} \Rightarrow d = \frac{22 \cdot \sin 67^\circ}{\sin 26^\circ} \Rightarrow d \simeq \frac{22 \cdot 0,9205}{0,4384} \simeq 46,19$. Portanto, a distância aproximada entre as duas árvores mede 46,19 m. (CHAVANTE, 2020, p. 28).

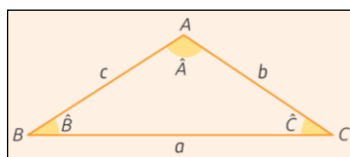
2.16 - LEI DOS COSSENOS

A lei dos cossenos é útil para calcularmos os ângulos de um triângulo e o terceiro lado de um triângulo quando dois lados e seus ângulos fechados são conhecidos. Chavante (2020) define que:

Em situações que envolvem triângulo quaisquer, em que se conhece a medida de dois lados e a medida do ângulo formado por eles, e pretende-se determinar a medida do terceiro lado, podemos utilizar a **lei dos cossenos**. Dado um triângulo qualquer ABC, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, subtraída do dobro do produto das medidas desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} \rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}$
 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$ (CHAVANTE, 2020, p. 28).

Como demonstrado na figura 19

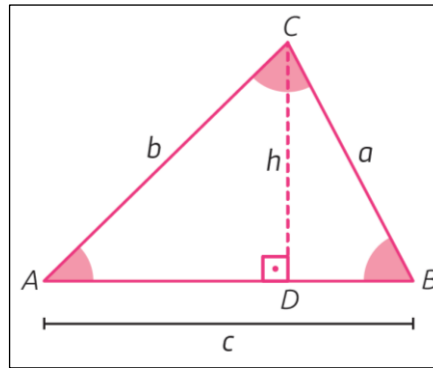
Figura 19- Medidas dos ângulos de giro



Fonte: CHAVANTE, 2020, p. 29

Vamos demonstrar a validade da lei dos cossenos para triângulos acutângulos. Chavante (2020) Considera o triângulo ABC e uma de suas alturas. No triângulo ACD , temos: $\cos \hat{A} = \frac{AD}{b} = b \cdot \cos \hat{A}$, $b^2 = (AD)^2 + h^2 = b^2 - (AD)^2 \Rightarrow$ (I). Conforme demonstrado na figura 21

Figura 20- Lei dos cossenos para triângulos acutângulos



Fonte: CHAVANTE, 2020, p. 29

No triângulo BCD , segundo Chavante (2020) temos:

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + (BD)^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - (c - AD)^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - (c - b \cdot \cos \hat{A})^2 \\ \Rightarrow h^2 &= a^2 - (c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} + b^2) \Rightarrow h^2 = a^2 - c^2 + 2bc \cdot \cos \hat{A} - b^2 \cdot \cos^2 \hat{A} \quad \text{(II)} \end{aligned}$$

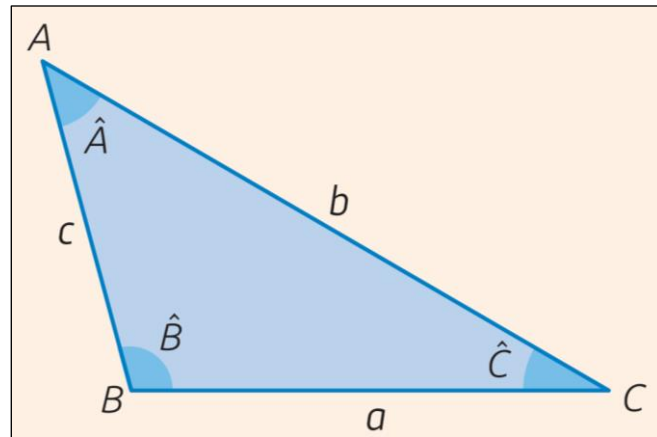
Das relações I e II, temos: $b^2 - b^2 \cdot \cos^2 \hat{A} = a^2 - c^2 + 2bc \cdot \cos \hat{A} - b^2 \cdot \cos^2 \hat{A} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$. O mesmo argumento utilizado para ângulo $\hat{A}$ vale para os demais ângulos, demonstrando que as demais expressões também são válidas. Também é possível realizar a demonstração da lei dos cossenos para triângulos obtusângulos e para triângulos retângulos. (CHAVANTE, 2020, p. 29).

2.17 - ÁREA DE UM TRIÂNGULO RETÂNGULO

A área do triângulo retângulo é o espaço ocupado dentro do triângulo retângulo. Para Chavante (2020) toda linha poligonal fechada e simples é chamada polígono e que:

Quando falamos determinar a área de uma região poligonal, estamos levando em consideração os lados do polígono e sua região interna. O triângulo é um polígono que possui três lados. Provavelmente você já viu em anos anteriores que área de um triângulo pode ser obtida utilizando a expressão $A = \frac{b \cdot h}{2}$, em que b representa a medida de um dos lados e h , a medida correspondente à altura relativa a esse lado. Agora veremos uma maneira de calcular a área de um triângulo conhecendo a medida de dois lados e a medida do ângulo formado por eles. Dado um triângulo qualquer ABC , sua área é dada pelo semi-produto das medidas de dois lados quaisquer pelo seno do ângulo formado por eles. $A = \frac{ab \cdot \sin \hat{C}}{2}$ $A = \frac{ac \cdot \sin \hat{B}}{2}$ $A = \frac{bc \cdot \sin \hat{A}}{2}$. (CHAVANTE, 2020, p. 30).

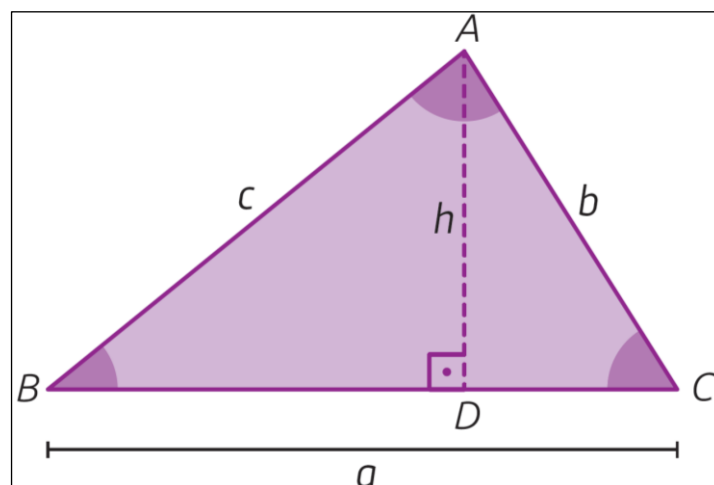
Figura 21- Cálculo de área de triângulos acutângulos



Fonte: CHAVANTE, 2020, p. 30

Vamos demonstrar a validade dessas expressões para triângulos acutângulos. Considere o triângulo ABC apresentado na figura 22 e uma de suas alturas. Para Chavante (2020) no triângulo ABD , temos $\sin \hat{B} = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \cdot \sin \hat{B}$. Como a área do triângulo ABC da mesma figura pode ser determinada por meio da expressão $A = \frac{b \cdot h}{2}$, segue que: $A = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a \cdot (c \cdot \sin \hat{B})}{2} \Rightarrow A = \frac{ac \cdot \sin \hat{B}}{2}$.

Figura 22- Cálculo de área de triângulos acutângulos



Fonte: CHAVANTE, 2020, p. 31

Para Chavante (2020) O mesmo argumento utilizado para o ângulo $\hat{B}$ vale para os demais ângulos, as demais expressões também são válidas e suas demonstrações.

Além disso é possível realizar a demonstração da área de um triângulo para triângulos obtusângulos retângulos.

Do triângulo equilátero temos:

Temos seis funções trigonométricas para as quais a relação entre lados e ângulos são definidos, as funções básicas da trigonometria são seno, cosseno e tangente, com base nessas três funções as outras três funções que são cotangente, secante e cossecante são derivadas.

Todos os conceitos trigonométricos são baseados nessas funções e para entendermos melhor a trigonometria precisamos aprender essas funções e suas respectivas fórmulas. Dos triângulos temos as definições da geometria que nos diz que:

As seis funções trigonométricas são razões trigonométricas calculadas usando as fórmulas do quadro 2.

Quadro 2 - Funções trigonométricas

Função	Abreviação	Relação com os lados de um triângulo retângulo
Função Seno	Sen	$\text{Seno } \alpha = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Hipotenusa}}$
Função Cosseno	Cos	$\text{Cosseno } \alpha = \frac{\text{Cateto adjacente}}{\text{Hipotenusa}}$
Função Tangente	Tan	$\text{Tangente } \alpha = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Cateto adjacente}}$
Função Cotangente	Cot	$\text{Cotangente } \alpha = \frac{\text{Cateto adjacente}}{\text{Cateto oposto}}$
Função Secante	Sec	$\text{Secante } \alpha = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Adjacente}}$
Função Cossecante	Csc	$\text{Cossecante } \alpha = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto oposto}}$

Fonte: Elaboração própria.

3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS E ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo apresentamos a metodologia utilizada para nossa pesquisa de abordagem qualitativa por meio de levantamentos bibliográficos e estudo de caso. A proposta de intervenção foi realizada no Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Tocantins Campus Palmas no município de Palmas-TO no ano de 2019 em uma turma do curso técnico de informática da 1ª Série do Ensino Médio com 41 alunos.

Segundo Gil (2002) o estudo de caso instrumental é aquele desenvolvido com o propósito de:

Auxiliar no conhecimento ou redefinição de determinado problema. O pesquisador não tem interesse específico no caso, mas reconhece que pode ser útil para alcançar determinados objetivos. [...] Os estudos de caso podem ser constituídos tanto de um único quanto de múltiplos casos. [...] Os dados podem ser obtidos mediante análise de documentos, entrevistas, depoimentos pessoais, observação espontânea, observação participante e análise de artefatos físicos. (GIL, 2002, p. 139-141).

Para realização deste trabalho usamos os seguintes materiais: teodolito profissional e caseiro, piquetes, trena, bloco para anotações, marcadores, calculadoras e canetas.

O objetivo desta pesquisa é incentivar a exploração de recursos manipuláveis como ferramenta auxiliadora e facilitadora do processo de ensino-aprendizagem, tanto para professores como para alunos no ensino de trigonometria aliada aos conhecimentos da agrimensura, a fim de que, ao construir seu próprio conhecimento acerca do que estudam o aluno possa apresentar, explorar, usar e analisar de forma prática esses conhecimentos tão necessários à vida do ser humano e que isso desperte interesse e possa motivá-los.

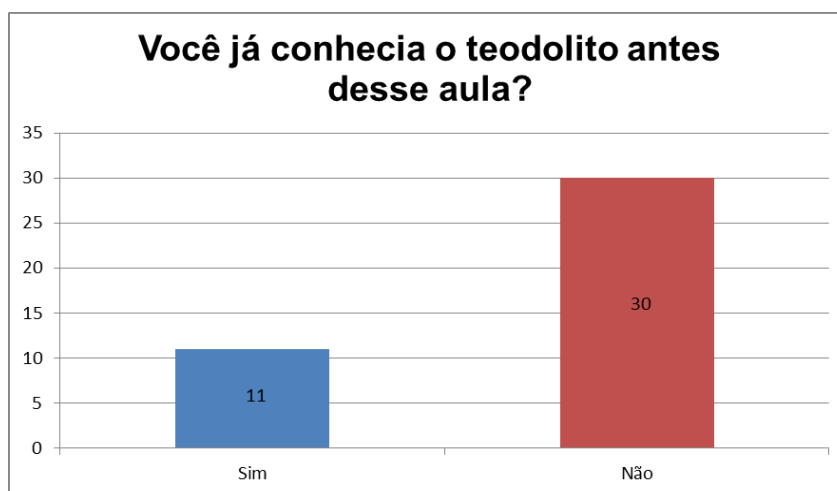
Para Lorenzato (2006) o ensino de matemática hoje, não pode estar limitado a utilização de quadro, livro e giz, mas que está ligado ao conhecimento profundo do professor e a procedimentos em que se utilize materiais manipuláveis e que promovam a aprendizagem, e ainda que esses procedimentos auxiliam o professor a dar sentido aos conhecimentos matemáticos trabalhados na escola e a tornar as aulas mais interessantes.

De acordo com MUNIZ (2001) ser professor de matemática é um desafio, já que a matemática tem um perfil social que privilegia aqueles com recursos financeiros e exclui parte da sociedade.

Assim, vir a ser professor desta área deve implicar na mudança dessas representações como disponibilidade e vontade de participar de um movimento internacional de reconstrução da imagem do que é matemática, como o conhecimento matemático participa da continuação do ser humano e seu papel na capacitação e no desenvolvimento da cidadania para participação efetiva de sua cultura e sua história. (Muniz,2001, p.13).

Inicialmente utilizou-se um questionário como instrumento para coleta de dados com a finalidade de verificar como o conteúdo de trigonometria era abordado em sala de aula, com relação à primeira pergunta que verificava se os alunos já conheciam o teodolito antes da aula, apresentamos as respostas em forma gráfica de acordo com o gráfico 1.

Gráfico 1 - Gráfico com a pergunta se os alunos já conheciam o teodolito antes da aula



Fonte: Elaboração própria

Grande parte dos alunos não tiveram contato com o teodolito antes da atividade. Ao apresentar esses instrumentos utilizados pelos agrimensores para cálculo de grandes alturas ou alturas inacessíveis, notamos a dificuldade dos alunos em associar as relações da trigonometria em triângulos e as interpretações desses problemas que os englobam.

Escolhemos o lugar a ser utilizado para as demarcações, localizado próximo a sala de aula, instalamos o aparelho, colocando no chão o piquete, logo após as

instruções de manuseio, nivelamento, leitura de dados e utilização desses conhecimentos de geometria e trigonometria no triângulo retângulo, explicamos como as relações são aplicadas na topografia, medimos a altura do aparelho, fizemos a leitura do ângulo com o teodolito profissional e com o teodolito caseiro, medimos o topo do pavilhão do bloco e utilizamos uma trena para medir a distância do observador até o prédio. As anotações foram feitas em um bloco para que depois o cálculo da altura total do bloco fosse calculado pelos alunos. Para realizar essas medidas fazemos os seguintes procedimentos:

Inicialmente nos afastamos do ponto onde queríamos calcular a altura, e medimos a distância entre o ponto e nossa localização com fita métrica, essa distância é o nosso **cateto adjacente**. Olhamos pelo orifício do canudo para enxergar o topo do prédio, a altura corresponde ao **cateto oposto**. Seguramos o barbante com o peso na posição onde parou e anotamos o ângulo determinado pelo barbante (na posição horizontal, o ângulo marcado é de 90°). Procuramos na tabela de razões trigonométricas a tangente do seu ângulo de visão. Logo a tangente será a razão entre a altura do prédio, vista pelo observador e a distância desse observador até o prédio. Para saber a altura do prédio, devemos acrescentar a altura do observador (do chão até seus olhos) a altura vista por ele como mostra a figura 23.

Figura 23- Aula prática de medidas



Fonte: Elaboração própria.

Depois do experimento perguntamos se com a utilização do material concreto (teodolito) eles conseguiram compreender sobre o conteúdo de razões trigonométricas e como calcular alturas inacessíveis. As respostas estão apresentadas em forma gráfica.

Gráfico 2 - Se com a utilização do material concreto (teodolito) eles conseguiram aprender algo a mais sobre o conteúdo de razões trigonométricas



Fonte: Elaboração própria

Na terceira pergunta questionamos se eles consideravam a utilização do teodolito importante para aprender razões trigonométricas. Entre as respostas dos estudantes estão:

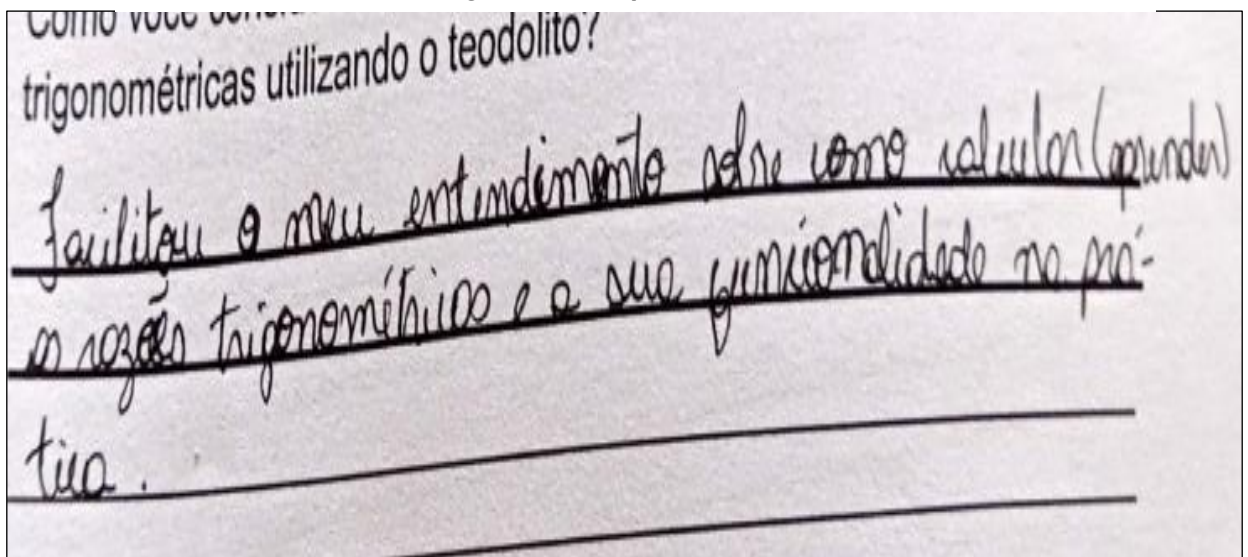
Um aluno respondeu que “É importante para que possamos ter mais uma maneira de aprender este conteúdo, e também não é bom ficarmos “presos” dentro da sala, já que cansa por ser uma atividade repetitiva”. Ou ainda. “Quando aprendemos isso em matemática muitas vezes não vimos à utilidade, com o teodolito podemos compreender a amplitude do assunto”.

Outro aluno disse que. “É bom, pois a aula fica mais dinâmica e é importante porque é mais fácil de entender as razões trigonométricas, adorei a aula”. Outro disse que “O teodolito é uma ferramenta útil para a realização de cálculos trigonométricos e

consequentemente, contribuiu para a compreensão dos mesmos. Aprender na prática é animador”.

Outro afirmou que. “Sim por ser uma ferramenta que dá resultados corretos, facilitando a aprendizagem”. Outro disse que. “O teodolito facilita o estudo das razões trigonométricas, eu achei um jeito divertido, saber certa altura de algo é importante para outros estudos”. E ainda “Eu achei fácil achar o ângulo”. Um deles disse que, “Por meio das aulas práticas tivemos a chance de visualizar tudo, ficou melhor para absorver o conhecimento”. Ou que “É mais fácil para absorver o conteúdo, pois ali na prática nós éramos capazes de visualizar o triângulo retângulo de forma prática”.

Figura 24 - Resposta de um estudante



Fonte: Elaboração própria.

Como aluna obtive as primeiras experiências na área da matemática no curso de Agrimensura do IFTO campus Palmas, começando com cálculos básicos aprendidos no ensino médio mesmo, de início estudamos sobre geometria, as relações no triângulo retângulo como seno, cosseno, tangente, grau, radiano entre outros, durante quatro módulos, experimentamos como encontrar os cálculos manualmente e como esses conhecimentos podem ser usados na agrimensura, que os cálculos matemáticos podem ser feitos mesmo se o profissional se ache sem alguma ferramenta de trabalho como por exemplo os softwares que um agrimensor usa.

Recebemos instruções de como são feitos os cálculos para descobrir a altura inacessível de alguns lugares através da aplicação da matemática através de cálculos topográficos, como encontrar o grau, o segundo e os minutos manualmente. Depois

dessa etapa aprendemos a utilizar calculadora científica, que é uma ferramenta fundamental para um topógrafo, cada etapa ou módulo nesse curso é essencial para complemento das seguintes, essa experiência teve grande importância para minha entrada no curso de licenciatura em matemática e ajudou a ter entendimento mais aprofundado dessas relações da geometria e como elas são importantes no nosso dia a dia.

Freudenthal (1973) destaca que o estudo da geometria se constitui em uma das melhores oportunidades para matematizar a realidade e porque esta está presente no ambiente natural em que vivemos nas obras arquitetônicas, nas pinturas, etc. Para Scheffer (2006), a Geometria é um campo fértil para um ensino baseado na exploração e na investigação, atividades que para além da simples memorização de fórmulas e técnicas de resolução de problemas, contribuem para uma maior compreensão de fatos e relações. Um conhecimento básico de Geometria para Oshima (2010) é:

Fundamental não só para os alunos interagirem adequadamente com o seu meio, como também para se iniciarem num estudo mais formal deste conteúdo. É importante que esse conhecimento básico - que compreende conceitos, propriedades e relações simples de Geometria - seja apresentado a partir de atividades experimentais e indutivas, que possibilitam a percepção espacial, a descoberta e a visualização. (OSHIMA, 2010, p.2 Apud Lorenzato, 2006).

Apresentamos um exemplo de medição para uma altura desconhecida de um poste, e descrevemos esse experimento a seguir, utilizamos um aparelho celular para descobrirmos o ângulo, por meio do aplicativo disponível em plataformas digitais gratuitas chamado *Angle Meter* e uma trena, e seguindo os procedimentos corretos qualquer pessoa poderá calcular uma altura desconhecida.

Procedimentos:

1. Medir a altura do observador, que neste caso foi medida a partir da altura dos olhos do observador, para determinações de medidas verticais;
2. Fazemos a leitura do ângulo com uso do aparelho celular;
3. Medimos a distância do observador a base do objeto (poste) que desejamos calcular altura,
4. Usando a tangente do ângulo encontrado podemos determinar a altura.

Apresentamos na figura 25 o procedimento sendo realizado, e como podemos usar os instrumentos para obter essas medidas.

Figura 24- Exemplo prático



Fonte: Elaboração própria.

Ao realizar essa prática fizemos a medição de um poste para descobrirmos sua altura, no primeiro passo posicionamos o celular colocando na posição de ângulo horizontal, e fizemos o apontamento olhando pelo canudo até um dos pontos, Assim a distância de observação até o poste encontrado foi de 24,57 metros, o ângulo de elevação foi de 15° e a altura do observador até os olhos foi de 1,68 metros, logo podemos fazer os cálculos usando a tangente do ângulo encontrado, e aplicar a relação. $\text{tang } x = \frac{co}{ca}$

Para descobrirmos a altura, depois disso, devemos somar a altura encontrada a altura do observador, e assim, achamos a altura que pretendemos encontrar. Conforme apresentado na figura 28.

$$\text{tang } 15^\circ = \frac{co}{24,57}$$

$$\text{tang } 15^\circ = \frac{co}{24,57} \Rightarrow co \simeq 6,58$$

$$h = x + a \Rightarrow h = 6,58 + 1,68 \simeq 8,26 \text{ m}$$

A utilização da Agrimensura pode facilitar o entendimento de mapas usados para a construção e localização de vários tipos de obras e lugares, a topografia exerce

o papel de ensinar a calcular ângulos e distâncias.

Na construção é usada para calcular medição de campos, lotes e áreas, fazer paredes paralelas e perpendiculares, colocação de ladrilhos de cerâmica, inclinação de telhado, altura do edifício, comprimento e largura dentre outros. Na arquitetura é utilizada para calcular a carga estrutural, as inclinações do telhado, as superfícies do solo e muitos outros aspectos, incluindo o sombreamento do sol e os ângulos de luz. Na aviação é utilizada para decidir o caminho de um avião da decolagem até o pouso, precisar a velocidade, distância, direção, juntamente com a velocidade e a direção do vento.

Na física é usada para encontrar os componentes de vetores, modelar a mecânica das ondas (físicas e eletromagnéticas) e oscilações, somar forças a dos campos e usar produtos pontuais e cruzados. Na oceanografia para calcular alturas de ondas e marés nos oceanos. Na navegação é usada para definir direções como norte, sudeste, oeste, informa que decisão tomar com a bússola para chegar a uma direção reta.

Nas investigações criminais, as funções trigonométricas são usadas para calcular a trajetória de um projétil, estimar causas de acidentes de carro, usada para identificar como um objeto cai ou em que ângulo uma arma foi disparada. No desenvolvimento de jogos a trigonometria é a base vetorial para construção de videogames, onde se precisam criar movimentos a partir da trigonometria usando conhecimentos de seno, cosseno e tangente entre outros. Na geografia é usada na criação de mapas.

Na agrimensura é usada para no cálculo de limites que definem propriedades, construção de estradas, habitação, escolas e estruturas comerciais, torres de telefonia celular, linha de fibra ótica, fazendas de painéis solares, gasodutos, exploração de petróleo e gás, barragens, trilhos, pontes e mineração.

A trigonometria é usada em sistemas de radar para calcular a direção e a velocidade de objetos em movimento. No sistema de navegação por satélite, na astronomia, imagens médicas, eletrônica, engenharia civil, engenharia mecânica, no desenvolvimento de música por computador, teoria dos números de química e engenharia elétrica.

Se soubermos a distância de onde se observa um edifício e o ângulo de elevação, poderemos usar trigonometria para medir a altura de um edifício ou montanhas. Da mesma forma, se tivermos o valor de um lado e o ângulo de depressão

do topo de um edifício, poderemos encontrar o outro lado do triângulo, tudo que precisamos saber para encontrar essas medidas é um lado e um ângulo do triângulo.

A topografia tem importância em várias obras de engenharia civil, como o estabelecimento de linhas de fronteiras, pontos de controle, mapeamento hidrográfico, construção civil, urbanismo, geologia, oceanografia, mapeamento de relevo, medições de propriedade, e está diretamente ligada a conhecimentos matemáticos de geometria e trigonometria como área, perímetro, altitude, variação do relevo, orientação, entre outros, como forma adequada, do aluno apreciar o aprendizado e tornar os objetos de conhecimentos mais simples e interessantes.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir das aulas práticas foi possível observar a importância da utilização do teodolito para resolução de problemas reais e a entrega e participação da turma nas atividades propostas. Dar ao aluno a oportunidade de investigar, manipular e pensar até obter suas conclusões tem relevância nesse processo, pois o aluno sente que têm capacidade de aprender por ele mesmo e assim se torna pensante e produtivo, diversos aspectos são considerados no processo de ensino-aprendizagem, no entanto o processo em que o aluno consiga se inserir, participar ativamente e contextualizar exemplos práticos do seu cotidiano gera observações que enriquecem o trabalho do professor e nos leva a discutir e aprimorar a maneira de apresentar a trigonometria aos alunos.

A utilização do teodolito foi fundamental para elevar o entusiasmo dos alunos referente ao conteúdo de trigonometria, e desafiá-los nesse novo modelo de ensino onde o professor não é o único responsável em transmitir conhecimento, despertando interesse, contribuindo para que os alunos se tornassem protagonistas de sua aprendizagem ao deduzirem, estimarem, analisarem, comprovarem, calcularem suas anotações com facilidade.

Concluimos que a experiência foi satisfatória e que os alunos ficaram entusiasmados, pois a aula saiu da forma tradicional, tivemos grande aceitação da turma com relação à utilização desse material, e da aplicação da atividade. Como sugestão para uma próxima experiência, sugerimos que os materiais sejam confeccionados junto com os alunos, pois isso seria de grande aprendizado e facilitaria o processo de ensino-aprendizagem. Assim o ensino de trigonometria, seus problemas principalmente os voltados para medidas de alturas inacessíveis se tornou uma atividade de contribuição, pois sua prática foi significativa na sala de aula.

Ao usarmos abordagens criativas em sala de aula como: conversarmos sobre matemática, realizarmos atividades práticas, jogos, trabalho em equipe, entre outras estratégias, poderemos envolvê-los e levá-los a compreender de forma interessante promovendo o pensamento crítico e conectando a matemática a outras áreas de aprendizagem, quando alunos têm a oportunidade de escolherem como aprendem e demonstrarem como aprenderam um conceito, sua adesão e motivação aumentarão, e à medida que mostrarem como aprenderam, professores poderão acompanhar sua

compreensão e descobrirão onde precisam de suporte adicional ou outra assistência, ou mesmo adaptarão suas aulas de acordo com a necessidade da turma, assim os alunos terão facilidade na aprendizagem e atribuirão significado ao que estão estudando.

REFERÊNCIAS

- AGOSTINHO, R. **Medição do Raio da Terra pelo Método de Eratóstenes**, 2014. Disponível em:
https://www.google.com/url?q=https://www.researchgate.net/publication/308048296_Medicao_do_Raio_da_Terra_pelo_Metodo_de_Eratostenes&sa=D&source=docs&ust=1654124961430970&usg=AOvVaw02rd1JKjUImG6xNNW0AQvn
 Acesso em: 28 de maio de 2022.
- BOYER, C. B. **História da Matemática**. 1906
- BONJORNO, R.B. et al. **Projeto Athos: Matemática**, 7º ano 1ª ed. São Paulo. FTD. 2014.
- CHAVANTE, E. et al. **Quadrante matemática e suas tecnologias: trigonometria e sequências** 1ª ed. São Paulo. Edições SM. 2020.
- DANTE, L. R. **Matemática: Contexto e Aplicações**. 3ª ed.vol.2 2013.
- ESPARTEL, L. **Curso de Topografia**. 9ª ed. Rio de Janeiro, Globo,1987.
- FRAGA, M. A. **Significado do ângulo: Índícios do conceito em atividades de localização**, São Paulo p. 45, 2016. Disponível em:
https://www.google.com/url?q=https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-18032019-155339/publico/MOISES_ALVES_FRAGA.pdf&sa=D&source=docs&ust=1654124961567634&usg=AOvVaw1C-pAlqtZDe6FG4yK7LbUp
 Acesso em: 28 de maio de 2022.
- FREITAS, L. M. T. **Interação Matemática: A Resolução de Problemas por Meio da Geometria Plana e da Trigonometria**. São Paulo, ed. do Brasil 2020.
- GARBI, G. G. **A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática**. 5ª ed rev. E ampl. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.
- GIL, A.C. **Como Elaborar projeto de pesquisa**. 4ª ed. São Paulo. SP: Editora Atlas S.A, 2002.
- HOWARD, Eves. **Introdução à história da matemática** tradução Hygino H. Domingues. 5a ed. - Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.
- LORENZATO, S. A. **Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis**. Campinas: 2006.
- MACAULAY, D. **Construção de Uma Cidade Romana** - 1ª ed. ISBN, 1989. Disponível em:
<https://www.google.com/url?q=https://www.nrscs.net/Downloads/CITY%2520-%2520David%2520MacCauley.PDF&sa=D&source=docs&ust=1654124961571877&usg=AOvVaw0vfaHZWBW7ZoYelp5SxAQ8>> Acesso em: 24 de maio de 2022.
- MUNIZ, C. A. **Organização do Trabalho Pedagógico: Educação e Linguagem Matemática, Educação e Ciências Físicas e Biológicas**, mód. 1, v. 2, 2001. Disponível em:
<https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/222461>> Acesso em jan. 2022
- MOL, R.S. **Introdução à História da Matemática**, Belo Horizonte, CAED-UFMG, 2013. Disponível em:
https://www.mat.ufmg.br/ead/wp-content/uploads/2016/08/introducao_a_historia_da_matematica.pdf#page=20&zoom=auto,-253,167>

Acesso em: 24 de jan. 2022.

MUSEU DE TOPOGRAFIA. **Instituto de Geociências. Rio Grande do Sul**, disponível em: <http://igeo.ufrgs.br/museudetopografia/index.php/historico-da-topografia> acesso em: 03 de janeiro de 2022.

M3 MEDINA ENGENHARIA, Disponível em: <https://engm3.com/evolucao-da-topografia/> Acesso em: 28 de maio de 2022.

OSHIMA, Isabel **O Laboratório De Ensino De Matemática E A Aprendizagem Da Geometria**. 2010. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/228532915_O_laboratorio_de_ensino_de_matematica_ea_aprendizagem_da_geometria Acesso em Janeiro de 2022.

PARANAGUÁ, M. **Elementos de Geometria**. Rio de Janeiro, Typographia Austral, 1938. Disponível em: <https://www.google.com/url?q=https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/222343&sa=D&source=docs&ust=1654206704425118&usg=AOvVaw2i5piLfRvDxafSEpaKJ9v7> Acesso em jan. 2022.

RIBEIRO. J. **Ciência Linguagem e Tecnologia**, 1ª ed. Scipione, São Paulo, 2010.

SMITH,D.E. **History of Mathematics**, Vol. I, Dover publications, INC. Nova York, 1958

UNICAMP. **Modelos Terrestres**, 2014, P. 23. Disponível em: https://labtopope.webnode.com/files/200000445-3f5484051e/7_TOPOGRAFIA1_MODELOS_TERRESTRES_REV1.pdf Acesso em 24 de maio de 2022

VEIGA, L. A. K; ZANETTI, M. A. Z; FAGGION, P. L. **Fundamentos de Topografia. Apostila do curso de Engenharia Cartográfica e de Agrimensura da Universidade Federal do Paraná – UFPR**, 2012. Disponível em: https://www.google.com/url?q=http://www.cartografica.ufpr.br/docs/topo2/apos_topo.pdf&sa=D&source=docs&ust=1654124961580527&usg=AOvVaw2DTTr5Q1amAXx6TxNdYJqb5 Acesso em 24 de maio de 2022.

VEIGA, L. A K. **Fundamentos da Topografia: Engenharia Cartográfica e de Agrimensura: Universidade Federal do Paraná, UFPR**. 2012. Disponível em:

https://www.google.com/url?q=http://igeo.ufrgs.br/museudetopografia/index.php/historico-da-topografia&sa=D&source=docs&ust=1654020118952412&usg=AOvVaw1Yk7bL5eyJsU0rnZO3g_ch acesso em: 03 de janeiro de 2022.

https://www.google.com/url?q=https://www.nrcs.net/Downloads/CITY%2520-%2520David%2520MacCauley.PDF&sa=D&source=docs&ust=1654020118948724&usg=AOvVaw3ugn8rcRuY1t7kLuaU_r06 Acesso em: 03 de janeiro de 2022.

WALLIS, David A. **History of Angle Measurement** 2005