



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO
TOCANTINS

CAMPUS PALMAS

CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MIRENE DA CRUZ SILVA

RESSIGNIFICANDO AS PROPRIEDADES DE GRUPO

PALMAS

2022

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO
TOCANTINS

MIRENE DA CRUZ SILVA

RESSIGNIFICANDO AS PROPRIEDADES DE GRUPO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
à Coordenação do Curso de Licenciatura em
Matemática do Instituto Federal do Tocantins
– Campus Palmas, como exigência à obten-
ção do grau de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Wallysonn Alves de
Souza

PALMAS

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Bibliotecas do Instituto Federal do Tocantins

S586r Silva, Mirene da Cruz
RESSIGNIFICANDO AS PROPRIEDADES DE GRUPO / Mirene da
Cruz Silva. – Palmas, TO, 2022.
33 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) –
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins, Campus
Palmas, Palmas, TO, 2022.

Orientador: Wallysonn Alves Souza

1. ÁLGEBRA. 2. TEORIA DE GRUPOS. 3. ENSINO DE
MATEMÁTICA. I. Souza, Wallysonn Alves. II. Título.

CDD 510

A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio, deste documento é autorizada para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica do IFTO com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).



Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins
CAMPUS PALMAS
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

**FOLHA DE APROVAÇÃO DE TRABALHO DE CONCLUSÃO
DE CURSO DE GRADUAÇÃO**

1. **TÍTULO:** Ressignificando as Propriedades de Grupo
2. **AUTORA:** MIRENE DA CRUZ SILVA
3. **ORIENTADOR:** Prof. Doutor Wallysonn Alves de Souza

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Instituto Federal de Educação, Ciência e
Tecnologia do Tocantins, *campus* Palmas,
como parte das exigências para a conclusão
do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovado em 14/12/2022.

Prof. Dr. Wallysonn Alves de Souza
IFTO – Campus Palmas
Presidente/Orientador

Prof. Me. Edson Luiz Kraemer
IFTO – Campus Palmas
Avaliador Interno

Prof. Me. Gilmar Pires Novaes
UFT – Campus Palmas
Avaliador Externo



Documento assinado eletronicamente por **Wallysonn Alves de Souza, Servidor**, em 14/12/2022, às 18:50, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Edson Luiz Kraemer, Servidor**, em 14/12/2022, às 18:52, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **GILMAR PIRES NOVAES, Usuário Externo**, em 14/12/2022, às 19:05, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.iftto.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1835978** e o código CRC **78D42A31**.

Quadra 310 Sul, Lo 5, s/n, esquina com a Avenida NS 10 - Plano Diretor Sul — CEP 77.021-090
Palmas/TO — (63) 3236-4000
portal.iftto.edu.br — reitoria@iftto.edu.br

Ao meu pai João Barros da Silva, que nunca deixou de acreditar que a educação é o melhor caminho.

Por garantir que mesmo com todas as dificuldades e mesmo com a distância de 43 km eu nunca faltasse à escola (nem em dias de chuva).

Foi parceiro em muitos momentos difíceis, inclusive durante o período remoto em que assistia às aulas junto comigo para me incentivar.

Pelo nordestino esquentado, humilde e trabalhador que me ensinou que a Matemática está na horta, no campo, no cuidado com os animais.

Pai dedico esse trabalho a você, por me mostrar que a Matemática está em tudo.

Agradecimentos

- Agradecer primeiramente a Deus pela minha vida e por todas as oportunidades;
- À minha mãe Ana Maria que apesar de nunca ter simpatizado com a Matemática sempre me apoiou, e ao meu querido pai e amigo João Barros que nunca deixou de acreditar em mim;
- Aos meus tios Jair, Rosa, Paulo, Isabel e Ester;
- A minha irmã favorita Milena, que sempre me apoiou muito.;
- Ao professor César de Oliveira Zica, que durante o Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid) me orientou com toda paciência e respeito, sou-lhe grata por todas as lições que aprendi nesse período;
- Aos muitos amigos que fiz ao longo desses anos, Azenati, Letícia, Janeth, Estevam, Gabriel, Thais, Sr.Célio, Raquel, José Carlos, Rita, Raquel, Arthur, Janaína, Claudiana, Jodã, Lisandra, Dyana, Tayla, Frank, Eliete, Marina, Waltersio e Cleone;
- Aos meus queridos amigos Flávia Lobo, Carine Bernhard e Guilherme Guida pelo cuidado, conselhos e muitos almoços para desabafar.
- Aos meus professores do Ensino Médio, que me incentivaram a ingressar no Ensino Superior: Julia de Paula, Guilherme Carvalho, Francielle Moraes, Josenilson Vieira e Vanessa Rita. ;
- Ao professor Magno Márcio Azevedo, pelos conselhos, caronas e muitas discussões;
- Ao Professor Wallysonn Alves de Souza, por aceitar o convite de me orientar, com muita paciência, incentivo e contribuições.
- A todos os professores do Curso de Licenciatura em Matemática do IFTO, por todo o aprendizado ao longo desses anos.

MUITO OBRIGADA!

“Sabemos que todas as coisas cooperam para o bem daqueles que amam a Deus, daqueles que são chamados segundo o seu propósito”. Rom. 8:28

Resumo

Neste trabalho foi realizado uma pesquisa básica sobre a Teoria de Grupos de forma histórica, ou seja, buscamos mostrar como surgiu a Teoria de Grupos, sua definição, suas propriedades e os estudiosos que contribuíram para a sua definição. O objetivo principal deste trabalho é mostrar que é possível apresentar a Teoria de Grupos aos alunos da Licenciatura em Matemática, de tal forma que eles a associem com as propriedades estudadas na Educação Básica. A metodologia utilizada foi a pesquisa exploratória, isto é, foi tentada ampliar a compreensão de um assunto já conhecido. Inicialmente foi apresentada a definição formal de grupo e suas principais propriedades, e uma breve reflexão sobre os alunos de Licenciatura em Matemática, que ao estudarem a teoria de grupos possuem dificuldades de associá-la às propriedades de grupo, previamente estudadas no Ensino Básico. Na sequência foram abordados alguns grupos, nos quais no qual nos referimos ao longo deste trabalho como grupos importantes. Sobre as propriedades de grupo estudadas no Ensino Básico, preocupou-se em esclarecer que as propriedades de grupo, e até mesmo alguns grupos, não são uma novidade para o estudante de Licenciatura em Matemática e, também, relacionar as propriedades de grupo estudadas no Ensino Superior com exemplos apresentados comumente em livros de Matemática da Educação Básica. Desse modo, apesar de a linguagem dos livros de Ensino Superior não abordarem a Teoria de Grupos de modo que os alunos consigam fazer associações com o que já estudaram no Ensino Básico, concluímos que é possível resgatar o aprendizado das propriedades de grupo já conhecidas pelos alunos.

Palavras-chave: Álgebra. Teoria de Grupos. Ensino de Matemática.

Abstract

In this work, a study was carried out on group theory in a historical way, that is, we sought to show how group theory emerged, its definition, its properties and who were its main scholars. The main objective of this work is to show that it is possible to present group theory to Mathematics degree students, in such a way that they associate it with the properties already studied in basic education. The methodology used was exploratory research, that is, an attempt was made to broaden the understanding of an already known subject. Initially, the formal definition of a group and its main properties were presented, and a brief reflection on Mathematics degree students who, when studying group theory, have difficulties associating it with group properties, previously studied in basic education. In the sequence, some groups were approached, which we refer to throughout this work as important groups. About the group properties studied in basic education, he was concerned to clarify that group properties, and even some groups, are not new for the undergraduate student in mathematics and, also, to relate the group properties studied in teaching higher education with examples contained in basic education mathematics books. Thus, despite the language of higher education books not addressing group theory so that students can make associations with what they have already studied in basic education, we conclude that it is possible to rescue the learning of group properties already known by students.

Keywords: Algebra. Group Theory. Mathematics teaching.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Reta numérica exibindo elementos simétricos.	22
Figura 2 – Operações com zero	23
Figura 3 – Leitura de frações	24
Figura 4 – Soma de frações com mesmo denominador.	24
Figura 5 – Discussão sobre conjuntos	25
Figura 6 – Patterns	27
Figura 7 – Adivinhe as raízes	27
Figura 8 – A máquina de funções	28
Figura 9 – Polígono regular de 5 lados	29
Figura 10 – Polígono regular de 6 lados	29
Figura 11 – Simetria no triângulo equilátero	30
Figura 12 – Simetrias do triângulo	30

Sumário

1	INTRODUÇÃO	12
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	15
2.1	Grupos	17
2.1.1	Propriedades	18
2.2	Grupos Importantes	19
2.2.1	Grupo aditivo dos inteiros $\mathbb{Z}$ (comutativo)	19
2.2.2	Grupo aditivo dos racionais $\mathbb{Q}$ (comutativo)	19
2.2.3	Grupo aditivo dos Reais $\mathbb{R}$ (comutativo)	19
2.2.4	Grupo multiplicativo dos racionais $\mathbb{Q}$ (comutativo)	20
2.2.5	Grupo multiplicativo dos reais $\mathbb{R}$ (comutativo)	20
2.2.6	Grupo de simetrias do triângulo equilátero	20
2.2.7	Grupo de simetrias do quadrado	20
2.2.8	Grupo Cíclico	20
3	AS PROPRIEDADES DE GRUPOS ESTUDADAS NO ENSINO BÁSICO	22
3.0.1	Operações com números inteiros	22
3.0.2	Operações com números racionais	23
3.0.3	Operações com números reais	25
3.1	A aplicação das propriedades de grupo em sala de aula	26
3.1.1	Cubo Mágico ou Cubo de Rubik	26
3.1.2	Equações Polinomiais	26
3.1.3	Polígonos	28
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	32
	REFERÊNCIAS	33

1 Introdução

Compreender um novo assunto na Matemática muitas vezes não é uma tarefa fácil. Entender diversas propriedades, lemas, corolários e teoremas, resolver questões por meio de demonstração usando todos esses recursos pode ser muito trabalhoso e até mesmo confuso. Muitas vezes, o assunto que estudamos na Graduação e todas essas propriedades, não são novidades. A novidade é a forma na qual se apresentam nos livros. São com essas questões que este trabalho se preocupa, em especial, mostrar que as propriedades da Teoria de Grupos, e até mesmo um Grupo, são conteúdos conhecidos de forma implícita por estudantes, até mesmo, do Ensino Básico.

A Teoria de Grupos tem estado presente no cotidiano das pessoas, de diversas formas possíveis, desde a Tecnologia à Arte, como, por exemplo, nas sequências numéricas de cartão de crédito e, até mesmo, em simetrias presentes em uma obra de arte. Nunca foi tão fácil associar e aplicar definições que já foram muito complexas ao nosso dia a dia. Atualmente na Matemática um grupo é definido como um conjunto não vazio, munido de determinadas operações e também precisa ter algumas propriedades. Em Álgebra Moderna os autores [Iezzi e Domingues \(2003, p.138\)](#) definem grupo da seguinte maneira: Seja G é um conjunto não vazio e munido de uma operação:

$$\begin{aligned} * : G \times G &\mapsto G \\ (a, b) &\mapsto a * b \end{aligned}$$

em que o símbolo $*$ indica a operação sobre G . Somente essa operação não é suficiente para que o conjunto seja um grupo. Ele necessita de três propriedades: associatividade, existência de elemento neutro, elemento simétrico para cada elemento do conjunto. Esses elementos (condições) que hoje são bem descritos ao definirmos o que é um grupo, foi a causa da não aceitação da primeira definição formal de grupo, a qual discutiremos no desenvolver deste trabalho.

Encontramos facilmente a definição de grupo em vários livros de Álgebra, mas a Teoria de Grupos, para estar definida como encontramos hoje, passou por diversos estudos, discussões e demonstrações realizadas por grandes matemáticos ao longo da História. De acordo com [Soares \(2019, p.32\)](#) o italiano Scipione del Ferro (1456-1526) juntamente com outros matemáticos iniciaram estudos na tentativa de resolver equações algébricas do terceiro e quarto graus, o que não era tarefa fácil, devido ao fato de que, naquela época, não era aceitável a existência número negativo, e muito menos imaginário. Segundo [Milies \(2018\)](#), foi essencial, para se resolver uma equação a inclusão do conceito de números complexos.

Muitos outros matemáticos além de Del Ferro, Galois e Lagrange contribuíram para o desenvolvimento da Teoria de Grupos, para que hoje tivéssemos a compreensão que Grupo é um sofisticado mecanismo de organização que estuda muitas partes da Matemática e podem ir além da Álgebra. Um exemplo disso são os grupos chamados Diedrais que retrata a simetria geométrica de certas figuras.

Os grupos diedrais estão visivelmente por toda parte do cotidiano. No Ensino Básico, é comum, em gincanas de Matemática, os alunos serem desafiados a montar um cubo de Rubik, que é popularmente conhecido como cubo mágico. Se os alunos olharem com atenção, perceberão que o cubo é um poliedro com seis faces iguais, todos os seus lados são formados por quadrados, de modo que, traçando uma reta imaginária em um dos lados, obtemos uma simetria perfeita. Essas simetrias podem estar presentes no trânsito. Por exemplo, se olharmos as placas de trânsito com atenção podemos compreender algumas rotações.

Quanto mais conhecemos as propriedades e características da Teoria de Grupos, mais conseguimos perceber que estamos rodeados por elas, o que de certa forma é um privilégio para poucos. Afinal, somente no Ensino Superior estudamos grupos, ou melhor, estudamos de forma explícita esse assunto.

No Curso de Licenciatura em Matemática percebe-se que, de forma geral, o estudante não consegue associar as propriedades de grupo às propriedades matemáticas estudadas na sua Educação Básica, e isso, provavelmente, se dá pela linguagem em que essas propriedades foram apresentadas, tanto na Educação Básica quanto no ensino superior. Nesse sentido, a questão norteadora deste trabalho é: existiria uma maneira de abordar esse assunto no Ensino Superior, de tal forma que os alunos recordem essas propriedades, já estudadas no Ensino Fundamental e Médio, facilitando seu entendimento sobre grupo?

A Teoria de Grupos é um ramo da Álgebra pouco conhecido entre estudantes do Ensino Básico, porém o estudo dos grupos surgiu por meio de investigações sobre equações polinomiais, assunto esse que é bem comum entre os estudantes do Ensino Fundamental II e Ensino Médio. Porém, como afirma Soares (2019, p.90), embora os cursos de Licenciatura em Matemática preparem os professores para o exercício do magistério nos Ensinos Fundamental e Médio, em geral, nenhum dos planos de ensino das disciplinas de Álgebra, que lidam com a Teoria de Grupos, explicita qualquer relação entre a disciplina da licenciatura e a prática do futuro professor de Matemática na Escola Básica. No Ensino Básico as propriedades de grupo: associatividade, elemento neutro, elemento simétrico e/ou comutatividade, geralmente são abordadas de forma independente para darem sentido ao conteúdo ao qual elas estão associadas no momento. Dificilmente essas propriedades são abordadas em conjunto, como no Ensino Superior. No estudo de figuras espaciais, por exemplo, segundo Grimm (2016, p.30) o quadrado é uma figura cujas suas transformações espaciais (simetrias) podem ocorrer tanto no plano como no espaço e, em geral, ao ensinar

esse conteúdo o professor se atém apenas com as simetrias sem qualquer menção à Teoria de Grupos.

Outra situação que pode ocorrer é que a palavra “simetria” muitas vezes não é citada ao abordar esse conteúdo, devido ao fato de que o objetivo daquela aula é mostrar a figura no plano e no espaço, falar sobre suas características. O professor usa de recursos lúdicos desde a construção dessa figura por meio de planificação, ou mostra isso aos alunos com recursos de tecnologia, porém o conceito de simetria e das propriedades envolvidas ficam implícitos.

Dessa forma, o objetivo deste trabalho é mostrar que é possível uma abordagem, de tal forma, que os alunos recordem as propriedades estudadas na Educação Básica, ao estudar as propriedades de grupo na Licenciatura em Matemática.

O presente trabalho está dividido em capítulos e seções, seguido das considerações finais. Inicialmente, no Capítulo 1, procuramos apresentar ao leitor como a Teoria de Grupos é definida atualmente e sua presença no cotidiano. No Capítulo 2 mostramos a origem e o surgimento da Teoria de Grupos, de modo que o leitor compreenda melhor esse tema, e na sequência algumas seções mencionando alguns grupos específicos, os quais nomeamos de Grupos Importantes. No Capítulo 3, e último deste trabalho, explanamos como a Teoria de Grupos está presente na Educação Básica associando os grupos citados no capítulo anterior a conteúdos da segunda fase do Ensino Básico. Por fim, nas considerações finais, discutimos sobre a motivação deste trabalho: é possível exibir uma maneira de abordar este assunto no e Ensino superior, de tal forma que os alunos recordem e/ou o associem às propriedades e exemplos, já estudados no Ensino Fundamental?

2 Fundamentação Teórica

Em 1786 parte da comunidade matemática da época estava envolvida no estudo sobre redução de equações polinomiais. O físico italiano Paolo-Ruffini (1765-1822) foi duramente criticado por suas publicações, que envolviam a equação algébrica de quinto grau. Nesse trabalho chamado *Teoria Generale delle equazioni*, Ruffini apresentou uma série de comentários sobre a impossibilidade de equações do quinto grau ou grau mais alto serem resolvidas por radicais.

Apesar das muitas críticas, a abordagem de Ruffini chama atenção, pois, antes mesmo do termo “grupo” ser definido, de acordo com Boyer (1996), Ruffini usava em seus textos a palavra “permutação”, de modo que, mais tarde, descobriu-se que a permutação que Ruffini descrevia correspondia ao que conhecemos hoje como grupo.

Os estudos de Ruffini e do matemático Niels Henrik Abel (1802-1829) relacionados a equações polinomiais eram lidos como romance pelo arrogante jovem francês Évariste Galois (1811-1832) na prisão, além de arrogante os relatórios escolares descreviam Évariste Galois como singular, bizarro, estranho e fechado. Essa personalidade se deu pelo ceticismo da mãe e pela tragédia de suicídio do seu pai. Galois revoltado por essas muitas questões da sua vida particular, não entrou para a melhor universidade da França a École Polytechnique, porque o examinador não gostou da sua postura durante a entrevista. Concentrando-se nisso o gênio matemático foi rejeitado pela universidade. Por ter um perfil desafiador, Galois foi expulso da escola e se juntou à Artilharia da Guarda Nacional, um ramo republicano da milícia. Em 31 de dezembro de 1830, a Artilharia da Guarda Nacional foi abolida por decreto real, uma vez que o novo Rei Louis-Phillipe sentiu que era uma ameaça ao trono.

Galois, por diversas vezes escreveu trabalhos e tentou entrar na academia matemática, porém seu perfil arrogante e desafiador era muito conhecido, ao ponto de Sophie Germain escrever uma carta a um amigo preocupada com a situação de Galois, temendo que ele enlouquecesse. Em 1830, durante sua passagem pela Artilharia da Guarda Nacional Galois ameaçou o rei Louis-Phillipe o que contribuiu para sua prisão.

Na prisão, Galois descreveu várias memórias e anotações de estudos, que não eram muito claras. Ele foi o primeiro a usar o termo “grupo” e esses escritos futuramente foram publicados em Paris. E os matemáticos que possuíram esse material, dispuseram do trabalho de entender como Galois pensava para dar continuidade aos escritos de forma detalhada. Nessas anotações, mesmo que de uma forma muito técnica, ele dividiu os grupos em simples e compostos e em suas observações comentou que não existe nenhum grupo simples de qualquer ordem composta menor que 60.

A vida na prisão não foi nada fácil para Galois. Sua companhia eram os textos matemáticos, e mesmo os tendo como uma distração por muitas vezes tentou se suicidar. Em março de 1932 uma epidemia de cólera afetou Paris e os prisioneiros incluindo Galois foram transferidos de prisão. Ao receber tratamento médico Galois se apaixonou pela filha do médico residente Stephanie-Felice du Motel.

Em abril do mesmo ano saiu da prisão. Não se sabe ao certo o motivo da morte de Galois, pode ter sido por seu temperamento e desafeto político pelo rei ou mesmo por uma questão amorosa envolvendo Stephanie-Felice du Motel, de modo que Évariste participou de um duelo para desposar de Stephanie. Na noite anterior ao duelo, segundo [O'Connor e Robertson \(1996\)](#) Évariste Galois escreveu todos seus estudos, anotações e demonstrações e resultados que envolviam outros temas além de grupos, uma espécie de testamento científico no qual ele confiou a Auguste Chevalier.

Após a morte precoce de Galois em maio de 1932, Chevalier e o irmão de Galois fizeram cópias dos seus trabalhos e as enviaram a Gauss, Jacobi e outros matemáticos na esperança de que eles realizassem algum comentário sobre a obra de Galois, algo que era um desejo pessoal dele. Não há qualquer registro, na História da Matemática, de que Gauss, Jacobi ou outro matemático comentaram a obra de Galois.

Não era por acaso que Évariste Galois tinha o desejo que Gauss e Jacobi comentassem sobre seu trabalho. Na época muitos matemáticos se envolveram no estudo da Teoria de Grupos, dentre eles Felix Klein (1849-1925) e Arthur Cayley (1821-1895) duas figuras muito importantes para a divulgação do tema. Arthur Cayley foi responsável por escrever a primeira definição formal de grupo. Essa definição chamou atenção dos estudiosos do tema, mas pelo motivo de algumas “lacunas” que estavam faltando.

Felix Klein foi o responsável por apontar essas lacunas na definição de Cayley, que era a seguinte: “Um grupo é definido por meio de leis que combinam seus elementos”. A essa definição em nenhum momento Arthur Cayley teceu comentários explicando quais leis combinavam elementos, e nem que elementos eram esses. Ao apontar essas lacunas, Felix Klein, que era um admirador da Geometria Analítica voltou sua atenção para esse ramo da álgebra, reunindo grandes nomes da comunidade matemática da época para o debate e discussão sobre a Teoria de Grupos. Os escritos de Lagrange sobre grupos os entusiasmou ainda mais para continuar pesquisando e estudando esse tema.

Atualmente, sabe-se que a Teoria de grupos é bastante utilizada, como pode ser visto, por exemplo, em formatos, permutações e variações do cubo de Rubik. Porém, essas aplicações são pouco exploradas e/ou apresentadas ao ensinar a teoria. Além disso, desconhecemos trabalhos que relacionem a Teoria de Grupos à Matemática ensinada no Ensino Básico, embora os cursos de Licenciatura em Matemática preparem professores para esse nível de ensino.

Como citado anteriormente, podemos perceber que esse ramo da matemática está presente no cotidiano, sendo que, dentre todos os grupos o mais perceptível são os grupos diedrais, também conhecidos como grupos de simetrias. Para [Vieira \(2011, p. 33\)](#), “Simetria é um conceito bastante intuitivo para todos. De fato, ela está relacionado até com o conceito de beleza, ou seja, que algo é considerado belo se ele é, em geral, bastante simétrico.”

Contudo, embora a Teoria de Grupos esteja presente em toda Matemática, desde a Educação Básica até as disciplinas do Curso de Licenciatura em Matemática, também, nas artes ou no trânsito, enfim, no nosso cotidiano, muitas vezes ela passa despercebida por estudantes e docentes que conhecem a Teoria de Grupos. Nesse sentido, este trabalho vem tentar evidenciar e/ou relacionar as propriedades de grupos, apresentadas na Graduação, com as suas propriedades matemáticas estudadas na Educação Básica.

2.1 Grupos

Nesta seção, serão apresentadas a definição de grupo e suas principais propriedades, da maneira em que, normalmente, são abordadas nos cursos de Licenciatura em Matemática.

Definição 1 *Seja G um conjunto não vazio onde está definido uma operação entre seus pares, denotada e dada por,*

$$\begin{aligned} * : G \times G &\rightarrow G \\ (x, y) &\mapsto x * y \end{aligned} \tag{2.1}$$

Diz-se que o par $(G, *)$ é um grupo se são válidas as seguintes propriedades:

- i) **Associatividade:** $(a * b) * c = a * (b * c)$, para quaisquer que sejam $a, b, c \in G$.
- ii) **Existência de elemento neutro:** Existe um elemento neutro $e \in G$, tal que $a * e = e * a = a$, para qualquer que seja $a \in G$.
- iii) **Existência de simétricos:** Para todo $a \in G$ existe um elemento $a' \in G$, tal que, $a' * a = a' * a = e$.

Observação 1

- i) *Se no grupo houver comutatividade, ou seja, $a * b = b * a$, esse grupo será chamado de **comutativo ou grupo abeliano** (referência ao matemático norueguês Niels H. Abel (1802-1829)).*
- ii) *Outra maneira de nos referirmos a um grupo $(G, *)$ é dizer que G tem uma estrutura de grupo em relação à operação $*$.*

2.1.1 Propriedades

Na teoria de grupos, as operações desfrutam de cinco propriedades básicas. Seja G um grupo e a, b e $c \in G$:

- 1) O elemento neutro é único.

Suponhamos que e e e' sejam elementos neutros de G , isto é, $a * e = e' * a = a$, $\forall a \in G$. Logo,

$$\begin{aligned} e &= e * e' \quad (\text{pois } e' \text{ é elemento neutro de } G) \\ &= e' \quad (\text{pois } e \text{ é elemento neutro de } G) \end{aligned}$$

- 2) O elemento inverso é único.

Suponhamos que a' e a'' sejam inversos de $a \in G$, isto é, $a * a' = a' * a = e$ e $a * a'' = a'' * a = e$, onde e é um elemento neutro de G . Logo:

$$\begin{aligned} a'' &= e * a'' \\ &= (a' * a) * a'' \\ &= a' * (a * a'') \\ &= a' * e \\ &= a'. \end{aligned}$$

Dessa forma, $a'' = a'$ e, portanto, o elemento inverso de $a \in G$ é único.

- 3) A equação $a * x = b$ admite uma única solução em G , a saber, $x = a^{-1} * b$, sendo $a^{-1} = a'$.

$$a * x = b \Rightarrow a^{-1} * a * x = a^{-1} * b \Rightarrow x = a^{-1} * b.$$

- 4) Se G é um grupo, então $(a * b)' = b' * a'$. Notamos que basta mostrar que $(a * b) * (b' * a') = e$. Assim,

$$\begin{aligned} (a * b) * (b' * a') &= a * (b * b') * a' \\ &= a * e * a' \\ &= a * a' \\ &= e \end{aligned}$$

- 5) Lei do cancelamento.

Se $a * b = a * c$, então $b = c$ ou se $b * a = c * a$, $b = c$. De fato, admitindo que $a * b = a * c$ e multiplicando a igualdade por a' , temos:

$$a' * (a * b) = a' * (a * c)$$

$$\begin{aligned}(a' * a) * b &= (a' * a) * c \\ e * b &= e * c\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que $b = c$.

2.2 Grupos Importantes

Nesta seção serão citados alguns grupos importantes de acordo com [Iezzi e Domingues \(2003\)](#), para o desenvolvimento deste trabalho, grupos estes que serão trabalhados no Capítulo 3, no qual mostraremos que tais grupos estão presentes, em alguns, conteúdos de Matemática trabalhados no Ensino Básico.

2.2.1 Grupo aditivo dos inteiros $\mathbb{Z}$ (comutativo)

Considere o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ com a operação usual de adição (+), isto é,

$$\begin{aligned}+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (x, y) &\mapsto x + y\end{aligned}\tag{2.2}$$

Pode-se provar que $(\mathbb{Z}, +)$ é um grupo.

No conjunto dos números inteiros, a adição usual é uma operação importante, com isso as propriedades comuns nesse conjunto são associativa e comutativa, além de que há um elemento neutro para essa operação (número 0) e um elemento oposto $-a$, em que $-a \in \mathbb{Z}$.

2.2.2 Grupo aditivo dos racionais $\mathbb{Q}$ (comutativo)

Considere o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ com a operação usual de adição (+), isto é,

$$\begin{aligned}+ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} &\rightarrow \mathbb{Q} \\ (x, y) &\mapsto x + y\end{aligned}\tag{2.3}$$

Pode-se provar que $(\mathbb{Q}, +)$ é um grupo.

Usualmente no conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$, as mesmas propriedades que valem para o grupo aditivo dos números inteiros valem para este grupo.

2.2.3 Grupo aditivo dos Reais $\mathbb{R}$ (comutativo)

No conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, utilizando a adição usual, são válidas as propriedades associativa, comutativa, existências de elemento neutro e elemento simétrico.

$$\begin{aligned}+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x + y\end{aligned}\tag{2.4}$$

Pode-se provar que $(\mathbb{R}, +)$ é um grupo, com operação usual de adição.

2.2.4 Grupo multiplicativo dos racionais $\mathbb{Q}$ (comutativo)

Seja o conjunto dos números racionais não nulos representados por $\mathbb{Q}^*$. O conjunto $\mathbb{Q}^*$ será fechado em relação à multiplicação, o que isso quer dizer que o produto de dois números racionais não nulos sempre será um número racional não nulo.

Seja o produto dos números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, em que $b \neq 0$ e $d \neq 0$.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Como a e c não são nulos, essa divisão jamais será zero. Portanto, fica provado que a multiplicação é fechada em $\mathbb{Q}^*$. Além disso, podemos perceber que a multiplicação usual é associativa, 1 é o elemento neutro da multiplicação e que para todo $a \in \mathbb{Q}^*$, $a \neq 0$, existe o seu elemento simétrico que é a' ; a' pode ser denotado por a^{-1} .

2.2.5 Grupo multiplicativo dos reais $\mathbb{R}$ (comutativo)

O sistema formado por $\mathbb{R}^*$ e a multiplicação usual sobre esse conjunto. O motivo é o mesmo do item anterior.

2.2.6 Grupo de simetrias do triângulo equilátero

De acordo com [Iezzi e Domingues \(2003, p.149\)](#) um triângulo equilátero T é simétrico quando existe uma aplicação bijetora (injetora e também sobrejetora) $f : T \mapsto T$ que preserva distâncias. Se existem dois pontos a e b arbitrário do triângulo então a distância de $f(a)$ a $f(b)$ é igual a distância de a a b .

2.2.7 Grupo de simetrias do quadrado

Segundo [Iezzi e Domingues \(2003, p.150\)](#) denomina-se simetria em um quadrado Q uma aplicação bijetora $f : Q \mapsto Q$ que preserva distâncias. Quando falamos sobre preservar as distâncias significa que se a e b são pontos arbitrários, então a distância de $f(a)$ a $f(b)$ é igual à distância de a a b tal como no caso do triângulo.

2.2.8 Grupo Cíclico

Definição 2 *Seja G um grupo multiplicativo. Se $a \in G$ e m é um número inteiro a potência m – ésima de a , ou potência de a de expoente m é o elemento de G denotado por a^m e definido da seguinte maneira:*

- Se $m \geq 0$, por recorrência da seguinte forma:

$$a^0 = e(\text{elemento neutro de } G)$$

$$a^m = a^{m-1}a, \text{ se } m \geq 1.$$

- Se $m < 0$ então: $a^m = (a^{-m})^{-1}$.

A definição por recorrência no caso $m \geq 0$ deve ser interpretada da seguinte maneira:

$$a^1 = a^{1-1} \cdot a = a^0 a = ea = a.$$

$$a^0 = e (\text{elemento neutro de } G)$$

$$a^m = a^{m-1}a, \text{ se } m \geq 1.$$

Se $m < 0$ então: $a^m = (a^{-m})^{-1}$.

$$a^1 = a^{1-1} = a^0 a = ea = a.$$

Como consequência imediata dessa definição, temos que, para todo inteiro m vale $e^m = e$.

Neste capítulo podemos constatar a linguagem e a forma com as quais a Teoria de Grupos é apresentada aos estudantes do Ensino Superior, o que pode muitas vezes dificultar que os estudantes percebam que o assunto a ser estudado não é um conteúdo novo. São diversas propriedades que ele já conhece, porém estão agrupadas e demonstradas algebricamente, e, ao analisar próximo capítulo podemos comparar e constatar que não é a maneira usual (para o aluno) a forma com que esses assuntos são apresentados no Ensino Básico.

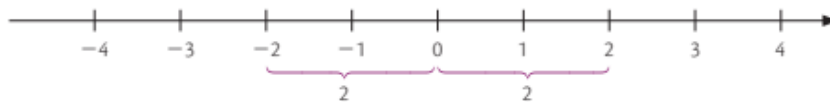
3 As propriedades de grupos estudadas no ensino básico

O objetivo deste capítulo é mostrar que os grupos apresentados no capítulo anterior, assim como suas propriedades, estão presentes na Matemática trabalhada no Ensino Básico. Dessa forma, tomou-se como parâmetro para exemplificar tais fatos a coleção de livros didáticos utilizada na rede pública de ensino *Praticando Matemática*, de Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos ([ANDRINI; VASCONCELLOS, 2015a](#); [ANDRINI; VASCONCELLOS, 2015b](#); [ANDRINI; VASCONCELLOS, 2015c](#); [ANDRINI; VASCONCELLOS, 2015d](#)), uma vez que as fases da Educação Básica no Brasil são norteadas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Logo, os livros dessa fase têm os mesmos conteúdos, ou melhor, devem apresentar as mesmas habilidades e competências e, portanto, o que muda é apenas a abordagem do autor.

3.0.1 Operações com números inteiros

No Ensino Fundamental II, as turmas do 7º ano possuem seu primeiro contato amplo com o conjunto dos números inteiros. Os autores apresentam em seu livro os números inteiros como parte do terceiro capítulo. É apresentado aos alunos como forma de diálogo sobre onde encontramos os números inteiros e assim intuitivamente os alunos compreenderem a ideia de como esse conjunto é formado. Na sequência, é apresentada a localização dos números inteiros na reta numérica destacando os elementos simétricos, como pode ser visto na Figura 1.

Figura 1 – Reta numérica exibindo elementos simétricos.



Fonte: ([ANDRINI; VASCONCELLOS, 2015b](#), p. 63)

Assim, os autores deixam claro que para cada número inteiro a , existe o seu inverso $-a$, como pode ser visto na Figura 1. Durante os exercícios os alunos compreendem que é possível realizar operações com números inteiros que envolvem associatividade. No caso de soma em $\mathbb{Z}$ quando um dos algarismos é 0, após muitas resoluções, os alunos compreendem que o 0 é elemento neutro nesse conjunto.

Observemos a Figura 2 .

Figura 2 – Operações com zero



Fonte: (ANDRINI; VASCONCELLOS, 2015b, p. 65)

Quando é apresentada a operação de multiplicação, os alunos já entendem como uma regra, que 0 multiplicado por qualquer número é ele mesmo. Todas as propriedades de grupo foram apresentadas a esses alunos de 7º ano, porém, eles dificilmente saberão que o conjunto dos números inteiros é um grupo se considerarmos a adição, e essa informação permanece implícita.

3.0.2 Operações com números racionais

O conceito de número racional é, muitas vezes, apresentada aos alunos como: “números racionais são números que podem ser escritos em forma de fração”, de modo que os alunos automaticamente fixam essa frase como: números racionais são frações. As frações são apresentadas aos alunos ainda no Ensino Fundamental I. No Ensino Fundamental II, no 6º ano os alunos continuam tendo contato com esse conteúdo, porém nessa fase, as frações se apresentam por meio de situações-problema.

Os autores apresentam fração a primeiro momento como “Inteiro e parte do inteiro”. A preocupação dos autores, de início, é que os alunos consigam realizar a leitura de uma fração, assim como ilustra a Figura 3.

Na sequência os autores preparam os alunos mostrando frações equivalentes e

Figura 3 – Leitura de frações

Denominador quer dizer “aquele que dá nome”. É o denominador que dá nome à fração.

- ♦ As frações de denominador 2 são os meios.
- ♦ As frações de denominador 3 são os terços.

Prosseguindo:

- ♦ denominador 4 → quartos
- ♦ denominador 5 → quintos
- ♦ denominador 6 → sextos
- ♦ denominador 7 → sétimos
- ♦ denominador 8 → oitavos
- ♦ denominador 9 → nonos

Fração	Leitura
$\frac{1}{2}$	um meio
$\frac{2}{3}$	dois terços
$\frac{2}{5}$	dois quintos
$\frac{5}{9}$	cinco nonos
$\frac{7}{8}$	sete oitavos

Fonte: (ANDRINI; VASCONCELLOS, 2015a, p. 178)

diversas situações em que o estudante relaciona frações com atividades do dia. Após todo esse entendimento é apresentado a soma de duas ou mais frações. Neste momento em que o estudante se depara com a soma de frações com mesmo denominador, rapidamente a associa com a soma de dois números inteiros positivos.

Figura 4 – Soma de frações com mesmo denominador.

Adição e subtração de frações de denominadores iguais

Dividi uma cartolina em oito partes iguais. Ontem pintei três partes de verde e hoje, duas de laranja.

- ♦ Que fração da cartolina toda eu já pintei?
- ♦ Que fração da cartolina toda falta pintar?

Observe:

cartolina toda → $\frac{8}{8}$
 fração pintada ontem → $\frac{3}{8}$
 fração pintada hoje → $\frac{2}{8}$

$$\text{Fração da cartolina já pintada: } \frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}.$$

$$\text{Resta pintar } \frac{8}{8} - \frac{5}{8} = \frac{3}{8} \text{ da cartolina.}$$



Fonte: (ANDRINI; VASCONCELLOS, 2015a, p. 191)

Podemos observar na Figura 4 que no processo de subtração de frações com mesmo denominador, alguns alunos realizam o mesmo processo de soma de inteiros negativos, porém com outros (tipo de) números, e no processo temos uma fração positiva e uma fração oposta (negativa), o que parece nem sempre ser o mesmo caso. Neste caso percebemos a presença do simétrico, além de que podemos usar associatividade neste tipo de operação, e novamente os alunos implicitamente usam as propriedades de grupo, para realizar as atividades.

3.0.3 Operações com números reais

Quais são os números reais? Muitas pessoas podem pensar a princípio: são todos os naturais, inteiros e racionais. Esse pensamento não está errado, porém, não é somente isso. Durante o 8º ano do Ensino Fundamental os alunos iniciam seus estudos com operações de números reais.

Ao iniciarem os estudos sobre números reais, é possível perceber que os racionais podem ser parte dos reais, assim como também as raízes quadradas e até mesmo o número π . Os autores resolveram abordar isso de uma forma muito didática usando uma história ilustrada sobre amigos conversando sobre os conjuntos, como pode ser visto na Figura 5.

Figura 5 – Discussão sobre conjuntos



Fonte: (ANDRINI; VASCONCELLOS, 2015c, p. 28)

Conhecer bem o conjunto garante que os alunos compreendam qual propriedade deve ser usada para resolução de determinados problemas. Além disso, os autores apresentam uma tabela detalhada de como algumas propriedades se comportam na adição e na multiplicação.

Algumas discussões são possíveis para que os alunos compreendam as propriedades de maneira vasta, por meio de alguns questionamentos, tais como: O que é necessário para que um produto seja igual a zero? Qual é o único número real que não tem simétrico? Que número somado a $-\sqrt{7}$ resulta em zero? Após essa abordagem os autores trás uma série de exercícios para que os alunos façam uso das propriedades mencionadas anteriormente e fixem esse conhecimento.

3.1 A aplicação das propriedades de grupo em sala de aula

Na seção anterior, mostramos que, ao serem expostos ao conceito de conjuntos numéricos os alunos têm contato com alguns grupos e suas propriedades. Nesta seção mostraremos algumas atividades relacionadas a a esses conjuntos numéricos que os alunos desenvolvem devido ao fato de compreenderem as propriedades de grupo.

3.1.1 Cubo Mágico ou Cubo de Rubik

As escolas geralmente desenvolvem gincanas competitivas entre os alunos, com a intenção de que eles se divirtam, mas também aprendam a atividade para vencer durante as rodadas. O cubo mágico é famoso por ser usado nessas competições, inicialmente o cubo mágico foi criado por uma necessidade de os alunos de Arquitetura compreender o conceito tridimensional. O professor Ernő Rubik(1944-) o construiu de madeira com as faces divididas em nove cubinhos e cada face de cada cor.

Rubik após construir esse recurso para seus alunos demorou cerca de um mês para resolvê-lo e deixa-lo na sua formação inicial. Não era sua intenção criar um quebra cabeça, porém, o cubo mágico fez tanto sucesso que ganhou um prêmio ainda no seu ano de criação 1974 como melhor brinquedo/jogo alemão (GRIMM, 2016, p.16).

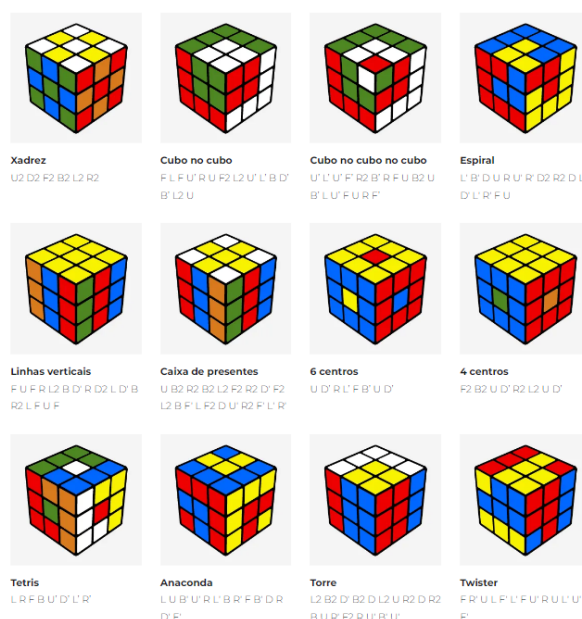
Desde então o cubo mágico é um sucesso entre as crianças, e explorá-lo nas aulas de matemática e em gincanas é proveitoso pelo entretenimento e disputa de quem consegue resolvê-lo em menor tempo. Os patterns são padrões que tornam a competição do cubo mágico em um nível desafiador. Eles têm como uma regra montar um dos padrões (xadrez, cubo no cubo, Cubo no cubo no cubo, espiral, caixa de presente, seis centros, quatro centros tetris, anaconda, torre e twister) sempre partindo dele montado, como pode ser visto na Figura 6.

3.1.2 Equações Polinomiais

Na introdução deste trabalho, discutimos que um marco no início da Teoria de Grupos foram os estudos e tentativas de resolver equações algébricas do terceiro e quarto graus. No Ensino Básico os alunos do 6º ao 9º anos tem contato com equações polinomiais, podemos dizer que muito mais simples, são elas do 1º e 2º graus, as quais essas equações são exploradas até o Ensino Médio.

Os autores (ANDRINI; VASCONCELLOS, 2015d) iniciaram a unidade sobre funções, falando sobre algumas das suas aplicações no dia a dia. Ao ler o capítulo os estudantes entendem que diversos problemas diários podem ser representados por essas equações. Uma brincadeira muito comum entre os estudantes chamada: O que é o que é, retratada no livro como uma adivinhação das raízes de uma equação polinomial de grau 2. Se formos analisar a fundo, algumas raízes da equação polinomial do 2º grau fariam parte

Figura 6 – Patterns



Fonte: (CERP, 2019, p. 1)

de um polinômio simétrico, conceito esse que não iremos abordar, pois, ao longo deste trabalho, não falamos sobre isomorfismo de grupos.

Figura 7 – Adivinhe as raízes



Fonte: (ANDRINI; VASCONCELLOS, 2015d, p. 45)

Ao observarem esse diálogo os alunos irão continuar a leitura e perceberem que

Figura 8 – A máquina de funções



Fonte: (ANDRINI; VASCONCELLOS, 2015d, p. 99)

o problema na Figura 7 tem uma solução, pela lei do anulamento do produto. As equações polinomiais do 1º grau também são apresentadas nesse livro, porém seu maior foco é que os alunos compreendam domínio e imagem, uma necessidade dessa fase escolar, devido ao que isso as evidências e propriedades de grupo tornam-se ainda mais implícitas.

O método de brincar ou competir faz muito sucesso nas aulas de Matemática, uma vez que os alunos precisam se concentrar para aprender e além disso se interessar pelo assunto a ser estudado. A ideia de brincar de máquina é uma abordagem que (ANDRINI; VASCONCELLOS, 2015d) encontraram para introduzir conceito de equação polinomial do 1º grau. A ideia de máquina é que os alunos a relacionem com função, de modo que, ao entrar um número e passar pelo processo que é (triplicar e somar dois), o produto final seja totalmente diferente do número que iniciou o processo, como os autores abordam na Figura 8.

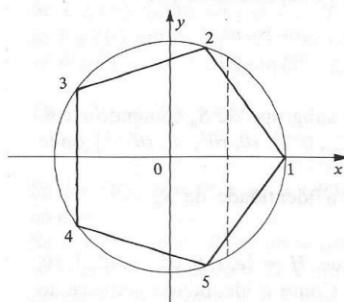
3.1.3 Polígonos

Ao longo da Educação Básica os alunos têm contato com a Geometria. Eles estudam figuras como triângulo e quadrado desde Educação Infantil. Ao chegarem ao Fundamental II (6º ao 9ºano) é introduzido o conceito de polígono e seus respectivos nomes dependendo da quantidade de lados.

Nesse conteúdo, de modo implícito existe um grupo, o grupo de permutações, no qual os alunos têm contato no momento da resolução dos exercícios, quando utilizam régua e compasso para desenhar um polígono inscrito em uma circunferência.

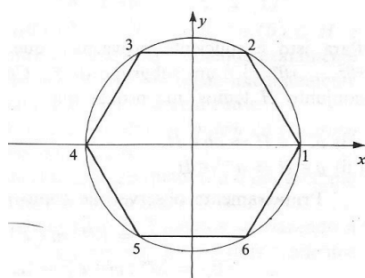
Considere o exemplo apresentado por [Gonçalves \(2017, p.129\)](#): seja $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, $n \geq 3$, o conjunto de vértices de um polígono regular de n lados. Vejamos os casos $n = 5$ e $n = 6$ ilustrados nas Figuras 9 e 10.

Figura 9 – Polígono regular de 5 lados



Fonte: ([GONÇALVES, 2017](#), p. 129)

Figura 10 – Polígono regular de 6 lados



Fonte: ([GONÇALVES, 2017](#), p. 129)

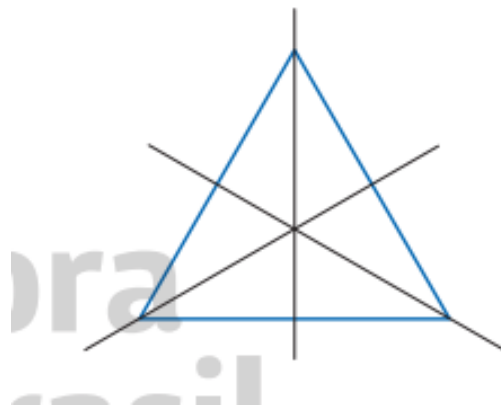
Na unidade 10 [Andrini e Vasconcellos \(2015a\)](#) preparam os alunos para conseguirem interpretar perfeitamente o exemplo citado anteriormente. Nesse capítulo os autores abordam os conceitos de circunferência, de polígonos e suas propriedades, ou seja, o mesmo conteúdo que é abordado no Ensino Básico é, também, abordado no Ensino Superior: o que muda é a habilidade que os alunos precisam desenvolver em cada uma dessas fases, e vale ressaltar que os alunos do Ensino Básico não conhecem o conceito de permutação envolvido na resolução de um exercício como esse, quando os alunos de Ensino Superior o conhecem muito bem, pois, no texto de [Gonçalves \(2017, p.129\)](#) diferentemente daquele de Andrini fica explícito o que é uma permutação.

Durante os estudos da mesma unidade [Andrini e Vasconcellos \(2015a, p.171\)](#) sugerem que os alunos compreendam a simetria dos polígonos usando dobraduras. Como exemplo, eles mostram como os alunos realizariam, no caso do triângulo, e incentivam os alunos a realizarem em outros polígonos. O que podemos observar desse exemplo que a

imagem ilustrativa para o aluno é idêntica as imagens que [Iezzi e Domingues \(2003, p.149\)](#) usam em seu livro para explicar as simetrias de um triângulo equilátero.

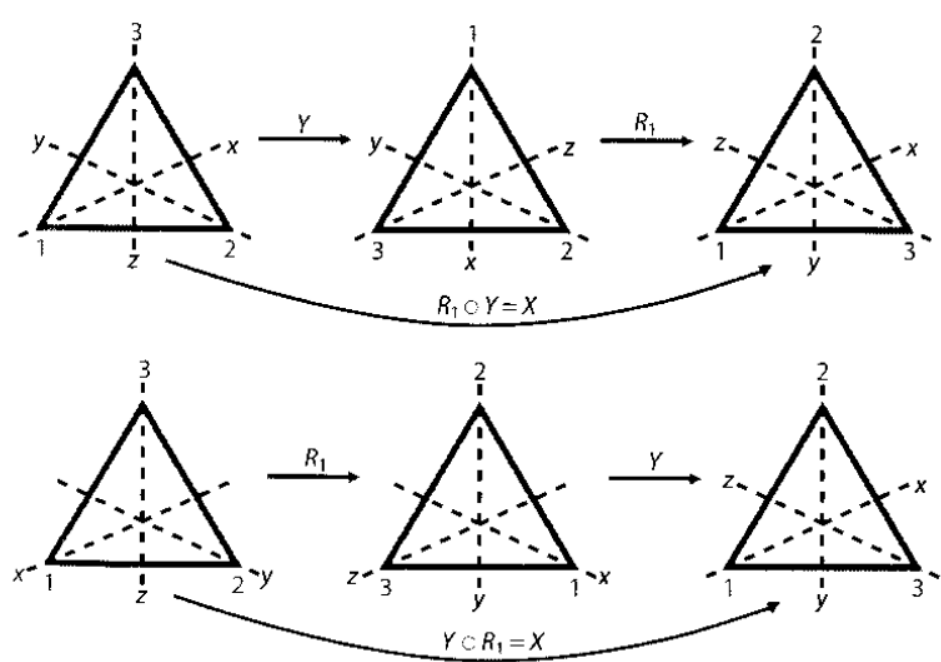
Figura 11 – Simetria no triângulo equilátero

Pegue o triângulo equilátero.
Ele apresenta três eixos de simetria.
Veja abaixo como fazer as dobras.



Fonte: ([ANDRINI; VASCONCELLOS, 2015a](#), p. 171)

Figura 12 – Simetrias do triângulo



Fonte: ([IEZZI; DOMINGUES, 2003](#), p. 149)

Nos itens citados ao longo deste capítulo podemos observar que os livros de Ensino Superior geralmente abordam as propriedades e a própria Teoria de Grupos

sem realizar alguma ligação com elementos do Ensino Básico, isso se deve ao fato que durante o ensino superior, os polígonos são estudados do ponto de vista dinâmico, no ensino fundamental e médio do ponto de vista estático, algo que dificulta a para os alunos as associações sobre esse tema, e como consequência disso, os alunos do Curso de Graduação em Matemática estudam esse assunto como se fosse um tema inédito, dificultando associações e até mesmo relembrar exemplos que facilitariam a resolução de determinados exercícios sobre a Teoria de Grupos.

4 Considerações Finais

Uma vez que o interesse pelo tema surgiu dentro da trajetória acadêmica no curso de Licenciatura em Matemática do IFTO-Campus Palmas, realizamos um estudo sobre Teoria de Grupos de forma exploratória, com objetivo de aumentar a compreensão sobre o assunto. Durante esse trabalho não buscamos nenhuma fonte estatística de dados. Todo o procedimento de investigação foi realizado por meio de pesquisa bibliográfica.

Com intenção de atender ao objetivo da pesquisa: É possível exibir maneira de abordar este assunto no Ensino Superior, de tal forma que os alunos recordem e/ou o associem às propriedades e exemplos, já estudados no Ensino Fundamental? buscamos mostrar correspondências entre os conteúdos apresentados nos livros do Ensino Básico e os mesmos conteúdos em livros do Ensino Superior.

Durante as investigações foi possível constatar, inclusive por meio de ilustrações, a semelhança entre os conteúdos. Uma das diferenças que podemos destacar é que, no Ensino Superior, os alunos ao estudarem Teoria de Grupos, são familiarizados com técnicas de demonstração e, conseqüentemente conseguem compreender as definições como são apresentadas, tornando assim o objetivo de estudo diferente daquele do Ensino Básico. Outra diferença é que, apesar de que, no Ensino Básico, os alunos tem contato com as propriedades de grupo e até mesmo com alguns grupos, a habilidade a ser desenvolvida não é a mesma do Ensino Superior. Essa pode ser uma das muitas razões pelas quais a Teoria de Grupos é estudada/apresentada de forma implícita nessa fase de ensino.

Entretanto os livros de Ensino Superior que abordam essa temática sobre a Teoria de Grupos, não fazem associação ao conteúdo e exemplos do Ensino Básico. Assim, é importante que o professor induza os alunos a resgatar esses conhecimentos adquiridos no Ensino Básico, para que eles se sintam familiarizados com o tema, e também que compreendam a importância de estudar a Teoria de Grupos para, futuramente, desenvolverem seu papel como professores no Ensino Básico.

Portanto, podemos concluir que apesar de que a Teoria de Grupos se apresenta de forma explícita somente no Ensino Superior, os alunos podem sim recordar as suas propriedades, exemplos estudados no Ensino Básico e associá-los a definições elaboradas que se estudam no Ensino Superior, garantindo assim uma boa performance para a resolução de exercícios e compreensão do assunto.

Referências

- ANDRINI Álvaro; VASCONCELLOS, M. J. *Praticando Matemática*. 4. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2015. v. 6.
- ANDRINI Álvaro; VASCONCELLOS, M. J. *Praticando Matemática*. 4. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2015. v. 7.
- ANDRINI Álvaro; VASCONCELLOS, M. J. *Praticando Matemática*. 4. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2015. v. 8.
- ANDRINI Álvaro; VASCONCELLOS, M. J. *Praticando Matemática*. 4. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2015. v. 9.
- BOYER, C. B. *História da matemática*. 1. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.
- CERP, R. *Patterns*. 2019. Disponível em: <<https://cubovelocidade.com.br/curiosidade/patterns-padroes-desenhos-cubo-magico/>>. Acesso em: 9 dez. 2022.
- GONÇALVES, A. *Introdução á Álgebra*. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.
- GRIMM, L. G. H. M. *Cubo Mágico: Propriedades e Resoluções envolvendo Álgebra e Teoria de Grupos*. 2016. 83 f. Tese (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional- PROFMAT) — Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2016.
- IEZZI, G.; DOMINGUES, H. H. *Álgebra Moderna*. 4. ed. São Paulo: Atual, 2003.
- MILIES, C. P. *Breve História da Álgebra Abstrata*. 2018. Disponível em: <<http://www.bienasbm.ufba.br/M18.pdf>>. Acesso em: 9 dez. 2022.
- O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. *Évariste Galois*. 1996. Disponível em: <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Galois/>>. Acesso em: 9 dez. 2022.
- SOARES, N. C. *O ensino de teoria de grupos nos cursos de licenciatura em Matemática*. 2019. 100 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2019.
- VIEIRA, B. G. de M. *Teoria de grupos aplicada às propriedades de simetria dos nanotubos de carbono*. 2011. 86 f. Monografia (Bacharelado em Física) — Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2011.