



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO
TOCANTINS
CAMPUS PALMAS
CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

MATEUS ALVES DE SOUSA

UM ESTUDO SOBRE ANÁLISE FUNCIONAL

**PALMAS
2021**

MATEUS ALVES DE SOUSA

UM ESTUDO SOBRE ANÁLISE FUNCIONAL

Trabalho de conclusão de curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins - *Campus* Palmas, como exigência à obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Edson Luiz Kraemer

PALMAS

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Bibliotecas do Instituto Federal do Tocantins

S725e Sousa, Mateus Alves de
 Um estudo sobre Análise Funcional / Mateus Alves de Sousa. – Palmas,
 TO, 2021.
 145 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) –
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins, Campus
Palmas, Palmas, TO, 2021.

Orientador: Me. Edson Luiz Kraemer

1. Análise Funcional. 2. Espaços de Banach. 3. Espaços de Hilbert. I.
Kraemer, Edson Luiz. II. Título.

CDD 510

A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio, deste documento é autorizada para fins de estudo e
pesquisa, desde que citada a fonte.

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica do IFTO com os dados fornecidos pelo(a)
autor(a).

MATEUS ALVES DE SOUSA

UM ESTUDO SOBRE ANÁLISE FUNCIONAL

Trabalho de conclusão de curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins - *Campus* Palmas, como exigência à obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Aprovado em ____/____/____

BANCA AVALIADORA

Prof. Me. Edson Luiz Kraemer (orientador)
IFTO - *Campus* Palmas

Prof. Me. Ademar Paulo Junior
IFTO - *Campus* Palmas

Prof. Dr. Wallysonn Alves de Souza
IFTO - *Campus* Palmas

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, a Deus, que fez com que meus objetivos fossem alcançados, durante todos os meus anos de estudo. Em segundo, agradeço aos meus pais, Maria Eliene Alves de Sousa e Manoel Félix de Sousa, pelo apoio e incentivo que serviram de alicerce para as minhas realizações e também aos meus irmãos, que me incentivaram nos momentos difíceis e compreenderam a minha ausência enquanto eu me dedicava à realização deste trabalho.

Agradeço aos professores, pelas correções e ensinamentos que me permitiram apresentar um melhor desempenho no meu processo de formação profissional ao longo do curso. Agradeço à minha noiva Emanuelle Felizardo da Silva Barboza por estar ao meu lado em todos os momentos, principalmente nos mais difíceis, sempre me apoiando e me incentivando.

Sou grato também a todos que participaram, direta ou indiretamente do desenvolvimento deste trabalho de pesquisa, enriquecendo o meu processo de aprendizado. Deixo um agradecimento especial ao meu orientador pelo incentivo e pela dedicação do seu escasso tempo ao meu projeto de pesquisa, em que me propôs estudar um tema que me fez perceber que eu estava fazendo o certo em estar cursando Matemática. Aos meus colegas de curso, com quem convivi intensamente durante os últimos anos, pelo companheirismo e pela troca de experiências que me permitiram crescer não só como pessoa, mas também como formando.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins, que foi essencial no meu processo de formação profissional, pela dedicação, pelas oportunidades, e por tudo o que aprendi e conquistei ao longo dos anos do curso. A quem não mencionei, mas estive junto eu prometo reconhecer essa proximidade, ajuda e incentivo todos os dias da minha vida.

RESUMO

O presente trabalho, tem o principal objetivo abordar os conteúdos de Análise Funcional, que é um estudo de espaços de funções, sobretudo, os espaços de dimensão infinita. Neste trabalho foram abordados os principais conceitos de Análise Funcional, como os Espaços de Banach, Espaços de Hilbert, Espaços Dual, Operadores Adjuntos e Operadores Compactos. Tais conteúdos são os mais recentes da matemática, estando na área da matemática moderna. É o campo da matemática, mais especificamente da análise, que aborda o estudo de espaços de funções. Ademais, a Análise Funcional teve seu grande reconhecimento e avanço durante o século XX através da modelagem, devida a John von Neumann, com a mecânica quântica em espaços de Hilbert. E assim, apresentar uma aplicação da Análise Funcional no ramo da Física, através, principalmente, dos Espaços de Banach e os Espaços de Hilbert. Tal aplicação mostra o quão importante é o estudo da Análise Funcional, pois, nela mostra que os espaços de Banach e de Hilbert são os alicerces da mecânica clássica e da mecânica quântica.

Palavras-chave: Análise Funcional, Espaços de Banach, Espaços de Hilbert.

ABSTRACT

The present work, has the main objective to address the contents of Functional Analysis, which is a study of function spaces, especially spaces of infinite dimension. In this work the main concepts of Functional Analysis were addressed, such as Banach Spaces, Hilbert Spaces, Dual Spaces, Adjoint Operators and Compact Operators. Such content is one of the most recent in mathematics, being in the field of modern mathematics. It is the field of mathematics, more specifically analysis, that deals with the study of function spaces. Furthermore, Functional Analysis had its great recognition and advancement during the 20th century through modeling, due to John von Neumann, with quantum mechanics in Hilbert spaces. And so, to present an application of Functional Analysis in the field of Physics, mainly through Banach spaces and Hilbert spaces. Such application shows how important the study of Functional Analysis is, because it shows that Banach and Hilbert spaces are the foundations of classical mechanics and quantum mechanics.

Keywords: Functional Analysis, Banach spaces, Hilbert spaces.

Sumário

Introdução	9
1 Espaços de Banach e Hilbert	11
1.1 Espaços Vetoriais	11
1.2 Espaços Vetoriais Normados	18
1.3 Geometria e Topologia de um Espaço Normado	21
1.4 Espaços com Produto Interno	28
1.5 Operadores Lineares Limitados	31
1.6 Espaços de Banach	36
1.7 Normas Equivalentes - Elementos de Teoria de Aproximação em Espaços Normados	43
1.8 Complemento de um Espaço Normado - Integral de Lebesgue	49
1.9 Espaço de Hilbert, Espaços de Sobolev e Derivadas Generalizadas	57
1.10 Ortogonalidade e Projeções	61
1.11 Bases Ortogonais e Séries de Fourier em Espaços de Hilbert	66
2 Operadores Lineares	74
2.1 Operadores Lineares Limitados	74
2.2 Teorema de Banach-Steinhaus	76
2.3 Operadores Inversos	82
2.4 Teorema de Banach Sobre Mapeamento Aberto e Gráfico Fechado	87
3 Espaços Dual e Operadores Adjuntos	93
3.1 Espaço Dual	93
3.2 O Teorema de Hahn-Banach	98
3.3 Espaços Reflexivos e Convergência Fraca	107
3.4 Operadores Adjuntos	116
4 Operadores Compactos	118
4.1 Conjuntos Compactos em Espaços Normados	118

4.2	Operadores Compactos	125
4.3	Equações Lineares com Operadores Compactos	130
4.4	Operadores Autoadjuntos Compactos em Espaços de Hilbert	135
5	Aplicação de Análise Funcional	138
5.1	C^* -Álgebra e a Descrição da Mecânica Quântica	138
6	Considerações Finais	142
	Referências Bibliográficas	144

Introdução

Neste trabalho será apresentado um estudo sobre a Análise Funcional, tal conteúdo se encontra em um dos campos da matemática moderna, que é o campo da matemática, mais especificamente da análise, que aborda o estudo de espaços de funções. Sua história tem foco no conhecimento de transformações, particularmente a Transformada de Fourier, e no estudo de equações diferenciais e equações integrais. A palavra funcional remete ao cálculo de variações, em que estuda-se funções cujo argumento é uma função. Um importante passo para o avanço da Análise Funcional durante o século XX foi a modelagem, devida a John von Neumann, da mecânica quântica em espaços de Hilbert. A Análise Funcional utiliza e estende muitos conceitos de Álgebra Linear, e pode ser considerada até certo ponto como o estudo de espaços vetoriais de dimensão infinita. (BOTELHO; PELLEGRINO; TEIXEIRA, 2012).

A Análise Funcional é o estudo dos espaços vetoriais normados, em especial os espaços de Banach e de Hilbert, e também dos operadores lineares contínuos entre eles. Tais definições lançam luz sobre as semelhanças e diferenças entre a teoria da Álgebra Linear e da Análise Funcional. Ambas tratam do estudo de espaços vetoriais, sendo a diferença entre elas é que na Análise Funcional é exigido o estudo da continuidade, isto é, na Álgebra Linear se trata essencialmente de espaços vetoriais de dimensão finita e na Análise Funcional se estuda os espaços vetoriais de dimensão infinita. Ainda, de acordo com os autores, o estudo de operadores lineares que são contínuos é o objetivo principal da Análise Funcional. (BOTELHO; PELLEGRINO; TEIXEIRA, 2012).

Uma pergunta que é colocada pelos autores é, “qual a necessidade de estudar operadores lineares entre espaços de dimensão infinita?”. A resposta decorre naturalmente da observação do fato que a matemática sofreu grandes avanços nos últimos três séculos, em especial, o avanço acelerado entre os séculos XVII e XIX com a resolução de vários, e dos mais variados problemas que antes não podiam ser tratados matematicamente de forma convincente. Muitos desses problemas as soluções se apresentaram como funções, logo é natural que a busca e o tratamento dessas soluções ocorressem em conjuntos de funções. Daí, tais conjuntos de funções, com certas propriedades adequadamente estabelecidas passaram a ser definidos como os espaços vetoriais de dimensão infinita. Esse apanhado deu uma amplitude na matemática e colocou os espaços de

dimensão infinita em tendência. (BOTELHO; PELLEGRINO; TEIXEIRA, 2012).

Dito isso, o objetivo deste trabalho é dar continuidade no componente curricular de Álgebra Linear oferecido nos cursos de graduação de Licenciatura em Matemática, com o objetivo principal de realizar um estudo sobre a Análise Funcional, trazendo um estudo sobre os Espaços de Banach, os Espaços de Hilbert, os Espaços Dual, Operadores Adjuntos, que nos leva ao Teorema de Hahn-Banach, o qual permite que funcionais lineares definidos em um subespaço de um espaço vetorial sejam estendidos a todo o espaço. À vista disso, depois de finalizar tais pesquisas, o foco será apresentar uma aplicação sobre o conteúdo abordado durante todo o trabalho.

No primeiro capítulo trazemos um breve estudo de Álgebra Linear sobre os espaços vetoriais que é preciso ter noção para o entendimento e desenvolvimento do trabalho. No capítulo 2 são apresentados os dois principais espaços da Análise Funcional, os Espaços de Hilbert e os Espaços de Banach. No terceiro capítulo são abordados alguns operadores lineares limitados e também os operadores inversos, assim como o importante teorema de Banach-Steinhaus. Por conseguinte, foi feito um estudo sobre os espaços dual e os operadores adjuntos. Uma particularidade dos espaços duais é que os funcionais são retratados como itens referentes a mesma classe dos elementos do espaço e sobre os operadores adjuntos. Na matemática, um determinado operador linear que esteja em um espaço de Hilbert, pode possuir um operador adjunto. No quarto capítulo, são apresentados os operadores compactos, que formam uma família de operadores lineares limitados entre espaços de Banach.

Por fim, no capítulo 5, concluímos o trabalho trazendo uma aplicação do conteúdo de Análise Funcional, na área de Física, especificamente em Mecânica Quântica. Neste capítulo, foi feito o resumo de um artigo publicado na Revista Brasileira de Ensino de Física, intitulado como *C*-Álgebras e a Descrição da Mecânica Quântica*. Tal artigo traz um estudo sobre uma determinada aplicação de Análise Funcional, o primeiro sobre a C*-Álgebra, que é uma álgebra dos espaços de Banach junto com uma involução ou função involutória (função que é seu próprio inverso) que satisfaz as propriedades do adjunto, e a partir daí trazer um descrição da mecânica quântica em um espaço de Hilbert através dos teoremas de Gelfand e Gelfand-Neumark.

Cabe citar aqui que, ao longo de todo o texto, serão apresentados muitos exemplos para ilustrar as definições e propriedades enunciadas. Acreditamos que tais exemplos são necessários em função da proposta do trabalho já estabelecida em parágrafo anterior. Esse fato tornou o trabalho por demais extenso, mas julgamos que sem esses aprofundamentos e até certo ponto, sem esse prolixismo, não conseguiríamos atingir o objetivo pretendido.

Capítulo 1

Espaços de Banach e Hilbert

Ao longo deste trabalho há alguns resultados enunciados sem demonstração. A falta dessas provas, porém, em nada compromete o processo de construção da teoria. Alguns de tais resultados não são exclusivos da Análise Funcional, como é o caso do Teorema 1.3.4, como dito no próprio enunciado. Ou o caso dos Lemas 1.6.2 e 1.6.3 cujas demonstrações em nada diferem daquelas obtidas em um bom livro de análise no $\mathbb{R}^n$. Quanto aos demais, podem ser obtidos em textos de Análise Funcional que atualmente existem em bom número, alguns inclusive em língua portuguesa¹. Infelizmente, os prazos não permitiram que as incluíssemos neste trabalho.

1.1 Espaços Vetoriais

Um espaço vetorial sobre o conjunto $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ de escalares é um conjunto V equipado com as operações de soma de vetores e de multiplicação por escalar e que satisfazem as propriedades usuais dos espaços $\mathbb{R}^n$. A ideia é que vários conjuntos mais abstratos possuem a estrutura parecida com a dos espaços $\mathbb{R}^n$ e esta abordagem permite que façamos uma análise sistemática de todos estes casos.

Definição 1.1.1. *Seja $V \neq \emptyset$ um conjunto munido das operações de adição e multiplicação por escalar, isto é,*

$$\begin{aligned} + & : \forall x, y \in V & (x, y) & \longrightarrow x + y \in V; \\ \bullet & : \forall \alpha \in K; \forall x \in V & (\alpha, x) & \longrightarrow \alpha \cdot x \in V. \end{aligned}$$

O conjunto V chama-se espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ se, são satisfeitas as seguintes propriedades:

¹Fundamentos de Análise Funcional de Geraldo Márcio de Azevedo Botelho et all, publicado pela SBM e Introdução à Análise Funcoinal de César R. de Oliveira, publicado pelo IMPA

1. $x + y = y + x$ para todos $x, y \in V$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ para todos $x, y, z \in V$
3. Existe um único $0 \in V$ tal que $x + 0 = 0 + x = x$
4. Para todo $x \in V$ existe um único $-x \in V$ tal que $x + (-x) = 0 = -x + x$
5. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e para todo $x \in V$
6. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e para todo $x \in V$
7. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \forall \alpha \in \mathbb{K}$ e $\forall x, y \in V$
8. $1 \cdot x = x$ para todo $x \in V$

Observação 1.1.1. Os elementos de V são chamados de vetores e os elementos de $\mathbb{K}$ de escalares.

Exemplo 1.1.1. Seja $V = \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1 : n\}$, temos que

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ \alpha x &= (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) \end{aligned}$$

Exemplo 1.1.2. Seja $V = C[a, b]$ o espaço das funções contínuas no intervalo $[a, b]$, então

$$\begin{aligned} + &: (x + y)(t) = x(t) + y(t), & \forall t \in [a, b] \\ \bullet &: (\alpha x)(t) = \alpha \cdot x(t), & \forall t \in [a, b] \end{aligned}$$

Exemplo 1.1.3. Seja $V = C^{(k)}[a, b]$ o espaço das funções que possuem derivadas contínuas até a ordem $k, k \in \mathbb{N}$. Daí,

$$\begin{aligned} k &= 0 \Rightarrow C^{(0)}[a, b] = C[a, b] \\ k &> 0 \Rightarrow C^{(k)}[a, b] = \{x \in C[a, b] \mid x', x'', \dots, x^{(k)} \in C[a, b]\} \end{aligned}$$

Definição 1.1.2. Seja V um espaço vetorial, e $L \subset V$ dizemos que L é um subespaço vetorial de V , se as seguintes propriedades ocorrem:

1. $0 \in L$;
2. Para todos $x, y \in L$, então $x + y \in L$;
3. Para todo $x \in L$ e para todo $\alpha \in \mathbb{K}$, então $\alpha x \in L$.

Exemplo 1.1.4. Os conjuntos $\{0\}$ e V são subespaços triviais de V e também são chamados de subespaços vetoriais.

Exemplo 1.1.5. Seja $V = C[a, b]$ um espaço vetorial e $M = \{x(t) \in C[a, b] \mid x(a) = 0\}$ um conjunto de funções.

Seja, para todos $x, y \in M$ e para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, então

$$\alpha x + \beta y \in M \Leftrightarrow (\alpha x + \beta y)(a) = (\alpha x)(a) + (\beta y)(a) = 0$$

Definição 1.1.3. Um elemento y tal que $y \in V$ é uma combinação linear dos elementos $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ se existem os escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tal que $y = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$.

Definição 1.1.4. Sejam V um espaço vetorial e $A \subset V$, o envoltório linear de A . $[A] = \{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in A, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}\}$ é o subespaço vetorial gerado por A .

Exemplo 1.1.6. Os vetores $x = (1, 0)$ e $y = (0, 1)$ geram o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^2$, ou seja, $[x, y]$ é o subespaço vetorial gerado por A , pois qualquer par ordenado $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ é combinação linear de x e y :

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) &= \alpha x + \beta y = \alpha(1, 0) + \beta(0, 1) = (\alpha, 0) + (0, \beta) \\ &= (\alpha, \beta) \\ (\alpha, \beta) &= \alpha x + \beta y \\ [x, y] &= \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Definição 1.1.5. Seja $A = x_1, x_2, \dots, x_n \in V$. A é dito Linearmente Independente (L.I), se para todo $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Caso contrário se diz que $A = x_1, x_2, \dots, x_n$ são Linearmente Dependente (L.D) se existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} : |\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2 \neq 0$ tal que $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$.

Exemplo 1.1.7. Seja $V = C[0, 1]$ um espaço vetorial e $A = \{t^n \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$. um conjunto deste espaço. Devemos provar que $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ é L.I para todo $n \in \mathbb{N}$.

Suponha por absurdo que exista $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n = 0$ para todo $t \in [a, b]$. Isso implica que todo $t \in [a, b]$ é raiz do polinômio, o que é absurdo.

Definição 1.1.6. Um conjunto $B \subset V$ (B L.I), chama-se base de Hamel de V se $L(B) = V$.

Exemplo 1.1.8. Seja P o conjunto de todos os polinômios, então $B = \{1, t, \dots, t^n\}$ é uma base de Hamel em P .

Observação 1.1.2. Se X um conjunto e R uma relação em $X \times X$, (x, y) encontra-se em $R \Leftrightarrow xRy$.

Definição 1.1.7. Uma relação em X um conjunto qualquer, chama-se relação de ordem (e denota-se $\leq$) se:

- i) Reflexiva $x \leq x$
- ii) Anti-simétrica $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$
- iii) Transitiva $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$

Para todos $x, y, z \in X$ e $(X, \leq)$ é o conjunto ordenado.

Exemplo 1.1.9. Para todo X , $P(X) = \{\text{todos os subconjuntos de } X\}$. Para todo $A, B \in P(X)$, dizemos $A \leq B \Leftrightarrow A \subset B$.

Definição 1.1.8. Seja $(X, \leq)$ um conjunto ordenado. Dois elementos $x, y \in X$ são comparáveis, se $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Definição 1.1.9. Um subconjunto $A \subset X$ é dito totalmente ordenado se para todos $x, y \in A$ são comparáveis.

Definição 1.1.10. Seja X um conjunto ordenado, $A \subset X$. Um elemento $y \in X$ chama-se cota superior de A , se $x \leq y$, para todo $x \in A$.

Um elemento m em A chama-se elemento máximo de A se para todo $x \in A$, $m \leq x \Rightarrow x = m$.

Definição 1.1.11. Seja X um conjunto ordenado, $A \subset X$ é um conjunto limitado, se A possui pelo menos uma cota superior.

Lema 1.1.1. (Lema de Zorn). Seja X um conjunto ordenado, não vazio tal que cada subconjunto totalmente ordenado em X é limitado. Então em X existe pelo menos um elemento máximo.

Teorema 1.1.1. Qualquer espaço vetorial (não trivial) possui uma base de Hamel.

Demonstração. Seja $V \neq \{\emptyset\}$ e B o conjunto de todas as famílias linearmente independentes em V . Dados dois conjuntos linearmente independentes $L, L' \in B$ por definição $L \leq L' \Leftrightarrow L \subset L'$. Seja $F \subset B$ sendo F um conjunto linearmente ordenado e seja

$$V = \bigcup_{A \in F} A$$

tal que $V \in B$. Pelo lema de Zorn, existe $M \in B$, elemento máximo. Se $\mathcal{L}(M) = V$, então M é base de Hamel. Agora, se $\mathcal{L}(M) \neq V$, por conseguinte, existe x_1 tal que $x_1 \notin \mathcal{L}(M)$. Então, $M_1 = M \cup \{x_1\}$ e $M_1 \in B$, assim, $M \leq M_1$ o que é absurdo, pois M é máximo. $\square$

Definição 1.1.12. Um espaço vetorial V tem dimensão finita n e escreve-se $\dim V = n$ se V possui uma base finita de n vetores, ou seja, qualquer elemento de V pode ser escrito como combinação linear dos elementos de sua base.

Definição 1.1.13. Um espaço vetorial V se diz de dimensão infinita se para todo $n \in \mathbb{N}$ em V , existe n vetores L.I.

Exemplo 1.1.10. A seguir, alguns exemplos de dimensões de espaços vetoriais.

$$i) \dim \mathbb{R}^n = n$$

$$ii) \dim C[a, b] = \infty$$

iii) Seja ℓ_p o espaço das sequências de escalares absolutamente p -somáveis. Temos que, $\dim \ell_p = \infty$

Definição 1.1.14. Sejam E, V espaços vetoriais sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$. A soma direta de E com V , é definida e denotada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} E \oplus V &= \{(x, y) \mid x \in E \text{ e } y \in V\} \\ (x, y) + (z, w) &= (x + z, y + w) \quad \forall x, z \in E \text{ e } \forall y, w \in V \\ \alpha(x, y) &= (\alpha x, \alpha y) \quad \forall x \in E, \forall y \in V \text{ e } \forall \alpha \in \mathbb{K}. \end{aligned}$$

Exemplo 1.1.11.

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^1 \oplus \mathbb{R}^1$$

Definição 1.1.15. Seja V espaço vetorial e sejam L e M subespaços vetoriais em V . V é a soma direta dos subespaços L e M , ou seja, $V = L + M$, se para todo $x \in V$ existe um único $l \in L$ e existe um único $m \in M$ tal que $x = l + m$.

Definição 1.1.16. Seja V espaço vetorial, $M \subset V$ se diz convexo, se para todo $x, y \in M$ e para todo $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$, então $\alpha x + 1 - \beta y \in M$.

Observações: M é convexo se, e somente se, para todos $x, y \in M$ e para todo $0 \leq t \leq 1$ temos $tx + (1 - t)y \in M$.

Definição 1.1.17. Um conjunto $M \subset V$ chama-se equilibrado se para todo $x \in M$ e para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ com $|\alpha| \leq 1$ temos $\alpha x \in M$.

Exemplo 1.1.12. $V = \mathbb{R}^2$ é equilibrado.

Definição 1.1.18. Um conjunto $M \subset V$ chama-se absolutamente equilibrado se for convexo e equilibrado.

Definição 1.1.19. Sejam $L, M \subset V$, subespaços de V . Dizemos que M absorve L se existe $c > 0$ tal que para todo $\alpha \in \mathbb{K}$, $|\alpha| \geq c$, para todo $x \in L \Rightarrow \alpha^{-1}x \in M$. Quando M absorve V , dizemos que M é absorvente.

Definição 1.1.20. Sejam V, W dois espaços vetoriais sobre um mesmo corpo $\mathbb{K}$. Uma aplicação $A : D(A) \subset V \longrightarrow W$ diz-se um operador linear se

1. $D(A)$ é um espaço vetorial e a imagem $R(A) = A(D(A)) \subset W$;
2. Para quaisquer $x, y \in D(A)$ e escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ temos que $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$.

Observação 1.1.3.

- $D(A)$ é o domínio de A ;
- $R(A)$ é o conjunto das imagens de A .

Nota 1.1.1. Percebe-se que ao analisar a segunda propriedade da definição anterior, vimos que A preserva as duas operações do espaço vetorial.

Exemplo 1.1.13. Sejam $V = C^{(1)}(0, 1)$ e $W = C(0, 1)$.

$$\begin{aligned} d &: C^{(1)}(0, 1) \longrightarrow C(0, 1) \\ dx(t) &= x'(t), \forall x \in C^{(1)}(0, 1) \end{aligned}$$

Exemplo 1.1.14. Seja $K(t, s) \in C([0, 1] \times [0, 1])$.

$$\begin{aligned} K \cdot C(0, 1) &\longrightarrow C(0, 1) \\ Kx(t) &= \int_0^1 K(t, s)x(s)ds \end{aligned}$$

Definição 1.1.21. Seja V e W dois espaços vetoriais sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$, dizemos que V é isomorfo a W se existe $J : V \longrightarrow W$ tal que:

1. J é o operador linear
2. J é bijeção

Teorema 1.1.2. Para todo V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, com $\dim V = n$. Então, $V \cong \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Considere um subconjunto $W = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ de V , com $m > n$ elementos. Vamos mostrar que W é linearmente dependente. Assim, qualquer conjunto linearmente independente possui no máximo n elementos. Como $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, pelo teorema anterior podemos

extrair uma base desse conjunto para V . Seja $\{v_1, \dots, v_r\}$ esta base. Então existem escalares α_{ij} , com $i = 1, 2, \dots, r$ e $j = 1, 2, \dots, m$ tais que:

$$w_j = \alpha_{1j}v_1 + \dots + \alpha_{ij}v_i + \alpha_{rj}v_r.$$

Consideramos agora a combinação linear nula de $w_1, \dots, w_m$:

$$\beta_1 w_1 + \dots + \beta_m w_m = e.$$

Substituindo, temos que:

$$\beta_1(\alpha_{11}v_1 + \dots + \alpha_{r1}v_r) + \beta_m(\alpha_{1m}v_1 + \dots + \alpha_{rm}v_r) = e,$$

daí

$$(\beta_1 \alpha_{11} + \beta_2 \alpha_{12} + \dots + \beta_m \alpha_{1m})v_1 + \dots + (\beta_1 \alpha_{r1} + \beta_2 \alpha_{r2} + \dots + \beta_m \alpha_{rm})v_r = e.$$

Como $\{v_1, \dots, v_r\}$ é uma base para V , então este conjunto é L.I. Assim temos:

$$\begin{cases} \beta_1 \alpha_{11} + \beta_2 \alpha_{12} + \dots + \beta_m \alpha_{1m} = 0 \\ \vdots \\ \beta_1 \alpha_{r1} + \beta_2 \alpha_{r2} + \dots + \beta_m \alpha_{rm} = 0 \end{cases}$$

Obtemos um sistema linear homogêneo com r equações e m incógnitas $\beta_1, \dots, \beta_m$. E como $r \leq n < m$, o sistema admite solução não trivial. Assim, existem escalares não todos nulos $\beta_1, \dots, \beta_m$, tais que

$$\beta_1 w_1 + \dots + \beta_m w_m = e.$$

Portanto, $W = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ é L.D. Assim, qualquer conjunto com mais de n elementos é L.D., ou seja, qualquer conjunto L.I. possui no máximo n elementos. $\square$

Observação 1.1.4. Os espaços com dimensão infinita nem sempre são isomorfos.

Definição 1.1.22. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Um funcional f em V é um operador linear $f: V \rightarrow \mathbb{K}$*

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= \alpha f(x) + \beta f(y) \\ f(x) &= \langle x, f \rangle \end{aligned}$$

Definição 1.1.23. *Seja V um espaço vetorial e $L \subset V$ um subespaço vetorial. Dizemos que $x = y \pmod{L}$ se, e somente se, $x - y \in L$.*

Exemplo 1.1.15. Sejam $V = C[a, b]$ e $M = \{x \in C[a, b] \mid x(a) = 0\}$. Devemos provar que V é o espaço quociente pelo seus subespaço M . Note que,

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \{y \in C[a, b] \mid y - x \in M\} \\ &= \{y \in C[a, b] \mid y(a) = x(a)\}\end{aligned}$$

Portanto, $V/M = \mathbb{R}$.

Observação 1.1.5. Temos que V/M é o espaço quociente de um espaço vetorial V pelo seu subespaço M .

Definição 1.1.24. Seja V um espaço vetorial. Um subespaço vetorial M chama-se hiperespaço se $L = V$, para todo subespaço $L \subset V$ e $M \subset L$.

Definição 1.1.25. Seja $f : V \longrightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear. Se o núcleo de f , $N(f) = \{x \in V \mid \langle x, f \rangle = 0\}$

1.2 Espaços Vetoriais Normados

Espaço normado é a estrutura matemática na qual as principais propriedades de espaços vetoriais e espaços métricos pode ser feito em um mesmo ambiente. O símbolo $\mathbb{K}$ denotará, o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais ou o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos.

Definição 1.2.1. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Em V é definido uma norma, se para todo $x \in V$, $x \longrightarrow \|x\| \in \mathbb{R}$ tal que:

1. $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in V$, $\|x\| = 0$ se, e somente se, $x = 0$;
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ e para todo $x \in V$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todos $x, y \in V$.

Nestas condições ao par $(V, \|\cdot\|)$ chamamos de espaço vetorial normado.

Exemplo 1.2.1. Para todo n inteiro positivo consideremos o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^n$. Para $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, atribuíamos

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|x\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad \text{e} \quad \|x\|_2 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

É de fácil entendimento que $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são normas em $\mathbb{R}^n$. A primeira dessas três normas é chamada de norma canônica do $\mathbb{R}^n$. Na Análise funcional, uma norma consiste em uma função que a cada vetor de um espaço vetorial associa um número real não-negativo.

Exemplo 1.2.2. Duas normas no espaço das funções contínuas. Seja $V = C[a, b]$ com

$$\|x\| = \sup_{a \leq t \leq b} |x(t)| \quad e \quad \|x\|_1 = \int_a^b |x(t)| dt$$

Exemplo 1.2.3. Seja $V = L_p(a, b)$ com $1 \leq p \leq \infty$, o espaço das funções Lebesgue² integráveis em módulo elevado à potência p .

$$\begin{aligned} \|x\|_p &= \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ \|\alpha x\|_p &= \left(\int_a^b |\alpha x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \|x\|_p \end{aligned}$$

Lema 1.2.1. (Young) Seja $p \in \mathbb{R}$, $p > 1$ e seja $q \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $q > 1$, então para todos $a, b \in \mathbb{R}^+$, temos

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Demonstração. Seja $\varphi : \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi(t) = \frac{t^p}{p} + \frac{1}{q} - t \Rightarrow \varphi'(t) = t^{p-1} - 1 = 0 \Rightarrow t = 1$$

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \frac{1}{q} > 0 \\ \varphi(1) &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 = 0 \\ \varphi(t) &\rightarrow +\infty \quad \forall t > 1 \\ &\Rightarrow \varphi(t) \geq \varphi(1), \forall t \geq 0 \\ &\Rightarrow \frac{t^p}{p} + \frac{1}{q} - t \geq 0 \\ &\Rightarrow t \leq \frac{t^p}{p} + \frac{1}{q}, \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Tome $t = ab^{\frac{1}{p-1}}$. Então,

$$ab^{\frac{1}{p-1}} \leq \frac{a^p b^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \frac{1}{q}.$$

²Conjunto de todas as funções mensuráveis.

Dividindo tudo por $b^{\frac{p}{p-1}}$, temos

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{\frac{p}{1-p}}}{q}.$$

Como $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} \Rightarrow q = \frac{p}{p-1}$. Portanto, $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, como queríamos demonstrar. $\square$

Lema 1.2.2. (Hölder) Sejam $p, q \geq 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então para todo $x \in L_p(a, b)$ e para todo $y \in L_q(a, b)$, temos que $xy \in L_1(a, b)$ e é válido o seguinte:

$$\left| \int_a^b x(t)y(t) dt \right| \leq \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |y(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

Observação 1.2.1. $\left| \int_a^b x(t)y(t) dt \right| \leq \|x\|_p \|y\|_q$.

Demonstração. Se $\|x\|_p = 0$, então $\|y\|_q = 0$. Se $\|x\|_p > 0$ e $\|y\|_q > 0$, defina

$$x_0(t) = \frac{x(t)}{\|x\|_p}, \quad y_0(t) = \frac{y(t)}{\|y\|_q}$$

Para todo $t \in [a, b]$, temos

$$\begin{aligned} \frac{|x(t)y(t)|}{\|x\|_p \|y\|_q} &= \frac{|x(t)|}{\|x\|_p} \cdot \frac{|y(t)|}{\|y\|_q} \\ &\leq \frac{|x(t)|^p}{\|x\|_p^p \cdot p} + \frac{|y(t)|^q}{\|y\|_q^q \cdot q}. \end{aligned}$$

Portanto, como vale para todo $t \in [a, b]$,

$$\frac{\int_a^b |x(t)y(t)| dt}{\|x\|_p \|y\|_q} \leq \frac{\int_a^b |x(t)|^p dt}{\|x\|_p^p \cdot p} + \frac{\int_a^b |y(t)|^q dt}{\|y\|_q^q \cdot q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \int_a^b |x(t)y(t)| dt \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

$\square$

Nota 1.2.1. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ então para todo $x \in l_p$ e $y \in l_q$, temos

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \right| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Lema 1.2.3. (Minkowsky) Seja $p \geq 1$. Para todos $x, y \in L_p(a, b)$, temos

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

Demonstração. Vamos supor $p > 1$. Então

$$\begin{aligned}\|x+y\|_p^p &= \int_a^b |x(t)+y(t)|^p dt = \int_a^b |x(t)+y(t)|^{p-1} |x(t)+y(t)| dt \\ &\leq \int_a^b |x(t)| |x(t)+y(t)|^{p-1} dt + \int_a^b |y(t)| |x(t)+y(t)|^{p-1} dt \\ &\leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \left(\int_a^b |(x(t)+y(t))|^{p-1} dt \right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Como $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} \Rightarrow p = q(p-1)$, logo

$$\left(\int_a^b |x(t)+y(t)|^p dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \|x\|_p + \|y\|_q \Rightarrow \|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

□

Definição 1.2.2. *Sejam E, F dois espaços normados. Uma aplicação $J : E \longrightarrow F$ chama-se isométrica se:*

- i) J é isomorfismo de espaço vetorial E e F ;
- ii) $\|J(x)\|_F = \|x\|_E$ para todo $x \in E$.

Logo, dois espaços E, F são isométricos se existe uma isometria $J : E \longrightarrow F$.

Exemplo 1.2.4. *Seja P o conjunto dos polinômios e $\|p\| = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|$ sendo $P(x) = a_0x^n + \dots + a_n$. $\{P, \|\cdot\|_p\}$ é isométrica a $\{\mathbb{R}^{n+1}, \|\cdot\|_\infty\}$ e $J_p \simeq (a_0, a_1, \dots, a_n)$.*

1.3 Geometria e Topologia de um Espaço Normado

O objetivo desta seção é caracterizar um espaço vetorial normado quando às suas propriedades geométricas e topológicas. Ao longo do texto consideraremos um espaço vetorial normado E .

Lema 1.3.1. *(Desigualdade Triangular Inversa) Seja E um espaço normado. Para todos $x, y \in E$ temos $|||x| - |y|| \leq \|x - y\|$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned}\|x\| &= \|y + (x - y)\| \leq \|y\| + \|x - y\| \\ \|x\| &\leq \|y\| + \|x - y\| \Leftrightarrow -\|x - y\| \leq -\|x\| + \|y\| \Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|\end{aligned}$$

□

Lema 1.3.2. *Todo espaço normado E é um espaço métrico, sendo a métrica definida por*

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

É evidente que valem, para a função acima, as propriedades que caracterizam uma métrica, a saber

$$i) \ d(x, y) \geq 0 \text{ e } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$$

$$ii) \ d(x, y) = d(y, x);$$

$$iii) \ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z);$$

Definição 1.3.1. *Definições de bola aberta, bola fechada e esfera em um espaço normado*

$$i) \ \text{Bola Aberta} - B(x_0, r) = \{x \in E \mid \|x - x_0\| < r\}$$

$$ii) \ \text{Bola Fechada} - B[x_0, r] = \{x \in E \mid \|x - x_0\| \leq r\}$$

$$iii) \ \text{Esfera} - S(x_0, r) = \{x \in E \mid \|x - x_0\| = r\}$$

Para todo $A, B \subset E$ dois subconjuntos de E , definimos

$$d(A, B) = \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} \|x - y\|$$

$$d(x, B) = \inf_{y \in B} \|x - y\|$$

definimos diâmetro de um conjunto A como $\delta(A) = \sup_{x, y \in A} \|x - y\|$. Se $\delta(A)$ existir, então A é dito limitado. De outro modo, A é dito limitado se, e só se existe um $c > 0$ tal que $\|x\| \leq c$ para todo $x \in A$. Ou ainda, A é limitado se, e só se existe $B[x_0, R]$ tal que $A \subset B[x_0, R]$.

Exemplo 1.3.1. *Todo subespaço vetorial não trivial é um conjunto ilimitado.*

Definição 1.3.2. *Um conjunto $A \subset E$ chama-se aberto se para todo $x_0 \in A$, existir um r_{x_0} tal que $B(x_0, r_{x_0}) \subset A$.*

Exemplo 1.3.2. *Qualquer bola aberta é um conjunto aberto. Basta tomar $y_0 \in B(x_0, r)$ e $\frac{R - d(x_0, y_0)}{2}$. Depois tome $y \in B(y_0, r)$.*

$$d(y, x_0) \leq d(y, y_0) + d(y_0, x_0) \leq r + d(y_0, x_0) = \frac{r - d(x_0, y_0)}{2} + d(x_0, y_0) < \frac{r + r}{2} = r.$$

Definição 1.3.3. *Seja E um espaço vetorial. Um subespaço vetorial próprio de E são todos os subespaços de E exceto os dois subespaços triviais, ou seja, o subespaço nulo e o próprio espaço vetorial E .*

Lema 1.3.3. *Qualquer subespaço vetorial próprio num espaço normado não contém nenhuma bola aberta.*

Demonstração. Suponha por absurdo que em um espaço vetorial E , existe $L \subset E$ e existe $B(x_0, r) \subset L$. Tome $y \in E \setminus L \Rightarrow x = x_0 + \frac{y}{\|y\|} \cdot \frac{r}{2} \in B(x_0, r) \subset L$.

$$\|x - x_0\| = \frac{\|y\|}{\|y\|} \cdot \frac{r}{2} = \frac{r}{2} < r \Rightarrow y = \frac{2\|y\|}{r}(x - x_0) \in L.$$

□

Corolário 1.3.1. *Um subespaço vetorial próprio em um espaço normado não é aberto.*

Definição 1.3.4. *O conjunto de todos os conjuntos abertos em um espaço normado E formam uma topologia em E que se chama topologia natural de espaço normado. Seja X um conjunto e $P(x)$ subconjuntos de X com $T \subset P(x)$, sendo T uma coleção de subconjuntos.*

- i) $\emptyset, X \in T$;
- ii) $A, B \in T \Rightarrow A \cap B \in T$;
- iii) Para todo $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset T$ com A_λ aberto para todo $\lambda \Rightarrow A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in T$.

Observação 1.3.1. A definição para topologia e para topologia natural poderá ser encontrado em (LIMA, 2013) e (LIMA, 1976)

Definição 1.3.5. *Seja $A \subset E$, e E um espaço normado, $x_0 \in E$.*

1. $x_0 \in A$ chama-se interior se existe $B(x_0, r) \subset A$. O conjunto de todos os pontos interiores denota-se $\mathring{A}$ e se chama interior de A ;
2. x_0 chama-se exterior se existe $B(x_0, r)$ tal que $B(x_0, r) \cap A = \emptyset$;
3. x_0 chama-se ponto de fronteira de A se para todo $B(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$ e $B(x_0, r) \cap (E \setminus A) \neq \emptyset$ e denota-se ∂A .

Logo, para todo $A \subset E$, $E = \mathring{A} \cup \partial A \cup \overline{(E \setminus A)}$.

Teorema 1.3.1. *$A \subset E$ é aberto se e só se $A = \mathring{A}$.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Se A é aberto, então para todo $x_0 \in A \Rightarrow x_0 \in \mathring{A} \Rightarrow A \subset \mathring{A}$. Que $\mathring{A} \subset A$ é óbvio.
 $\Leftarrow$) Se $\mathring{A} = A$ então dado $x_0 \in A = \mathring{A}$ implica que existe um r_{x_0} tal que $B(x_0, r_{x_0}) \subset A$ no que implica em A ser aberto. $\square$

Definição 1.3.6. V_{x_0} chama-se uma vizinhança de um ponto $x_0 \in E$ se existe $r > 0$; $B(x_0, r) \subset V_{x_0}$.

Teorema 1.3.2. $A \subseteq E$ é aberto se e só se A é vizinhança de cada um de seus pontos.

Demonstração. $\Rightarrow$) Seja $x_0 \in A$. Como A é aberto então existe $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subset A \Rightarrow A = V_{x_0}$.
 $\Leftarrow$) Se $A = V_{x_0}$ então existe $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subset A$ implica que A é aberto. $\square$

Definição 1.3.7. Seja $A \subset E$, um ponto $x_0 \in E$ diz-se ponto de aderência de A se para todo $B(x_0, r)$, teremos $B(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$.

Definição 1.3.8. O conjunto de todos os pontos de aderência de um conjunto $A \subset E$ chama-se fecho de A e designa-se $\bar{A}$.

Definição 1.3.9. Um conjunto $A \subset E$ chama-se fechado se $E \setminus A$ é aberto.

Teorema 1.3.3. $A \subset E$ é fechado se e só se $A = \bar{A}$.

Demonstração. Claramente se para todo $x \in A$ e x aderente a A então $A \subset \bar{A}$. Vamos supor que $\bar{A} \not\subset A$ o que implica que existe um $x \in \bar{A}$ tal que $x \notin A$. Como A é fechado, então $E \setminus A$ é aberto, logo existe um $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset E \setminus A$ resultando em x não aderente a A , o que é um absurdo. Portanto $\bar{A} \subset A$ e $A = \bar{A}$.

Se $A = \bar{A}$, e dado $x \in E \setminus A \Rightarrow x \in E \setminus \bar{A}$, por isso existe um $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap A = \emptyset \Rightarrow B(x, r) \subset E \setminus A$ então $E \setminus A$ é aberto. Portanto A é fechado. $\square$

Exemplo 1.3.3. Vamos mostrar que o fecho de A , $\bar{A}$ é o mínimo conjunto fechado que compreende A . Suponha B fechado e $A \subset B \subset \bar{A}$. Agora suponha $\bar{A} \not\subset B$ então existe $x \in \bar{A}$ tal que $x \notin B$ mas $x \in E \setminus B$ que é aberto, logo existe um $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset B \Rightarrow B(x, r) \cap A = \emptyset$ o que é um absurdo pois $x \in \bar{A}$. Logo $\bar{A} \subset B \Rightarrow B = \bar{A}$ como queríamos mostrar.

Exemplo 1.3.4. $\bar{A} = AF$, com F fechado e $A \subset F$. Seja $\{F_\lambda\}_{\lambda \in L}$, F_λ fechado tal que $A \subset F_\lambda$ para todo $\lambda \in L$. Como A é fechado, então $A \subset \bar{A}$, logo existe λ_0 tal que $F_{\lambda_0} = \bar{A}$. Logo $\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda \subset F_{\lambda_0} = A$.

Agora vamos mostrar que $\bar{A} \subset \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$. Supor que $\bar{A} \not\subset \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$, então existe $x \in \bar{A}$ tal que $x \notin \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ logo existe λ_0 tal que $x \notin F_{\lambda_0} \Rightarrow x \in E \setminus F_{\lambda_0}$ que é aberto. Existe um $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset E \setminus F_{\lambda_0} \Rightarrow B(x, r) \cap A = \emptyset$ no que implica que x não é aderente a A , o que é um absurdo.

Definição 1.3.10. Um ponto x_0 chama-se ponto de acumulação de $A \subset E$ se para todo $B(x_0, r)$ contém pontos de A diferentes de x_0 . Caso contrário, se existe $B(x_0, r)$ tal que $B(x_0, r) \cap A = \{x_0\}$, $x_0 \in A$, x_0 chama-se isolado.

Lema 1.3.4. $x_0 \in E$ é um ponto de aderência de um conjunto $A \subset E$ se, e somente se, $d(x, A) = 0$.

Demonstração. Basta observar que $d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\| = 0$ □

Definição 1.3.11. Seja $\{x_n\} \subset E$ uma sequência. Dizemos que $x_n \rightarrow x_0 \in E$ uniformemente se $\|x_n - x_0\| \rightarrow 0$ com $n \rightarrow \infty$.

Exemplo 1.3.5. Seja $x_n(t) = t^n - t^{2n}$. Podemos afirmar que x_n converge para 0 em $C[0, 1]$?

Seja

$$\|x\|_{C[0,1]} = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|.$$

Desse modo, será que $x_n \rightarrow x_0$ em $C[0, 1]$? Temos que $\|x_n - x_0\| \rightarrow 0$ com $n \rightarrow \infty$. Para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que para todo $n > N$ obtemos $\|x_n - x_0\| < \varepsilon$. Logo,

$$\max_{0 \leq t \leq 1} \|x_n(t) - x_0(t)\| < \varepsilon.$$

Assim, $\|x_n(t) - x_0(t)\| < \varepsilon$ para todo $t \in [0, 1]$. Calculando,

$$\max_{0 \leq t \leq 1} |t^n - t^{2n}| = \max_{0 \leq t \leq 1} (t^n - t^{2n}).$$

Derivando, obtemos

$$nt^{n-1} - 2nt^{2n-1} = nt^{n-1}(1 - 2t^n) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{1}{2^{\frac{1}{n}}} \end{cases}.$$

Sendo assim, para $t = 0$ converge para 0 e para $t = \frac{1}{2^{\frac{1}{n}}}$ converge para 1, e portanto, não converge uniformemente.

Exemplo 1.3.6. Seja $x_n(t) = t^n - t^{2n}$. Temos que x_n converge para 0 em $L_1[0, 1]$. Então,

$$\|x_n - 0\|_{L_1[0,1]} = \int_0^1 |t^n - t^{2n}| dt = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1} \rightarrow 0$$

com $n \rightarrow \infty$.

Lema 1.3.5. Um ponto $x_0 \in E$ é um ponto de acumulação de $A \subset E$ se, e somente se, existe $x_n \in A$ tal que $x_n \rightarrow x_0$.

Demonstração. $\Rightarrow$) Seja x_0 o ponto de acumulação de A , então para todo $\varepsilon > 0$ temos $(B(x_0, \varepsilon) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$. Tome $\varepsilon = \frac{1}{n}$ e tome $x_n \in B(x_0, \frac{1}{n})$ com $x_n \in A$ implica que $\|x_n - x_0\| < \varepsilon$. Assim dado $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ e portanto $\forall n \geq n_0$, $\|x_n - x_0\| < \varepsilon \Rightarrow x_n \rightarrow x_0$ com $n \rightarrow \infty$.

$\Leftarrow$) A volta é retroativa. □

Definição 1.3.12. $A \subseteq E$ chama-se denso em E se $\overline{A} = E$.

Exemplo 1.3.7. O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$. Veja que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, pois toda bola aberta em $\mathbb{R}$ contém os números racionais.

Definição 1.3.13. E é separável se existe um conjunto enumerável e denso em E .

Exemplo 1.3.8. O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é separável, visto que o subconjunto $\mathbb{Q}$ é enumerável e denso em $\mathbb{R}$.

Definição 1.3.14. Sejam E, F espaços normados. Seja $D \subset E$ um conjunto aberto e $f : D \rightarrow F$ uma aplicação. Diz-se que f é contínua em $x_0 \in D$ se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta_{\varepsilon, x_0} > 0$ se $\|f(x_0) - f(x)\| < \varepsilon$ para todo $x \in D$ tal que $\|x - x_0\| < \delta_{\varepsilon, x_0}$. f é contínua em $x_0 \in D$ se, e só se, para todo $f(x_0)$ existe V_{x_0} tal que $f(V_{x_0}) \subset f(x_0)$.

Definição 1.3.15. Seja F um espaço normado e $D \subset F$. $f : D \rightarrow F$ é contínua em D se f é contínua em cada ponto de D .

Teorema 1.3.4. Sejam E, F dois espaços normados e $f : E \rightarrow F$, então são equivalentes as seguintes propriedades, válidas para qualquer espaço topológico.

- i) f é contínua em E ;
- ii) $\forall B \subset F$ aberto, $f^{-1}(B)$ é aberto em E ;
- iii) $\forall B \subset F$ fechado, $f^{-1}(B)$ é fechado em E ;
- iv) $\forall A \subset E$ temos $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Demonstração. Esses resultados são válidos em uma espaço métrico qualquer. Uma demonstração pode ser obtida em (LIMA, 2013). □

Definição 1.3.16. Sejam E e F espaços normados, $D \subset E$ um conjunto aberto e $f : D \rightarrow F$ uma aplicação. Diz-se que f é uniformemente contínua em E se $\forall \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon \forall x, y \in D, \|x - y\| < \delta$.

Lema 1.3.6. Sejam E e F espaços normados e $f, g : E \rightarrow F$ funções contínuas. Então, $S = \{x \in E \mid f(x) = g(x)\}$ é fechado em E .

Demonstração. Supor que $x_0 \in \overline{S}$, desse modo existe $x_n \in S$ tal que $x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow g(x_n)$ e $g(x_n) \rightarrow g(x_0)$, como $f(x_n) = g(x_n)$ e pela unicidade do limite temos que $f(x_0) = g(x_0)$ implica que $x_0 \in S$ e, portanto S é fechado. □

Lema 1.3.7. (*Princípio de Extensão de Identidades*) Sejam E, F dois espaços normados e $A \subset E$ denso em E . Supor $f, g : E \longrightarrow F$ contínuas, coincidem em A , ou seja, $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$. Então $f = g$

Demonstração. O resultado decorre facilmente da continuidade de f e da densidade de A . De fato, a continuidade de uma função em um ponto implica na continuidade em uma vizinhança aberta contendo o ponto. $\square$

Teorema 1.3.5. Em um espaço normado E , as operações de soma e de produto por escalar são contínuas, quer dizer

$$\begin{aligned} (x, y) &\longrightarrow x + y & E \times E &\longrightarrow E \\ (\alpha, x) &\longrightarrow \alpha x & K \times E &\longrightarrow E \end{aligned}$$

Demonstração. Provar que para todo $\{x_n\}, \{y_n\} \subset E$,

$$\begin{cases} x_n \longrightarrow x_0 \\ y_n \longrightarrow y_0 \end{cases} \Rightarrow x_n + y_n \longrightarrow x_0 + y_0.$$

Daí,

$$\|(x_0 + y_0) - (x_n + y_n)\| \leq \|x_0 - x_n\| + \|y_0 - y_n\| \longrightarrow 0.$$

Seja

$$\begin{cases} x_n \longrightarrow x_0 \\ \alpha_n \longrightarrow \alpha_0 \end{cases}$$

devemos provar que $\alpha_n x_n \longrightarrow \alpha_0 x_0$. Assim,

$$\begin{aligned} \|\alpha_0 x_0 - \alpha_n x_n\| &= \|\alpha_0 x_0 - \alpha_n x_0 + \alpha_n x_0 - \alpha_n x_n\| \\ &\leq |\alpha_0 - \alpha_n| \cdot \|x_0\| + |\alpha_n| \cdot \|x_0 - x_n\|. \end{aligned}$$

Daí,

$$\|\alpha_0 x_0 - \alpha_n x_n\| \leq |\alpha_0 - \alpha_n| \cdot \|x_0\| + c \|x_0 - x_n\| \longrightarrow 0$$

pois $|\alpha_0 - \alpha_n| \longrightarrow 0$ e $\|x_0 - x_n\| \longrightarrow 0$. $\square$

1.4 Espaços com Produto Interno

Definição 1.4.1. *Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. O produto interno é uma aplicação*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$$

tal que para quaisquer $x, y, z \in E$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$i) \langle x, x \rangle \geq 0; \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$ii) \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle;$$

$$iii) \langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$$

Esse espaço é conhecido como Espaço Euclidiano.

Definição 1.4.2. *Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. O produto interno é um aplicação*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}, (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{C}$$

tal que para quaisquer $x, y, z \in E$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$i) \langle x, x \rangle \geq 0; \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$ii) \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle;$$

$$iii) \langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$$

Esse espaço é conhecido como Espaço Hermitiano.

Ambos os espaços apresentados chaman-se pré-Hilbertiano.

Exemplo 1.4.1. *Para o caso real, seja $E = \mathbb{R}^n$, então*

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Já para o caso complexo, seja $E = \mathbb{C}^n$, desse modo

$$\langle x, y \rangle = x_1 \overline{y_1} + \cdots + x_n \overline{y_n}.$$

Exemplo 1.4.2. *Seja ℓ_2 . Para o caso real, temos*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

e para o caso complexo temos

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}.$$

Exemplo 1.4.3. Seja L_{Ω} um espaço real. Assim,

$$\langle x, y \rangle = \int_{\Omega} x(t)y(t) dt.$$

E seja L_{Ω} um espaço complexo. Então,

$$\langle x, y \rangle = \int_{\Omega} x(t)\overline{y(t)} dt.$$

Lema 1.4.1. (Cauchy-Schwarz) Em qualquer espaço pré-Hilbertiano E e para todo $x, y \in E$ vale

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

Demonstração. Seja $\lambda \in \mathbb{C}$, então $\langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle \geq 0$. Seja $\lambda = \frac{-\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$ com $y \neq 0$. Então,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x, x \rangle - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} + \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} \\ &\Rightarrow \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} \leq \langle x, x \rangle \\ &\Rightarrow |\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \end{aligned}$$

□

Observação 1.4.1. Se $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ então $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ para todos $x, y \in E$.

Lema 1.4.2. Um espaço pré-Hilbertiano é um espaço normado relativamente a norma $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Demonstração. Provaremos apenas o axioma iii) da Definição 1.2.1, uma vez que a verificação dos demais axiomas é imediato.

$$\text{i) } \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0 \text{ e } \|x\| = 0 \Leftrightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$\text{ii) } \|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} = \sqrt{\alpha \overline{\alpha} \langle x, x \rangle} = |\alpha| \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{K};$$

iii) Para todos $x, y \in E$, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz obtemos

$$\begin{aligned}
 \|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle \\
 &= \langle x, x \rangle + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\
 &\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\
 &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\
 &= (\|x\| + \|y\|)^2.
 \end{aligned}$$

□

Definição 1.4.3. Seja E um espaço normado com a norma $\|\cdot\|_E$. Vamos supor que em E é definido o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. $\|\cdot\|_E$ é compatível com o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se $\|x\|_E = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ para todo $x \in E$.

Lema 1.4.3. Seja E um espaço pré-Hilbertiano e para todos $x, y \in E$ é válida a Identidade do Paralelogramo

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Demonstração. Somando as igualdades

$$\begin{cases} \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2 \\ \|x-y\|^2 = \|x\|^2 - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \|y\|^2 \end{cases}$$

obtemos

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

□

Teorema 1.4.1. Em um espaço normado E , existe um produto interno compatível com a norma deste espaço se, e somente se, esta norma satisfaz a identidade do paralelogramo.

Demonstração. Veja (KREYSZIG, 1978)

□

Exemplo 1.4.4. Seja o espaço $C[0, 1]$ e $\|x\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|$. Vamos provar que $C[0, 1]$ não é pré-Hilbertiano. Dados,

$$\begin{aligned}
 x(t) &= 1 & \|x+y\| &= 2 & \|x\| &= 1 \\
 y(t) &= 1 & \|x-y\| &= 1 & \|y\| &= 1.
 \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 4 + 1 \neq 2 + 2.$$

Logo, $C[0,1]$ com esta norma não é pré-Hilbertiano.

Lema 1.4.4. *Em qualquer espaço pré-Hilbertiano E , o produto interno é uma aplicação contínua de $E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$, quer dizer,*

$$\forall x_n \in E : x_n \longrightarrow x_0$$

$$\forall y_n \in E : y_n \longrightarrow y_0$$

implica que

$$\langle x_n, y_n \rangle \longrightarrow \langle x_0, y_0 \rangle$$

Demonstração. Para todos $x_n, y_n \in E$ temos,

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle| &= |(\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y_0 \rangle) + (\langle x_n, y_0 \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle)| \\ &\leq |\langle x_n, y_n - y_0 \rangle| + |\langle x_n - x_0, y_0 \rangle| \\ &\leq \|x_n\| \|y_n - y_0\| + \|x_n - x_0\| \|y_0\| \end{aligned}$$

Como $\{x_n\}$ é convergente, então $\{x_n\}$ é limitado, implica que existe $M \geq 0$ tal que $\|x_n\| \leq M$.

Logo $|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle| \leq M \|y_n - y_0\| + \|y_0\| \|x_n - x_0\| \longrightarrow 0$ com $M \rightarrow \infty$. $\square$

Definição 1.4.4. *Sejam, $\{E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E\}$ e $\{E', \langle \cdot, \cdot \rangle_{E'}\}$ dois espaços pré-Hilbertianos. $J : E \longrightarrow E'$ é uma isometria destes espaços, se:*

i) $J : E \longrightarrow E'$ é um homomorfismo bijetor (isomorfismo) de espaços vetoriais;

ii) $\langle J(x), J(y) \rangle_{E'} = \langle x, y \rangle_E$ para todo $x, y \in E$.

1.5 Operadores Lineares Limitados

Definição 1.5.1. *Sejam E, F espaços normados e $A : E \longrightarrow F$ um operador linear. A é limitado se existe $c \geq 0$ tal que $\|Ax\| \leq c\|x\|$ para todo $x \in E$. Temos também que se $A : D(A) \longrightarrow F$ é limitado se existe $c \geq 0$ tal que $\|Ax\| \leq c\|x\|$ para todo $x \in D(A)$.*

Exemplo 1.5.1. *Todo operador linear $\{\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty\}$ em $\{y, \|\cdot\|_y\}$ é limitado. Seja $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$*

base de $\mathbb{R}^n$ e para todo $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n)$. Então,

$$\begin{aligned}
 \|Ax\|_y &= \|A(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n)\|_y \\
 &= \|x_1 A e_1 + x_2 A e_2 + \dots + x_n A e_n\|_y \\
 &\leq |x_1| \|A e_1\|_y + |x_2| \|A e_2\|_y + \dots + |x_n| \|A e_n\|_y \\
 &\leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \underbrace{(\|A e_1\|_y + \|A e_2\|_y + \dots + \|A e_n\|_y)}_c
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\|Ax\| \leq c \|x\|_\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Exemplo 1.5.2. Seja $K \in C([a, b] \times [a, b])$. Agora seja $K : C([a, b] \times [a, b]) \longrightarrow C[a, b]$ tal que

$$Kx(t) = \int_a^b K(t, s) x(s) ds.$$

Então,

$$\begin{aligned}
 \|Kx\| &= \max_{a \leq t \leq b} \left| \int_a^b K(t, s) x(s) ds \right| \\
 &\leq \max_{a \leq t \leq b} \int_a^b |K(t, s)| |x(s)| ds \\
 &\leq \max_{a \leq t \leq b} \underbrace{\int_a^b |K(t, s)| ds}_c
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\max_{a \leq s \leq b} |x(s)| \leq c \|x\|_{C[a, b]}.$$

Exemplo 1.5.3. Seja $K(t, s) \in L_2((a, b) \times (a, b))$. Seja $K : L_2(a, b) \longrightarrow L_2(a, b)$ tal que

$$Kx(t) = \int_a^b K(t, s) x(s) ds.$$

Temos que,

$$\begin{aligned}
 \|Kx\|_{L_2(a,b)} &= \left(\int_a^b |Kx(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left(\int_a^b \left| \int_a^b K(t,s)x(s) ds \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \left[\int_a^b \left(\int_a^b |K(t,s)|^2 ds \cdot \int_a^b |x(s)|^2 ds \right) dt \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left(\int_a^b \int_a^b |K(t,s)|^2 ds dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|x\|_{L_2(a,b)}
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\|Kx\|_{L_2(a,b)} \leq c\|x\|_{L_2(a,b)} \quad \forall x \in L_2(a,b)$$

onde $c = \|K\|_{L_2((a,b) \times (a,b))}$

Teorema 1.5.1. *Um operador linear é contínuo se, e somente se, é limitado.*

Demonstração. Seja $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ um operador linear entre espaços normados.

$\Rightarrow$) Suponhamos que A é limitado com vista a mostrar que A é contínuo. Seja $\varepsilon > 0$ dado $x_0 \in D(A)$ um elemento arbitrário. Escolhendo um $\delta = \frac{\varepsilon}{\|A\|}$ e para qualquer $x \in D(A)$ tal que $|x - x_0| \leq \delta$ temos

$$|Ax - Ax_0| = |A(x - x_0)| \leq \|A\| |x - x_0| < \|A\| \delta = \varepsilon.$$

Logo A é contínuo em x_0 , da arbitrariedade de $x_0 \in D(A)$ resulta que A é contínuo.

$\Leftarrow$) Suponhamos agora que A é contínuo, querendo mostrar que A é limitado. Assim, para qualquer $x_0 \in D(A)$ e qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ e para todos os $x \in D(A)$ com $|x - x_0| < \delta$ temos $|Ax - Ax_0| < \varepsilon$. Para $y \neq 0$ em $D(A)$ definimos

$$x := x_0 + \frac{\delta}{|y|}y \iff x - x_0 = \frac{\delta}{|y|}y \Rightarrow |x - x_0| = \delta.$$

Logo

$$|Ax - Ax_0| = |A(x - x_0)| = \left| A \left(\frac{\delta}{|y|}y \right) \right| = \frac{\delta}{|y|} |Ay| < \varepsilon$$

ou ainda

$$\frac{|Ay|}{|y|} < \frac{\varepsilon}{\delta}.$$

Passando ao supremo em ambos os lados sobre todos os $y \in D(A)$ tal que $|y| = 1$ obtemos $\|A\| < \frac{\varepsilon}{\delta}$, isto é, A é limitado. $\square$

Lema 1.5.1. *Sejam E, F espaços normados e $A : E \longrightarrow F$ um operador linear limitado. Então, para todo $M \subset E$ limitado, $A(M)$ é limitado em F .*

Demonstração. Seja $A : E \longrightarrow F$ limitado, então existe um $c \geq 0$ tal que $\|Ax\| \leq c\|x\|$ para todo $x \in E$. Agora seja $M \subset E$ limitado, onde existe um $c_1 \geq 0$ tal que $\|x\| \leq c_1$ para todo $x \in M$. Para todo $y \in A(M)$ existe um $x \in E$ tal que $y = Ax$.

$$\|y\| = \|Ax\| \leq c\|x\| \leq c \cdot c_1$$

Logo, para todo $y \in A(M) \Rightarrow \|y\| \leq c \cdot c_1$, então $A(M)$ é limitado. $\square$

Teorema 1.5.2. *Sejam E, F dois espaços normados e $A : E \longrightarrow F$ um operador linear. São equivalentes:*

- (i) *A é lipschitziana³;*
- (ii) *A é uniformemente contínuo;*
- (iii) *A é contínuo;*
- (iv) *A é contínuo em E ;*
- (v) *A é contínuo em $x = 0$;*
- (vi) $\sup\{\|A(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} < \infty$;
- (vii) *Existe uma constante $c \geq 0$ tal que $\|A(x)\| \leq c\|x\|$ para todo $x \in E$.*

Demonstração. As implicações (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) são válidas no contexto de espaços métricos, ou seja, não dependem da linearidade de A .

(iv) $\Rightarrow$ (v) Suponha A contínuo no ponto $x_0 \in E$. Seja $\varepsilon > 0$. Então existe $\delta > 0$ tal que $\|A(x) - A(x_0)\| < \varepsilon$ sempre que $\|x - x_0\| < \delta$. Agora tome $x \in E$ tal que $\|x - 0\| = \|x\| < \delta$. Então $\|(x + x_0) - x_0\| = \|x\| < \delta$. Portanto

$$\begin{aligned} \|A(x) - A(0)\| &= \|A(x) - 0\| = \|A(x)\| = \|A(x) + A(x_0) - A(x_0)\| \\ &= \|A(x - x_0) - A(x_0)\| < \varepsilon, \end{aligned}$$

provando que A é contínuo em $x = 0$.

(v) $\Rightarrow$ (vi) Da continuidade de A na origem existe $\delta > 0$ tal que $\|A(x)\| < 1$ sempre que $\|x\| < \delta$. Se

³**Definição:** Dado um intervalo $A \subset \mathbb{R}$, dizemos que uma função $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é lipschitziana em A , se existir uma constante real $c > 0$ (denominada constante de Lipschitz) tal que, $|f(x_1) - f(x_2)| \leq c \cdot |x_1 - x_2|$, para quaisquer $x_1, x_2 \in A$. Então podemos dizer que uma função lipschitziana é um processo de suavidade mais forte que a conjuntura de continuidade uniforme. (SILVA, 2018, p. 34)

$\|x\| \leq 1$, $\|\frac{\delta}{2}x\| < \delta$, e então $\frac{\delta}{2}\|A(x)\| = \|A\left(\frac{\delta}{2}x\right)\| < 1$. Isso prova que $\sup\{\|A(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \leq \frac{2}{\delta} < \infty$.

(vi) $\Rightarrow$ (vii) Para $x \in E$, $x \neq 0$, temos

$$\frac{\|A(x)\|}{\|x\|} = \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq \sup\{\|A(y)\| : \|y\| \leq 1\},$$

e portanto $\|A(x)\| \leq (\sup\{\|A(y)\| : \|y\| \leq 1\})\|x\|$ para todo $x \neq 0$. O resultado segue pois essa desigualdade é trivialmente verificada para $x = 0$.

(vii) $\Rightarrow$ (i) Dados $x_1, x_2 \in E$,

$$\|A(x_1 - A(x_2))\| = \|A(x_1 - x_2)\| \leq c\|x_1 - x_2\|,$$

e portanto A é lipschitziano com constante c . □

Definição 1.5.2. Sejam E e F espaços normados e $\mathcal{L}(E, F)$ o conjunto de todos os operadores lineares limitados de E em F . Seja $A \in \mathcal{L}(E, F)$ e seja $B = B[0, 1] \subset E$. $A(B)$ é limitado em F . $\{\|Ax\| : x \in B\}$ é limitado superiormente em $\mathbb{R}$. Para todo $x \in B$ temos $\|Ax\| \leq c$.

Definição 1.5.3. Para todo $A \in \mathcal{L}(E, F)$ temos $\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \leq c$ com $\|Ax\| \leq c\|x\|$.

Lema 1.5.2. Sejam E e F espaços normados para todo $A \in \mathcal{L}(E, F)$ temos:

- i) $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ para todo $x \in E$;
- ii) Se $\|Ax\| \leq c\|x\| \Rightarrow \|A\| \leq c$ para todo $x \in E$;
- iii) Se $\|Ax\| \leq c\|x\|$ para todo $x \in E$ e existe um $x_0 \in E$ tal que $\|x_0\| \leq 1$ e $\|Ax_0\| = c$ então $\|A\| = c$;
- iv) Se $\|Ax\| \leq c\|x\|$ para todo $x \in E$ e existe um $x_n \in E$ tal que $\|x_n\| \leq 1$ e $\|Ax_n\| \rightarrow c$ com $n \rightarrow \infty$, implica que $\|A\| = c$.

Exemplo 1.5.4. Seja $m \in C[0, 1]$ e seja $M : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, considere $Mx(t) = m(t) \cdot x(t)$.

$$\begin{aligned} \|Mx\| &= \max_{0 \leq t \leq 1} |m(t)x(t)| = \max_{0 \leq t \leq 1} |m(t)| |x(t)| \\ &\leq \max_{0 \leq t \leq 1} |m(t)| \cdot \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)| \end{aligned}$$

logo, $\|Mx\| \leq c\|x\|$ com $c = \max_{0 \leq t \leq 1} |m(t)| = |m|$. Seja $x_0(t) = 1 \Rightarrow \|Mx_0\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |m(t) \cdot 1| = c$. Portanto, $\|M\| = \|m\|$.

1.6 Espaços de Banach

Um espaço de Banach, na Matemática, é um espaço vetorial normado que é completo como explicado na definição 1.6.2, ou seja, contém os limites de todas as sequências de elementos de conjunto. O nome deste espaço deve-se ao nome do matemático Stefan Banach (1892 - 1945), da Polônia. O mesmo contribuiu para a teoria das séries ortogonais e inovações na teoria de medida e integração, na qual a contribuição mais importante dele foi na análise funcional.

Definição 1.6.1. *Seja E um espaço normado. Uma sequência $\{x_n\} \subset E$ chama-se fundamental (ou de Cauchy) se para todo $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ para todo $n, m \geq N$.*

Exemplo 1.6.1. *Qualquer sequência convergente é de Cauchy.*

Exemplo 1.6.2. *Seja $\mathcal{L}[a, b] = \{C[a, b] \mid \|\cdot\|_{\mathcal{L}}\}$. Então,*

$$\|x\|_{\mathcal{L}} = \int_a^b |x(t)| dt.$$

Lema 1.6.1. *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$ existe $N_{\varepsilon} \in \mathbb{N}$ tal que para todos $m, n > N \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \varepsilon$ implica que o conjunto $x = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ é finito. Seja $x_{i_0} \in X$ tal que $\|x_{i_0}\| = \max_{x_i \in X} \|x_i\| \Rightarrow \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B(0, \|x_{i_0}\| + \varepsilon)$. $\square$

Lema 1.6.2. *Seja $\{x_n\}$ uma sequência de Cauchy em E espaço normado, que possui uma sub-sequência $\{x_{n_k}\}$ convergente, digamos $x_{n_k} \rightarrow x_0$. Então $\{x_n\}$ é convergente e $x_n \rightarrow x_0$.*

Lema 1.6.3. *Seja E e F dois espaços normados e seja $f : E \rightarrow F$ uniformemente contínua. Então para todo $\{x_n\}$ de Cauchy implica que $\{f(x_n)\}$ é uma sequência de Cauchy em F .*

Definição 1.6.2. *Um espaço normado E se chama espaço de Banach (ou espaço completo) se cada sequência de Cauchy converge para um ponto deste espaço.*

Teorema 1.6.1. *$C[a, b]$ é de Banach.*

Demonstração. Seja $x_n \subset C[a, b]$, então para todo $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que

$$m, n \geq N \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

Assim, para $m, n > N$,

$$\max_{a \leq t \leq b} |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$$

Desta forma $(x_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$, para cada $t \in [a, b]$. Como $\mathbb{R}$ é completo, existe um $x(t) \in \mathbb{R}$ tal que

$$x_n(t) \longrightarrow x(t)$$

Defina a função $x(t) : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, onde $x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t)$.

Para provar que $C[a, b]$ é de Banach, basta mostrar que x é uma função contínua e que $x_n \longrightarrow x$. Mostraremos que $x \in C[a, b]$. Sejam $t_1, t_2 \in C[a, b]$ quaisquer, dado $\varepsilon > 0$ pela convergência existem N_1 e N_2 tais que

$$\begin{aligned} n > N_1 &\Rightarrow |x_n(t_1) - x(t_1)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (N_1 = N_1(\varepsilon, t_1)) \\ n > N_2 &\Rightarrow |x_n(t_2) - x(t_2)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (N_2 = N_2(\varepsilon, t_2)) \end{aligned}$$

Denotemos por $N = \max\{N_1, N_2\}$. Por outro lado, pela continuidade de x_n no compacto $[a, b]$ temos que existe $\delta > 0$ tal que

$$|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |x_n(t_1) - x_n(t_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Da desigualdade triangular obtemos que

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leq |x(t_1) - x_n(t_1)| + |x_n(t_1) - x_n(t_2)| + |x_n(t_2) - x(t_2)|$$

Tomando $n > N$ e $|t_1 - t_2| < \delta$ concluímos que

$$|x(t_1) - x(t_2)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

De onde segue a continuidade de x . Logo $x \in C[a, b]$. Como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $C[a, b]$. Temos que para todo $t \in [a, b]$ e para todo $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$, $N = N(\varepsilon)$ tal que para $m, n \geq N$,

$$|x_n(t) - x_m(t)| \leq \max_{a \leq t \leq b} |x_n(t) - x_m(t)| \leq \varepsilon$$

Fazendo $m \rightarrow \infty$ temos que para todo $t \in [a, b]$,

$$n > N \Rightarrow |x_n(t) - x(t)| \leq \varepsilon$$

Tomando o máximo,

$$n > N \Rightarrow \|x_n - x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x_n(t) - x(t)| \leq \varepsilon$$

Donde concluímos que $x_n \rightarrow x$ como queríamos demonstrar. Portanto $C[a, b]$ é de Banach. $\square$

Teorema 1.6.2. *O espaço $\mathcal{L}_p(a, b)$ com $(p \geq 1)$ é completo.*

Demonstração. Seja x_n qualquer sequência de Cauchy no espaço $\mathcal{L}_p(a, b)$, onde $x_m = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \dots)$. Então, para cada $\varepsilon > 0$ há um N tal que para todo $m, n > N$,

$$d(x_m, x_n) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Segue-se que para cada $j = 1, 2, \dots$, temos

$$|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}| < \varepsilon \quad (m, n > N).$$

Agora escolhemos um j fixo. Em $|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}|$, vemos que $(\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(2)}, \dots)$ é uma sequência de números de Cauchy. Ele converge visto que $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são completos, digamos $\xi_j^{(m)} \rightarrow \xi_j$ como $m \rightarrow \infty$. Usando esses limites, definimos $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ e mostramos que $x \in \mathcal{L}_p(a, b)$ e $x_m \rightarrow x$. De

$$d(x_m, x_n) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

temos para todo $m, n > N$

$$\sum_{j=1}^k |\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}|^p < \varepsilon^p \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Deixando $n \rightarrow \infty$, obtemos para $m > N$

$$\sum_{j=1}^k |\xi_j^{(m)} - \xi_j|^p \leq \varepsilon^p \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Podemos agora deixar $k \rightarrow \infty$, então para $m > N$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^{(m)} - \xi_j|^p \leq \varepsilon^p. \quad (**)$$

Isso mostra que $x_m - x = (\xi_j^{(m)} - \xi_j) \in \mathcal{L}_p(a, b)$. Como $x_m \in \mathcal{L}_p(a, b)$, segue-se por meio da desigualdade de Minkowski, que

$$x = x_m + (x - x_m) \in \mathcal{L}_p(a, b).$$

Além disso, a série em $(**)$ representa $[d(x_m, x)]^p$, de modo que $(**)$ implica que $x_m \rightarrow x$. Visto que (x_m) era uma sequência de Cauchy arbitrária em $\mathcal{L}_p(a, b)$, isso prova a integridade de $\mathcal{L}_p(a, b)$ onde $p \geq 1$. $\square$

Observação 1.6.1. O espaço $\mathcal{L}_1[a, b]$ não é completo.

Teorema 1.6.3. (*Bolas Encaixadas*) *Em qualquer espaço de Banach, qualquer sequência de bolas fechadas encaixadas uma na outra, cujos raios tendem para zero possui um único ponto em comum.*

Demonstração. Seja $B[x_1, r_1] \supset B[x_2, r_2] \supset \dots \supset B[x_n, r_n] \supset \dots$ tal que $r_n \rightarrow 0$ com $n \rightarrow \infty$. Seja $\{x_n\}$. Vamos provar que $\{x_n\}$ é de Cauchy. De fato, para todo $m > n$, $B[x_m, r_m] \supset B[x_n, r_n] \Rightarrow \|x_n - x_m\| \leq r_m$ para todo $m > n$. Então, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N_\varepsilon$, $r_n < \varepsilon$ para todo $n > n_\varepsilon$. Assim,

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

para todo $m > n$ implica que $\{x_n\}$ é de Cauchy. Agora, existe um $x : x_n \rightarrow x$ em X . Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $\|x_n - x\| < \varepsilon \Rightarrow x \in B[x_n, r_n]$ para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\|x - y\| \leq \|x - x_n\| + \|y - x_n\| \leq 2r_n \leq 0 \Rightarrow x = y.$$

$\square$

Definição 1.6.3. *Um conjunto $A \subset E$ se chama raro se para toda bola aberta B em E , existe $B_1 \subset B$, com B_1 aberta tal que $A \cap B_1 \neq \emptyset$.*

Lema 1.6.4. *$A \subset E$ é raro se, e somente se, $\bar{A} = \emptyset$, se $\bar{A}$ não compreende nenhuma bola aberta.*

Demonstração. $\Rightarrow$) A é raro, então existe $B \subset \bar{A}$ com B aberta. Seja $B = B(x_0, r_0) \subset \bar{A}$ para todo $B(x, r) \subset B(x_0, r_0) \subset \bar{A}$ Logo, $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ o que é uma contradição.

$\Leftarrow$) Vamos supor que $\bar{A}$ não contém nenhuma bola aberta mas A é raro. Existe B aberta para todo $B_1 \subset B$ e $A \cap B_1 \neq \emptyset$. Para todo $x \in B$ existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset B$. Então $B(x, r) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in \bar{A} \Rightarrow B \subset \bar{A}$ o que é um absurdo. $\square$

Definição 1.6.4. *Um conjunto em espaço normado E se denomina de 1ª categoria se este conjunto pode ser apresentado como uma reunião enumerável de conjuntos raros, caso contrário, chama-se de 2ª categoria.*

Teorema 1.6.4. (*Baire*) *Qualquer espaço de Banach é um conjunto de 2ª categoria.*

Demonstração. Suponha por absurdo que E seja de 1ª categoria, ou seja,

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

E_n raro em E para todo $m \in \mathbb{N}$. Seja B uma bola qualquer em E aberta, então existe $B_1 \subset B$ tal que $B_1 \cap E_1 = \emptyset$. Suponha $B_1 = B(x_1, r_1)$, então $B[x_1, \frac{r_1}{2}] \subset B(x_1, r_1) \subset B$. Portanto, existe $B[x_1, r_1] \subset B$ tal que $B[x_1, r_1] \cap E_1 = \emptyset$.

Seja $B(x_1, \frac{r_1}{2})$, por conseguinte, existe $B[x_2, r_2] \subset B[x_1, r_1]$ tal que $B[x_2, r_2] \cap E_2 = \emptyset$.

Seguindo o raciocínio, construímos a sequência

$$B[x_1, r_1] \supset B[x_2, r_2] \supset \dots \supset B[x_n, r_n] \supset B[x_{n+1}, r_{n+1}]$$

e ainda

$$B[x_n, r_n] \cap E_n = \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Temos $r_n \rightarrow \infty$ com $n \rightarrow \infty$. Portanto existe $x \in E$, $x \in B[x_n, r_n]$ para todo $n \in \mathbb{N}$ mas $x \notin E_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$x \notin E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

o que é um absurdo. Logo, E é de 2ª categoria. □

Teorema 1.6.5. (Teorema de Baire Outra Forma) *Seja E um espaço de Banach, tal que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, com F_n fechado em E para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, pelo menos um dos F_n contém uma bola aberta.*

Corolário 1.6.1. *Todo espaço de Banach não é enumerável.*

Demonstração. Supor $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \Rightarrow X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}$, isso é um absurdo. Pois contradiz o teorema anterior. □

Definição 1.6.5. *Seja $\{x_n\} \subset X$, a série associada a essa sequência é*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

A expressão $S_N = x_1 + x_2 + \dots + x_N$ chama-se soma parcial de “ordem” N da série. Dizemos que:

- $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge se $\{S_N\}$ converge;
- $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge absolutamente se $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$.

Lema 1.6.5. *Seja X um espaço de Banach. Então*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

converge em X se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $N \in \mathbb{N} \forall n > N$ e $\forall p \in \mathbb{N}$

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right\| < \varepsilon$$

Teorema 1.6.6. X é um espaço de Banach se e só se para toda série neste espaço que converge absolutamente é convergente.

Demonstração. $\Rightarrow$) Seja X um espaço de Banach e

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

converge absolutamente, isso implica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$$

converge para $\mathbb{R}$. Então para todo $\varepsilon > 0$ existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ e para todo $p \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| < \varepsilon.$$

Donde,

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| < \varepsilon.$$

Então $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

$\Leftarrow$) Seja X um espaço normado tal que para toda série que converge absolutamente é convergente.

Seja $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy, então para todo $\varepsilon > 0$ existe um N_ε tal que para todos $m, n > N_\varepsilon$ temos $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

Tome

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{2} \exists n_1 \text{ tal que } \|x_{n_1} - x_m\| < \frac{1}{2} \quad \forall m > n_1 \\ \varepsilon &= \frac{1}{2^2} \exists n_2 > n_1 \text{ tal que } \|x_{n_2} - x_m\| < \frac{1}{2^2} \quad \forall m > n_2 \Rightarrow \|x_{n_1} - x_{n_2}\| < \frac{1}{2} \\ \varepsilon &= \frac{1}{2^3} \exists n_3 > n_2 \text{ tal que } \|x_{n_3} - x_m\| < \frac{1}{2^3} \quad \forall m > n_3 \Rightarrow \|x_{n_2} - x_{n_3}\| < \frac{1}{2^2} \end{aligned}$$

Assim construímos uma subsequência $\{x_{n_k}\}$ tal que

$$\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\| \leq \frac{1}{2^k} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Considere a série:

$$x_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$$

e note que

$$\|x_{n_1}\| + \sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq \|x_{n_1}\| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < +\infty.$$

Note que

$$S_N = x_{n_1} + (x_{n_2} - x_{n_1}) + (x_{n_3} - x_{n_2}) + \dots + (x_{n_{N+1}} - x_{n_N}) = x_{n_{N+1}}$$

Então $\{x_{n_k}\}$ converge. Logo $\{x_n\}$ converge e, portanto X é de Banach. $\square$

Definição 1.6.6. Uma base de Schauder em um espaço de Banach X é uma sequência $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que para todo $x \in X$ existe um único $c_n(x) \in \mathbb{K}$ de forma que:

1. $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) e_n$;
2. $x \longrightarrow c_n(x)$ é uma funcional linear contínua para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.6.7. Um espaço de Banach que possui uma base de Schauder é separável.

Demonstração. Vamos supor que X é de Banach e existe $\{e_n\}$ tal que para todo

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) e_n.$$

Seja

$$S = \left\{ x = \sum_{k=1}^n q_k e_k \mid q_k \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Vamos mostrar que S é denso em X . Seja $\varepsilon > 0$. Temos para todo $x \in X$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n,$$

existe um N tal que

$$\left\| x - \sum_{n=1}^N c_n e_n \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja $M = \max_{1 \leq n \leq N}$ existe $q_1, q_2, \dots, q_N \in \mathbb{Q}$ tal que $|c_n - q_n| < \frac{\varepsilon}{2MN}$ com $n = 1, 2, \dots, N$. Então,

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{n=1}^N q_n e_n \right\| &= \left\| x - \sum_{n=1}^N c_n e_n + \sum_{n=1}^N c_n e_n - \sum_{n=1}^N q_n e_n \right\| \\ &\leq \left\| x - \sum_{n=1}^N c_n e_n \right\| + \sum_{n=1}^N |c_n - q_n| \|e_n\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2MN} MN = \varepsilon \end{aligned}$$

e como S é enumerável, vem que X é separável. $\square$

1.7 Normas Equivalentes - Elementos de Teoria de Aproximação em Espaços Normados

Definição 1.7.1. *Sejam V um espaço vetorial e $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$. Vamos dizer que $\|\cdot\|_1$ é subordinada a norma $\|\cdot\|_2$ se existe $c > 0$ tal que $\|x\|_1 \leq c\|x\|_2$ para todo $x \in V$.*

Duas normas se chamam equivalentes ($\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$) se elas são subordinadas uma à outra.

Exemplo 1.7.1. *Seja o espaço vetorial $V = C[0, 1]$ com*

$$\|x\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)| \quad \text{e} \quad \|x\|_1 = \int_0^1 |x(t)| dt$$

Temos que $\|\cdot\|_1$ é subordinada a $\|\cdot\|$ para todo $x \in C[0, 1]$

$$\|x\|_1 = \int_0^1 |x(t)| dt \leq \int_0^1 \left[\max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)| \right] dt = \|x\| \Rightarrow \|x\|_1 \leq \|x\| \quad \forall x \in C[0, 1]$$

Porém $\|\cdot\|$ não é subordinada a norma $\|\cdot\|_1$. Considere a sequência de funções:

$$x_n = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ n^2 \left(t - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right), & \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ n^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} - t \right), & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Note que $\|x_n\| = n \rightarrow \infty$ com $n \rightarrow \infty$, mas

$$\|x_n\| = \int_0^1 |x_n(t)| dt = 1.$$

Teorema 1.7.1. Em $\mathbb{R}^n$ todas as normas são equivalentes entre si.

Demonstração. Vamos mostrar que para todo $\|\cdot\|$ em $\mathbb{R}^n$ é equivalente a $\|\cdot\|_1$, sendo $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$, para todo $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Seja $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ uma base canônica em $\mathbb{R}^n$ e seja $M = \max_{1 \leq i \leq n} \|e_i\|$,

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n\| \leq |x_1| \|e_1\| + |x_2| \|e_2\| + \dots + |x_n| \|e_n\| \\ &\leq M(|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|) = M\|x\|_1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Seja $X = \{\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1\}$ e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \|x\|$$

Vamos provar que f é Lipschitz. Então,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq M\|x - y\|_1 \\ |f(x) - f(y)| &\leq M\|x - y\|_1 \end{aligned}$$

Logo f é Lipschitz e f é contínua em X .

Seja $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_1 = 1\}$, que é compacto, em $\mathbb{R}^n$. Pelo Teorema de Weierstrass, existe $d > 0$ tal que $f(x) \geq d$ para todo $x \in S$. Seja $x \in \mathbb{R}^n$ com $x \neq 0$ então,

$$f\left(\frac{x}{\|x\|_1}\right) \geq d \Rightarrow \left\|\frac{x}{\|x\|_1}\right\| \geq d \Rightarrow \|x\| \geq d\|x\|_1$$

ou

$$\|x\|_1 \leq \frac{1}{d}\|x\|$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, como queríamos demonstrar. □

Definição 1.7.2. Sejam X e Y dois espaços normados. $J : X \rightarrow Y$ chama-se homeomorfismo de X em Y se:

- i) J é bijetora;
- ii) J e J^{-1} são contínuas.

Corolário 1.7.1. Todos os espaços normados sobre $\mathbb{R}$ de mesma dimensão finita são homeomorfos entre si.

Demonstração. Seja V , tal que $\dim V = n$, então $V \cong \mathbb{R}^n$. Vamos provar que $V = \{\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_V\}$ é homeomorfo a $\{\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1\} = X$. Defina

$$J : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad Jx = x \quad J : V \longrightarrow X.$$

Existe c_1 tal que $\|x\|_V \leq c_1 \|x\|_1$ e existe c_2 tal que $\|x\|_1 \leq c_2 \|x\|_V$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\begin{aligned} \|Jx\|_1 &\leq c_2 \|x\|_V \\ \|J^{-1}x\|_V &\leq c_1 \|x\|_1. \end{aligned}$$

□

Corolário 1.7.2. *Todo espaço normado de dimensão finita é completo.*

Demonstração. Seja Y um subespaço de dimensão finita de um espaço normado X . Agora, seja y_m uma sequência de Cauchy qualquer em Y . Seja $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ uma base Y . Então, $y_m = \alpha_1^{(m)} e_1 + \dots + \alpha_n^{(m)} e_n$. Dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que

$$c \sum_{j=1}^n \left| \alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)} \right| \leq \left\| \sum_{j=1}^n \left(\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)} \right) e_j \right\| = \|y_m - y_r\| < \varepsilon,$$

para algum $c > 0$. Assim,

$$\left| \alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)} \right| \leq \sum_{j=1}^n \left| \alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(r)} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall m, r > N \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Logo $(\alpha_j^{(m)})$ é de Cauchy, $j = 1, 2, \dots, n$ e, portanto $\alpha_j^{(m)} \rightarrow \alpha_j$ quando $m \rightarrow \infty$.

Defina $y = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \in Y$. Temos,

$$\|y_m - y\| = \left\| \sum_{j=1}^n \left(\alpha_j^{(m)} - \alpha_j \right) e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^n \left| \alpha_j^{(m)} - \alpha_j \right| \|e_j\| \rightarrow 0$$

quando $m \rightarrow \infty$. Portanto $y_m \rightarrow y$. Logo Y é completo. □

Corolário 1.7.3. *Em um espaço normado, qualquer subespaço de dimensão finita é fechado.*

Demonstração. Como o espaço é de dimensão finita, o subespaço é completo, logo necessariamente fechado como subespaço. □

Exemplo 1.7.2. *Em um espaço normado, todo conjunto completo é fechado. Em espaço de Banach, todo subconjunto fechado é completo.*

Definição 1.7.3. Seja $m \subset X$, M um conjunto num espaço normado. M é completo se para toda sequência de Cauchy $\{x_n\} \subset M$ converge para um ponto em M .

Teorema 1.7.2. Um espaço de Banach de dimensão infinita não possui uma base de Hamel enumerável.

Demonstração. Suponha por absurdo que X possui uma base de Hamel enumerável $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ então, $X = \mathcal{L}\{e_j\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $L_n = \mathcal{L}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Obviamente $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$. Para todo n temos L_n fechado. Pelo Teorema de Baire existe um n_0 tal que L_{n_0} contém uma bola aberta. Contradição, pois um subespaço próprio de um espaço normado não contém nenhuma bola aberta. $\square$

Definição 1.7.4. Seja $L \subset X$ um subconjunto vetorial fechado de um espaço normado X , e seja $x \in X$. Dizemos que $y \in L$ é um vetor de melhor aproximação de x em L se,

$$\|x - y\| = d(x, L),$$

ou

$$\|x - y\| = \inf_{l \in L} \|x - l\|$$

Teorema 1.7.3. Seja X um espaço normado e $L \subset X$ subespaço com $\dim L < +\infty$. Então para todo $x \in X$ existe pelo menos um $y \in L$ tal que y é melhor aproximação de x em L .

Demonstração. Suponha $\dim L = n$ isso implica que $L \cong \mathbb{R}^n$. Assim $L = \{\mathbb{R}^n, \|\cdot\|\}$ onde $\|\cdot\|$ é equivalente a $\|\cdot\|_1$ pois existe $c_1, c_2 > 0$ tal que $c_1\|x\|_1 \leq \|x\| \leq c_2\|x\|_1$.

Temos que provar que existe um $x \in L$ tal que $\|x - y\| = \inf_{\ell \in L} \|x - \ell\|$.

Considere $f(\ell) = \|x - \ell\|$, $\ell \in L$, então provar que existe $y \in L$ tal que $f(y) = \inf_{\ell \in L} f(\ell) = d = d(x, L)$.

$$\text{a) } \inf_{\ell \in L} \|x - \ell\| = 0 \Rightarrow d(x, L) = 0 \Rightarrow x \in \bar{L} \Rightarrow y = x.$$

$$\text{b) } d(x, L) = d > 0.$$

Vamos provar que $f(\ell)$ é contínua em $\{\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1\}$. Para todo $\ell_1, \ell_2 \in L$ temos,

$$\begin{aligned} |f(\ell_1) - f(\ell_2)| &= | \|x - \ell_1\| - \|x - \ell_2\| | \leq \| (x - \ell_1) - (x - \ell_2) \| \\ &= \| \ell_1 - \ell_2 \| \leq c_2 \| \ell_1 - \ell_2 \|_2 \\ |f(\ell_1) - f(\ell_2)| &\leq c_2 \| \ell_1 - \ell_2 \|_1 \end{aligned}$$

Seja

$$R > \frac{\|x\| + d}{c_1}.$$

Provemos que para todo $l \in L \setminus B[0, R]$ logo $f(l) > d$. De fato

$$\begin{aligned} f(\ell) &= \|\ell - x\| \geq |\|\ell\| - \|x\|| = \|\ell\| - \|x\| \geq c_1 \|\ell\|_1 - \|x\| \\ &> c_1 R - \|x\| > \frac{\|x\| + d}{c_1} \cdot c_1 - \|x\| = d. \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Weierstrass, existe um $y \in B[0, R]$ tal que $f(y) = d$. $\square$

Definição 1.7.5. Diz-se que um espaço normado X é estritamente normado se para todo $x, y \in X$, com $x \neq y$, tem-se

$$\|x\| = \|y\| = R \Rightarrow \|x + y\| < 2R$$

.

Exemplo 1.7.3. Todo espaço normado com produto interno é estritamente normado. Para provar basta utilizarmos a identidade do paralelogramo. Pela identidade do paralelogramo temos

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \Rightarrow \|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x - y\|^2$$

se $\|x\| = \|y\|$ então

$$\|x + y\|^2 = 4R^2 - \|x - y\|^2 < 4R^2 \quad \forall x \neq y.$$

Exemplo 1.7.4. O espaço $C[a, b]$ não é estritamente normado. Basta tomar um contra exemplo. Sejam

$$x(t) = 1 \quad \text{e} \quad y(t) = \frac{t - a}{b - a}$$

Vamos verificar que não satisfaz a desigualdade acima. Sejam

$$\|x(t)\| = 1 \quad \text{e} \quad \|y(t)\| = \sup_{t \in [a, b]} |y(t)| = \sup_{t \in [a, b]} \left| \frac{t - a}{b - a} \right| = 1$$

pois para todo $t < b \Rightarrow t - a < b - a$ logo, $\frac{t - a}{b - a} < 1$. Então

$$\|x(t) + y(t)\| = \sup_{t \in [a, b]} \left| 1 + \frac{t - a}{b - a} \right| = 2 = 2R.$$

Exemplo 1.7.5. Vamos provar que ℓ_p é estritamente normado para $p > 1$. Para isso, seja $x \neq y \in \ell_p$ tais que $\|x\| = \|y\| = R$. Seja

$$\|x\|^p = \|y\|^p \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p = \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p$$

Então

$$\begin{aligned}\|x+y\|^p &= \sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p \leq 2^p \sum_{i=1}^{\infty} (|x_i|^p + |y_i|^p) = 2^p \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p + 2^p \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p \\ \|x+y\|^p &\leq 2 \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p + \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} < 2 \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + 2 \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} < 2(\|x\| + \|y\|) = 2R.\end{aligned}$$

Teorema 1.7.4. *Seja X um espaço estritamente normado e $L \subset X$ um subespaço fechado. Então para todo $x \in X$ não existe mais que uma melhor aproximação de x em L .*

Demonstração. Suponha que para $x \in X$ existem $y_1, y_2 \in L$ tal que

$$\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = d = d(x, L).$$

Por um lado temos

$$\|(x - y_1) + (x - y_2)\| = \|2x - (y_1 + y_2)\| = 2\|x - \frac{y_1 + y_2}{2}\| \geq 2d.$$

Por outro lado

$$\|(x - y_1) + (x - y_2)\| \leq \|x - y_1\| + \|x - y_2\| = d + d = 2d.$$

Logo,

$$\|(x - y_1) + (x - y_2)\| = 2d$$

implica que X não é estritamente normado o que é uma contradição. Portanto vale a tese. $\square$

Teorema 1.7.5. *Seja X um espaço normado e seja $L \subset X$ um subespaço vetorial fechado $L \neq X$. Então, para todo $0 < \varepsilon < 1$ existe $u_\varepsilon \in X \setminus L$ tal que:*

$$i) \|u_\varepsilon\| = 1;$$

$$ii) \|u_\varepsilon - l\| \geq 1 - \varepsilon \text{ para todo } l \in L.$$

Demonstração. Seja $u_0 \in X \setminus L$ e seja $d = d(u_0, L) > 0$

$$d = \inf_{l \in L} \|u_0 - l\|.$$

Para todo $0 < \varepsilon < 1$ existe $l_\varepsilon \in L$ tal que pela definição de cota superior temos

$$d \leq \|u_0 - l_\varepsilon\| < \frac{d}{1 - \varepsilon}.$$

Definindo $u_\varepsilon = \frac{u_0 - l_\varepsilon}{\|u_0 - l_\varepsilon\|}$, vamos provar que u_ε satisfaz i) e ii).

A prova da primeira condição é óbvio por causa da construção de u_ε . Para provar a segunda condição temos:

$$\|u_\varepsilon - l\| = \left\| \frac{u_0 - l_\varepsilon}{\|u_0 - l_\varepsilon\|} - l \right\| = \frac{\|u_0 - \overbrace{(l_\varepsilon + \|u_0 - l_\varepsilon\| \cdot l)}^{\in L}\|}{\|u_0 - l_\varepsilon\|} \geq \frac{d}{1-\varepsilon} = 1 - \varepsilon$$

como queríamos demonstrar. □

1.8 Complemento de um Espaço Normado - Integral de Lebesgue

Definição 1.8.1. *Seja X um espaço normado e Y um espaço de Banach, chama-se complemento de X se em Y existe um subespaço $Y_0 \subset Y$ tal que:*

- i) Y_0 é denso em Y ;
- ii) Y_0 é isométrico a X como espaço normado.

Exemplo 1.8.1. *Seja $P[a, b]$ o conjunto dos polinômios definidos em $[a, b]$. Temos que*

$$\|p\| = \max_{a \leq t \leq b} |p(t)|$$

Com isso, o conjunto $C[a, b]$ é o complemento de $P[a, b]$.

Lema 1.8.1. *Seja Y um espaço normado e $Y_0 \subset Y$ denso. Suponha que qualquer sequência de Cauchy em Y_0 converge para um ponto em Y , então Y é de Banach.*

Demonstração. Seja $\{x_n\}$ uma sequência de Cauchy em Y . Como $\overline{Y_0} = Y$ implica que para todo $x_n \in Y$ existe $y_n \in Y_0$ tal que $\|x_n - y_n\| < \frac{1}{n}$ para todo n .

Vamos provar que $\{y_n\} \subset Y_0$ é de Cauchy.

$$\|y_n - y_m\| \leq \|y_n - x_n\| + \|x_n - y_m\| + \|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \|x_n - x_m\| \rightarrow 0$$

com $n, m \rightarrow \infty$. Portanto existe $y \in Y$ tal que $y_n \rightarrow y$. Então

$$\|x_n - y\| \leq \|x_n - y_n\| + \|y_n - y\| \leq \frac{1}{n} + \|y_n - y\| \rightarrow 0.$$

Logo, $x_n \rightarrow y$ e portanto Y é de Banach. □

Definição 1.8.2. Sejam X e Y dois espaços normados, $A \subset X$ e $f_0 : A \longrightarrow Y$ uma aplicação. Uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ se chama extensão de f_0 se $f(x) = f_0(x)$ para todo $x \in A$

Lema 1.8.2. Seja X um espaço normado e Y um espaço de Banach e seja $A \subset X$ um subconjunto denso em X . Então para todo $f_0 : A \longrightarrow Y$ uniformemente contínua existe uma única extensão $f : X \longrightarrow Y$ que é uniformemente contínua.

Demonstração. Seja $x \in X$. Como $\overline{A} = X$ então existe $x_n \in A$ tal que $x_n \longrightarrow x$ implica que $\{x_n\}$ é de Cauchy. Como f é uniformemente contínua então $\{f_0(x_n)\}$ é de Cauchy. Como Y é de Banach existe $y \in Y$ tal que $f_0(x_n) \longrightarrow y$. Seja $y_n \in A : y_n \longrightarrow x$. Temos que provar que $f_0(y_n) \longrightarrow y$. Temos que,

$$\|f_0(y_n) - y\| \leq \|f_0(y_n) - f_0(x_n)\| + \|f_0(x_n) - y\| \quad (1.1)$$

Daí, temos $\|f_0(y_n) - f_0(x_n)\| \longrightarrow 0$ e $\|f_0(x_n) - y\| \longrightarrow 0$.

Para provar 1.1, seja $\varepsilon > 0$ e seja $\delta > 0$ tal que $\|f_0(x) - f_0(y)\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Para todo $x, y \in A$ temos $\|x - y\| < \delta$. Como

$$\begin{aligned} x_n \longrightarrow x &\Rightarrow \exists n_1 \text{ tal que } \forall n \geq n_1 \quad \|x_n - x\| < \frac{\delta}{2} \\ y_n \longrightarrow x &\Rightarrow \exists n_2 \text{ tal que } \forall n \geq n_2 \quad \|y_n - x\| < \frac{\delta}{2} \end{aligned}$$

Seja $N = \max\{n_1, n_2\}$ para todo $n > N$ temos

$$\|x_n - y_n\| \leq \|x_n - x\| + \|x - y_n\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto

$$\|f_0(y_n) - f_0(x_n)\| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \|f_0(y_n) - f_0(x_n)\| \longrightarrow 0$$

com $n \rightarrow \infty$. Defina $f : X \longrightarrow Y$ tal que $f(x) = y$. Vamos provar que f é extensão de f_0 e que é a única. Seja $x_n = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então

$$f(x_n) \longrightarrow y = f(x) \Rightarrow f_0(x) = f(x) \quad \forall x \in A.$$

Agora vamos provar que f é uniformemente contínua. Logo para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|f_0(\tilde{x}) - f_0(\tilde{y})\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall \tilde{x}, \tilde{y} \in A$$

com $\|\tilde{x} - \tilde{y}\| < \delta$. Para todo $x, y \in X$ temos

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|f(x) - f_0(\tilde{x})\| + \|f_0(\tilde{x}) - f_0(\tilde{y})\| + \|f_0(\tilde{y}) - f(y)\|.$$

Suponha $\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Como A é denso existe $\{x_n\} \subset A$ e $\{y_n\} \subset A$ tal que $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$. Então

$$\|x_n - y_n\| \leq \|x_n - x\| + \|x - y\| + \|y - y_n\| < \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta$$

e

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|f(x) - f_0(x_n)\| + \|f_0(x_n) - f_0(y_n)\| + \|f_0(y_n) - f(y)\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

sendo que $\|f(x) - f_0(x_n)\| < \frac{\varepsilon}{3}$, $\|f_0(x_n) - f_0(y_n)\| < \frac{\varepsilon}{3}$ e $\|f_0(y_n) - f(y)\| < \frac{\varepsilon}{3}$ pra um n grande.

Como duas funções que coincidem num conjunto denso são iguais em todo espaço, logo temos a unicidade. $\square$

Teorema 1.8.1. *Para qualquer espaço normado X , sempre existe um espaço de Banach Y que é complemento de X e todos os complementos de X são isométricos entre si.*

Demonstração. Seja $\tilde{X}$ o conjunto de todas as sequências de Cauchy em X . Diremos que $\{x_n\} \sim \{y_n\} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$. Seja $\hat{X}$ o conjunto de todas as classes de equivalência em $\tilde{X}$.

Primeiro devemos provar que $\hat{X}$ é um espaço vetorial com as operações

$$\begin{aligned} + & : \hat{x} + \hat{y} = \widehat{\{x_n + y_n\}} \\ \cdot & : \alpha \hat{x} = \widehat{\{\alpha x_n\}}. \end{aligned}$$

Vamos provar para adição. Tome $\{x'_n\} \in \hat{x}$ e $\{y'_n\} \in \hat{y}$. Então,

$$\{x'_n\} \sim \{x_n\} \Leftrightarrow \|x'_n - x_n\| \rightarrow 0$$

$$\{y'_n\} \sim \{y_n\} \Leftrightarrow \|y'_n - y_n\| \rightarrow 0$$

logo

$$\{x_n + y_n\} \sim \{x'_n + y'_n\} \Leftrightarrow \|(x_n + y_n) - (x'_n + y'_n)\| \leq \|x_n - x'_n\| + \|y_n - y'_n\| \rightarrow 0$$

o que prova que “+” está bem definido. Idem para provar “·”.

Considere que $\hat{X}$ seja um espaço vetorial. Então considere $\tilde{X}$ e tome $N = \{\hat{x} = \{x_n\} | x_n \rightarrow 0\}$ então $\hat{X} = \tilde{X}/N$.

Defina $\|\hat{x}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$ com $\{x_n\} \in \hat{x}$.

- a) $|\|x_n\| - \|x_m\|| \leq \|x_n - x_m\| \longrightarrow 0$. Isso implica que $\{\|x_n\|\}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$, então $\{\|x_n\|\}$ é convergente e existe o limite $\|\hat{x}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$.
- b) $\{x'_n\} \sim \{x_n\}$, então $|\|x'_n\| - \|x_n\|| \leq \|x'_n - x_n\| \longrightarrow 0$ com $n \rightarrow \infty$ implica que o limite $\|\hat{x}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$ está bem definido, ou seja, não depende de representante.

Vamos provar que $\|\hat{x}\|$ é de fato uma norma.

- i) $\|\hat{x}\| \geq 0$, $\|\hat{x}\| = 0 \Rightarrow \lim \|x_n\| = 0 \Rightarrow \lim \|x_n - 0\| = 0 \Rightarrow \{x_n\} \sim \{0\} \Rightarrow \hat{x} = \hat{0}$.
- ii) $\|\alpha \hat{x}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\alpha x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha| \|x_n\| = |\alpha| \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = |\alpha| \|\hat{x}\|$.
- iii) $\|x_n + y_n\| \leq \|x_n\| + \|y_n\|$. Aplicando o limite em ambos os lados obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n + y_n\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| \Rightarrow \|\hat{x} + \hat{y}\| \leq \|\hat{x}\| + \|\hat{y}\|$$

.

A partir daqui está faltando provar os seguintes itens:

1. Encontrar $X_0 \subset \hat{X}$ tal que $X \cong X_0$ (são isométricos) com X_0 denso;
2. $\hat{X}$ é de Banach;
3. Todos os complementos são isométricos.

1) Seja $X_0 \subset \hat{X}$, onde cada classe de equivalência compreende uma sequência constante $\hat{x} = \{x, \widehat{x, \dots, x}, \dots\}$. É fácil ver que

$$J : X \longrightarrow X_0 \text{ e } Jx = \{x, \widehat{x, \dots, x}, \dots\}$$

logo J é isometria.

$$\|Jx\|_{\hat{X}} = \|\{x, \widehat{x, \dots, x}, \dots\}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x\| = \|x\|_X.$$

Vamos provar que X_0 é denso em $\hat{X}$. Seja $\hat{x} \in \hat{X}$ e $\hat{x} = \{x_1, x_2, \dots, \widehat{x_n, \dots}, \dots\}$. Provar que existe $\hat{x}_n \in X_0$ tal que $\hat{x}_n \longrightarrow \hat{x}$ em $\hat{X}$

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= \{x_1, \widehat{x_1, \dots, x_1}, \dots\} \\ \hat{x}_2 &= \{x_2, \widehat{x_2, \dots, x_2}, \dots\} \\ &\vdots \\ \hat{x}_n &= \{x_n, \widehat{x_n, \dots, x_n}, \dots\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

logo $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{x}_n - \hat{x}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\| = 0$ pois $\{x_n\}$ é de Cauchy.

2) $\widehat{X}$ é de Banach. Pelo Lema 2.8.1, basta verificar que para toda sequência de Cauchy em X_0 converge. Seja $\hat{x}_n$ uma sequência de Cauchy em X_0 , ou seja, $\hat{x}_n \in X_0$ para todo n e $\|\hat{x}_n - \hat{x}_m\| \rightarrow 0$ com $m, n \rightarrow \infty$. Note que

$$\|\hat{x}_n - \hat{x}_m\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\| = \|x_n - x_m\| \rightarrow 0$$

com $n, m \rightarrow \infty$, ou seja, $\{x_n\}$ é de Cauchy em X , então $\{\hat{x}_n\} = \hat{x} \in \widehat{X} \Rightarrow \hat{x}_n \rightarrow \hat{x}$. Logo X_0 é de Banach.

3) Suponha que existem dois complementos Y_1, Y_2 , do espaço X . Então existem $Y'_1 \cong X$ e $Y'_2 \cong X$ no que implica em $Y'_1 \cong Y'_2$ logo existe $\tilde{J} : Y'_1 \rightarrow Y'_2$ que é isometria e portanto existe $\tilde{J}^{-1} : Y'_2 \rightarrow Y'_1$. Onde

$$\begin{aligned} \tilde{J} \cdot \tilde{J}^{-1}y &= Iy \quad \forall y \in Y'_2 \\ \tilde{J}^{-1} \cdot \tilde{J}x &= Ix \quad \forall x \in Y'_1. \end{aligned}$$

Como Y'_1 e Y'_2 são densos em Y_1 e Y_2 , podemos entender $\tilde{J}$ e $\tilde{J}^{-1}$ a J e J^{-1} definidas em Y_1 e Y_2 respectivamente e que coincide com $\tilde{J}$ e $\tilde{J}^{-1}$ em Y'_1 e Y'_2 , de modo que $J \cdot J^{-1} = I$ e $J^{-1} \cdot J = I$. Daí em diante vamos verificar que J é uma isometria.

Seja $\|Jx\| = \|x\|$ par todo $x \in Y_1$. Existe $x_n : x_n \rightarrow x$ com $x_n \in Y'_1$, então

$$\|x_n\| = \|\tilde{J}x_n\| = x_n.$$

Passando o limite concluímos que J é isometria. Portanto Y_1 e Y_2 são isométricos. □

Lembrando: $\mathcal{L}_p[a, b] = \{C[a, b], \|\cdot\|_p\}$, onde

$$\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definição 1.8.3. $L[a, b]$ é o complemento de $\mathcal{L}[a, b]$ com $p \geq 1$.

Lema 1.8.3. Para qualquer $x \in L_1[a, b]$ existe um único

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b x_n(t) dt$$

sendo $\{x_n\} \in \widehat{x}$, que não depende da escolha de representante em classe de equivalência.

Demonstração. Seja $\{x_n\}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}_1[a, b]$, isso implica que $\{\int_a^b x_n(t) dt\}$ é

uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Então

$$\left| \int_a^b x_n(t) dt - \int_a^b x_m(t) dt \right| = \left| \int_a^b [x_n(t) - x_m(t)] dt \right| \leq \int_a^b |x_n(t) - x_m(t)| dt = \|x_n - x_m\|_{\mathcal{L}[a,b]} \longrightarrow 0$$

com $m, n \rightarrow \infty$. Seja

$$\{y_n\} \sim \{x_n\} \Leftrightarrow \|x_n - y_n\|_{\mathcal{L}[a,b]} \longrightarrow 0$$

com $n \rightarrow \infty$. Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b x_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b y_n(t) dt$$

logo,

$$\left| \int_a^b x_n(t) dt - \int_a^b y_n(t) dt \right| \leq \|x_n - y_n\|_{\mathcal{L}[a,b]} \longrightarrow 0$$

com $n \rightarrow \infty$. O que nos diz que há independência da escolha do representante, portanto a unicidade, logo, como no enunciado existe um único limite, como queríamos demonstrar. $\square$

Definição 1.8.4. *Seja uma função $f(t)$ na qual está definida em qualquer sequência em $[a, b]$, $f(t)$ se diz integrável (ou Lebesgue integrável) se existe $x_n(t) \in C[a, b]$ tal que:*

- i) $\{x_n\}$ é fundamental ou de Cauchy em $\mathcal{L}_1[a, b]$;
- ii) $x_n(t) \longrightarrow f(t)$ qualquer sequência em $[a, b]$.

O valor $I = \lim \int_a^b x_n(t) dt = (\mathcal{L}) \int_a^b f(t) dt$.

Exemplo 1.8.2. *Seja $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ definida em $[0, 1]$. Temos que*

$$x_n(t) = \begin{cases} \sqrt{n+1}, & 0 \leq t \leq \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{\sqrt{t}}, & \frac{1}{n+1} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

sendo $x_n \in C[0, 1]$ e $x_n(t) \longrightarrow f(t)$ qualquer sequência em $[0, 1]$. Logo,

$$\int_0^1 |x_n(t) - x_m(t)| dt.$$

Suponha $m > n$, então

$$\begin{aligned} \int_0^1 |x_n(t) - x_m(t)| dt &= \int_0^{\frac{1}{n+1}} |x_n(t) - x_m(t)| dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{m+1}} (\sqrt{m+1} - \sqrt{n+1}) dt + \int_{\frac{1}{m+1}}^{\frac{1}{n+1}} (\sqrt{t} - \sqrt{n+1}) dt \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Qualquer integral imprópria pode ser calculada dessa maneira.

Lema 1.8.4. $C[a, b]$ é denso em $L_p[a, b]$, para $p \geq 1$.

Demonstração. Para cada $x \in C[a, b]$, considere

$$Ix = \int_a^b x(t) dt$$

sendo que I é limitado. Então

$$|Ix| \leq \int_a^b 1 \cdot |x(t)| dt \leq \|1\|_q \|x\|_q = (b-a)^{\frac{1}{q}} \|x\|_p.$$

Temos o seguinte

$$L_p[a, b] \supset C[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$I_L : L_p[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é a integral de Lebesgue vista como extensão de I definida em $C[a, b]$ que é denso em $L_p[a, b]$. $\square$

Teorema 1.8.2. Para todo $p \geq 1$, todo $x \in L_p[a, b]$ corresponde a uma única classe de equivalência de funções quase sempre iguais entre si em $[a, b]$ tal que $x(t)$ é mensurável e $|x|^p$ é Lebesgue Integrável em $[a, b]$. O espaço $L_p[a, b]$ com a norma

$$\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

é um espaço de Banach.

Demonstração. Já sabemos que $L_p[a, b]$ é um espaço normado. Resta provar que é um espaço completo. Para isso, seja x_n com $n = 1, 2, \dots$ uma sequência de Cauchy em $L_p[a, b]$. Então, dado $\varepsilon > 0$ existe $M = M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_a^b |x_n - x_m|^p = \|x_n - x_m\|_p^p < \varepsilon^p \text{ sempre que } m, n \geq M.$$

Seja y_k com $1 \leq k < \infty$ uma subsequência de x_n tal que $\|y_{k+1} - y_k\| < 2^{-k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Considere a função

$$y : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad y(c) = |y_1(c)| + \sum_{k=1}^{\infty} |y_{k+1}(c) - y_k(c)|. \quad (*)$$

Sabemos que y é mensurável e não-negativa. Além disso,

$$|y(c)|^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(|y_1(c)| + \sum_{k=1}^n |y_{k+1}(c) - y_k(c)| \right)^p.$$

Daí, temos que, pelo Lema de Fatou

$$\int_a^b |y|^p dt \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left(|y_1| + \sum_{k=1}^n |y_{k+1} - y_k| \right)^p dt.$$

Elevando ambos os membros a $\frac{1}{p}$ e usando a desigualdade de Minkowski, obtemos

$$\left(\int_a^b |y|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\|y_1\|_p + \sum_{k=1}^n \|y_{k+1} - y_k\|_p \right) \leq \|y_1\|_p + 1.$$

Então, definindo $A = \{c \in [a, b] : y(c) < \infty\}$, da inequação anterior, podemos concluir que $t([a, b] - A) = 0$. Logo a série (*) converge exceto talvez no conjunto de medida nula $[a, b] - A$, isto é, a série converge t -quase sempre. Segue que a função

$$g \cdot \chi_A \in \|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

onde χ_A é a função característica de A . Defina então $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ por

$$x(c) = \begin{cases} y_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (y_{k+1}(c) - y_k(c)), & \text{se } c \in A, \\ 0, & \text{se } c \notin A. \end{cases}$$

Como $y_k = y_1 + (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + \cdots + (y_{k+1} - y_k)$, temos

$$|y_k(c)| \leq |y_1(c)| + \sum_{j=1}^{k-1} |y_{j+1}(c) - y_j(c)| \leq y(c)$$

para todo $c \in y_k(c) \rightarrow x(c)$ para todo $c \in A$, isto é, a sequência y_k converge para x t -quase sempre. Pelo Teorema da Convergência Dominada, segue que

$$x \in \|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Como $|x - y(k)|^p \leq (|x| + |y_k|)^p \leq (2y)^p \cdot \chi_A$ t -quase sempre e $\lim_{k \rightarrow \infty} |x - y(k)|^p = 0$ t -quase

sempre, novamente pelo Teorema da Convergência Dominada temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b |x - y(k)|^p dt = \int_a^b 0 dt = 0.$$

Daí concluímos que $y_k \rightarrow x$ em

$$\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

e portanto $y_k \rightarrow x$ em $L_p[a, b]$. Assim, x_n é uma sequência de Cauchy que tem uma subsequência y_k que converge para x . Segue imediatamente que $x_n \rightarrow x$ em $L_p[a, b]$. $\square$

Observação 1.8.1. O Lema de Fatou e o Teorema da Convergência estão demonstrados em (FERRA, 2012, p. 40-42).

Definição 1.8.5. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, chama-se $\text{supp } f = \{t \in [a, b] | f(t) \neq 0\}$. Sendo que $\text{supp } f$ denota o suporte (relativamente a $[a, b]$) de f .*

Definição 1.8.6. *Diremos que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é finita em $[a, b]$ se $\text{supp } f \subset (a, b)$. f é finita em $[a, b]$ se, e somente se, existe um $\delta > 0$ tal que $f(t) = 0$ para todo $t \in [a, a + \delta]$ e $t \in [b - \delta, b]$.*

Definição 1.8.7. $C_0^\infty[a, b] = \{x \in C^\infty[a, b] \mid x \text{ é finito em } [a, b]\}$.

Teorema 1.8.3. *Para todo $p \geq 1$, $C_0^\infty[a, b]$ é denso em L_p .*

1.9 Espaço de Hilbert, Espaços de Sobolev e Derivadas Generalizadas

Os espaço de Hilbert possuem uma aproximação com os espaço euclidianos no qual não precisa estar restrita a um número finito de dimensões. Devido a isso, os espaço de Hilbert são, por larga margem os espaços de Banach mais utilizados em aplicações. Os espaços de Hilbert permitem que, de certo modo, noções intuitivas sejam aplicadas em espaços funcionais. Um bom exemplo seria que, com eles podemos generalizar os conceitos de séries de Fourier em termos de polinômios ortogonais. Os espaços de Hilbert são de importância crucial para a Mecânica Quântica. Espaços de Hilbert foram criados pelo alemão David Hilbert por volta de 1912, quando trabalhava em equações integrais.

Definição 1.9.1. *Um espaço pré-hilbertiano que é completo relativamente à norma definida pelo produto interno, se chama, espaço de Hilbert.*

Exemplo 1.9.1. Dadas as seqüências $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ e $y = (y_i)_{i=1}^{\infty}$, a expressão

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$$

define um produto interno em ℓ_2 . A convergência da série acima decorre da desigualdade de Hölder. A norma induzida claramente coincide com a norma original $\| \cdot \|_2$ de ℓ_2 .

Agora seja a expressão

$$\langle f, g \rangle = \int_X f(t) \overline{g(t)} dt$$

que define um produto interno em $L_2(X)$. A existência da integral acima decorre da desigualdade de Hölder. A norma induzida claramente coincide com a norma original $\| \cdot \|_2$ de L_2 .

Como já sabemos que ℓ_2 e $L_2(X)$ são completos nas suas respectivas normas, segue que esses espaços são espaços de Hilbert com seus respectivos produtos internos.

Teorema 1.9.1. Para qualquer espaço pré-hilbertiano E , existe um espaço de Hilbert H que é complemento de E e todos os complementos de E são isométricos entre si.

Definição 1.9.2. $\mathcal{H}^\ell[a, b] = \left\{ C^{(\ell)}[a, b], \langle \cdot, \cdot \rangle_{2, \ell} \right\}$ onde

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=0}^{\ell} \int_a^b x^{(k)}(t) \overline{y^{(k)}(t)} dt.$$

Definição 1.9.3. $H^\ell[a, b]$ é o complemento de $\mathcal{H}^\ell[a, b]$.

Observação 1.9.1. $H^\ell[a, b] = W_2^\ell[a, b]$ é o espaço de Sobolev.

Definição 1.9.4. Diz-se que $\omega \in L_2[a, b]$ é derivada generalizada de $u \in L_2[a, b]$ e escreve-se $u' = \omega$ se existe $x_n \in C^1[a, b]$ tal que

$$\begin{aligned} x_n &\longrightarrow u \text{ em } L_2 \\ x'_n &\longrightarrow \omega \end{aligned}$$

Teorema 1.9.2. $H^1[a, b] = \{u \in L_2[a, b] \mid u \text{ possui uma derivada generalizada } u' \in L_2[a, b]\}$ com o produto interno

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b u(t) \overline{v(t)} dt + \int_a^b u'(t) \overline{v'(t)} dt,$$

então $H^1[a, b]$ é um espaço de Hilbert.

Lema 1.9.1. Uma função $\omega \in L_2[a, b]$ é derivada generalizada de $\mu \in H^1[a, b]$ se, e somente se,

$$\int_a^b \omega(t) \varphi'(t) dt = - \int_a^b \omega(t) \varphi(t) dt$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty[a, b]$.

Demonstração. $\Rightarrow$) Vamos supor que $\omega = u'$ então existe um $x_n \in C^{(1)}[a, b]$ tal que $x_n \rightarrow u$ e $x'_n \rightarrow \omega$ em $L_2[a, b]$ então,

$$\int_a^b x_n(t) \varphi'(t) dt$$

resolvendo a integral acima por partes obtemos

$$x_n(t) \varphi(t) \Big|_a^b - \int_a^b x'_n(t) \varphi(t) dt.$$

Passando o $\lim_{n \rightarrow \infty}$ temos

$$\int_a^b u(t) \varphi'(t) dt = - \int_a^b \omega(t) \varphi(t) dt \quad \forall \varphi \in C_0^\infty[a, b].$$

$\Leftarrow$) Supor que $u \in H^1[a, b]$ satisfaz

$$\int_a^b u(t) \varphi'(t) dt = - \int_a^b \omega(t) \varphi(t) dt \quad \forall \varphi \in C_0^\infty[a, b].$$

Suponha $u' = \omega_1$ e provemos $\omega_1 = \omega$

$$\int_a^b u(t) \varphi'(t) dt = - \int_a^b \omega_1(t) \varphi(t) dt \Rightarrow \int_a^b [\omega(t) - \omega_1(t)] \varphi(t) dt = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty[a, b]$$

como $\omega(t) - \omega_1(t) \in L_2$, então em decorrência da densidade de C_0^∞ em L_2 existe $\varphi_n \in C_0^\infty[a, b]$ tal que $\varphi_n \rightarrow \omega - \omega_1$ em $L_2[a, b]$ isso implica que substituindo $\varphi(t)$ por $\varphi_n(t)$ em $\int_a^b [\omega(t) - \omega_1(t)] \varphi(t) dt$ e passando o limite temos o seguinte,

$$\int_a^b |\omega(t) - \omega_1(t)|^2 dt = 0 \Rightarrow \omega = \omega_1$$

em $L_2[a, b]$. □

Definição 1.9.5. Sejam E e V dois espaços normados. Diz-se que E é imerso em V e denota-se $E \sqsubset V$ se existe $J : E \rightarrow V$, operador linear limitado e injetivo, ou ainda, se existe $c > 0$ tal que $\|Jx\|_V \leq \|x\|_E$ para todo $x \in E$.

Exemplo 1.9.2. Seja $C[a, b] \subset L_2[a, b]$, assim

$$\|x\|_{L_2[a, b]} \leq c \|x\|_{C[a, b]}$$

para todo $x \in C[a, b]$. Desse modo,

$$\|x\|_{L_2[a, b]} = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_a^b 1 dt \right)^{\frac{1}{2}} \|x\|_{C[a, b]} = \sqrt{b-a} \|x\|_{C[a, b]}.$$

Teorema 1.9.3. O espaço $H^1[a, b]$ é imerso em $C[a, b]$.

Demonstração. Seja $u \in C^{(1)}[a, b]$. Existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b u(t) dt = u(c)(b-a) \Rightarrow u(c) = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b u(t) dt$$

Daí temos que

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_c^t u'(s) ds + \frac{1}{b-a} \int_a^b u(s) ds \\ |u(t)| &\leq \int_c^t |u'(s)| ds + \frac{1}{b-a} \int_a^b |u(s)| ds \\ &\leq \sqrt{b-a} \left(\int_a^b |u'(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{b-a}} \left(\int_a^b |u(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

agora tome $M = \max\{\sqrt{b-a}, \frac{1}{\sqrt{b-a}}\}$, então

$$|u(t)| \leq M \left(\int_a^b |u'(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} + M \left(\int_a^b |u(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

como $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}\sqrt{a+b}$, logo

$$|u(t)| \leq \sqrt{2}M \left(\int_a^b |u(s)|^2 ds + \int_a^b |u'(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

ou seja, $|u(t)| \leq c \|u\|_{2,1}$ para todo $u \in C^{(1)}[a, b]$.

Agora seja $u \in H^1[a, b]$. Pela densidade de $C^1[a, b]$ existe uma sequência $x_n \in C^1[a, b]$.

Seja $u = \{\hat{x}_n\}$ isso implica que $\|x_n - x_m\|_{2,1} \rightarrow 0$ com $m, n \rightarrow \infty$, logo

$$\|x_n - x_m\|_{C[a, b]} \leq c \|x_n - x_m\|_{2,1} \rightarrow 0$$

com $m, n \rightarrow \infty$, implicando que $x_n \rightarrow u \in C[a, b]$. Seja $J : u \rightarrow u$, então $\|x_n\|_{C[a, b]} < c\|x_n\|_{2,1}$, logo

$$\|u\|_{C[a, b]} \leq c\|u\|_{2,1} \quad \forall u \in H^1[a, b].$$

□

1.10 Ortogonalidade e Projeções

Segundo Botelho, Pellegrino e Teixeira (2015, p. 109), o conceito de vetores ortogonais vem da geometrização dos estudos dos espaços vetoriais através do produto interno. Como pode ser visto na Definição 1.10.2 dois vetores são ortogonais se, e somente se, o produto interno entre estes dois vetores for zero.

Definição 1.10.1. *Seja E um espaço com produto interno. Então para todo $x, y \in E$ e, não nulos, o ângulo entre x e y é um ângulo $0 \leq \varphi \leq \pi$.*

Definição 1.10.2. *Seja E um espaço com produto interno. Para todo $x, y \in E$ são ortogonais se $\langle x, y \rangle = 0$ e denota-se por $x \perp y$.*

Exemplo 1.10.1. *Seja E um espaço com produto interno sobre $\mathbb{R}$. Se para todo $x, y \in E$ ocorrer que $\|x + y\| = \|x - y\|$, então $x \perp y$. Com efeito,*

$$\begin{aligned} \|x + y\| = \|x - y\| &\Rightarrow \langle x + y, x + y \rangle = \langle x - y, x - y \rangle \\ &\Rightarrow \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &\Rightarrow \langle x, y \rangle = 0, \end{aligned}$$

ou seja, $x \perp y$.

Definição 1.10.3. *$L \subset E$ é ortogonal, se para todo $x, y \in L$, com $x \neq y$, então $x \perp y$.*

Definição 1.10.4. *Seja $L, M \subset E$. L é ortogonal a M se $\langle x, y \rangle = 0$ para todo $x \in L$ e para todo $y \in M$.*

Exemplo 1.10.2. *Dado $E = L_2[-\pi, \pi]$. Seja $L = \{x \in E \mid x \text{ é par}\}$ e $M = \{x \in E \mid x \text{ é ímpar}\}$.*

Vamos mostrar que $L \perp M$. De fato, para todo $x \in L$, e para todo $y \in M$ temos

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} x(t)y(t) dt = 0.$$

Pois, o produto de uma função par com uma função ímpar resultará em uma função ímpar cujo o resultado da integral num intervalo simétrico é zero.

Definição 1.10.5. *Seja L ortogonal em E . O conjunto L é ortonormal⁴ se $\|x\| = 1$ para todo $x \in E$, e com $x \neq 0$.*

Para demonstrar que o produto interno introduz de fato um rumo geométrico no estudo, basta demonstrarmos o Teorema de Pitágoras, no qual será enunciado e demonstrado a seguir.

Teorema 1.10.1. *Seja E um espaço com produto interno. Tome $x, y \in E$ tais que x é ortogonal a y , então*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Demonstração. Como $x \perp y$ então $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle = 0$. Logo,

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

□

Lema 1.10.1. *Sejam $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset E$ ortogonal. Então X é linearmente independente.*

Demonstração. Vamos supor que existe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$. Multiplicando por x_j , $j = 1, 2, \dots, n$ temos $\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_n x_n$. Então, $\alpha_j \langle x_j, x_j \rangle = 0$ com $j = 1, 2, \dots, n$. Logo, $\alpha_j = 0$ para todo $j = 1, 2, \dots, n$. □

Teorema 1.10.2. *(Gram-Schmidt) Seja E um espaço com produto interno e seja o conjunto linearmente independente $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset E$. Existe uma sequência ortonormal $\{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subset E$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}.$$

Demonstração. Vamos definir $e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$ e escrevemos $x_2 = \langle x_2, e_1 \rangle e_1 + v_2$ com $v_2 \in \{e_1\}^\perp$. Definimos então $e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}$ para obter $\{x_1, x_2\} = \{e_1, e_2\}$. Prosseguindo por indução, suponha que tenhamos construído vetores ortonormais $e_1, e_2, \dots, e_n$ tais que

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}.$$

Escrevemos

$$x_{n+1} = \langle x_{n+1}, e_1 \rangle e_1 + \langle x_{n+1}, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle x_{n+1}, e_n \rangle e_n + v_{n+1}$$

com $v_{n+1} \in \{e_1, e_2, \dots, e_n\}^\perp$. Definindo $e_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{\|v_{n+1}\|}$ é verdade que os vetores $e_1, e_2, \dots, e_{n+1}$ são ortonormais e

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}.$$

□

⁴Os conjuntos ortonormais exibem certas qualidades que os tornam importantes na análise de noção de Matriz diagonalizável de determinados operadores em espaços vetoriais.

Teorema 1.10.3. *Seja H um espaço de Hilbert e seja $L \subset H$ um subconjunto convexo e fechado. Então, para todo $x \in H$, existe um único $y \in L$ tal que*

$$\|x - p\| = d(x, L) := \inf_{p \in L} \|x - p\|.$$

Demonstração. Chamemos $d = d(x, L)$. Da definição de ínfimo podemos tomar uma sequência $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ de vetores de L tal que

$$d \leq \|x - p_n\| < d + \frac{1}{n}$$

para todo n . Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Aplicamos a Lei do Paralelogramo para os vetores $x - p_n$ e $x - p_m$ para obter

$$2\|x - p_m\|^2 + 2\|x - p_n\|^2 = \|x - p_n + x - p_m\|^2 + \|x - p_n + x - p_m\|^2.$$

Da igualdade acima e do Teorema 1.10.2 resulta que

$$\begin{aligned} \|p_n - p_m\|^2 &= 2\|x - p_m\|^2 + 2\|x - p_n\|^2 - \|2x - (p_n + p_m)\|^2 \\ &= 2\|x - p_m\|^2 + 2\|x - p_n\|^2 - 4\left\|x - \frac{p_n + p_m}{2}\right\|^2 \\ &\leq 2\left(d + \frac{1}{m}\right)^2 + 2\left(d + \frac{1}{n}\right)^2 - 4d^2 \longrightarrow 0 \text{ se } m, n \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Isso prova que a sequência $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy no espaço completo L , logo convergente para um certo $y \in L$. Como $p_n \longrightarrow y$, fazendo $n \longrightarrow \infty$ em 1.10.2 concluímos que $\|x - y\| = d$.

Para provar a unicidade, seja $y_1 \in L$ tal que $\|x - y_1\| = d$. Aplicando a Lei do Paralelogramo para os vetores $x - y$ e $x - y_1$ obtemos

$$\begin{aligned} 4d^2 &= 2d^2 + 2d^2 = 2\|x - y\|^2 + 2\|x - y_1\|^2 \\ &= \|x - y + x - y_1\|^2 + \|x - y + x - y_1\|^2 \\ &= \|2x - y - y_1\|^2 + \|y - y_1\|^2 = 4\left\|x - \frac{y + y_1}{2}\right\|^2 + \|y - y_1\|^2. \end{aligned}$$

Como $\frac{y+y_1}{2} \in L$, disso segue que

$$0 \leq \|y - y_1\|^2 = 4d^2 - 4\left\|x - \frac{y + y_1}{2}\right\|^2 \leq 4d^2 - 4d^2 = 0,$$

o que é suficiente para concluir que $y = y_1$. □

Corolário 1.10.1. *Seja H um espaço de Hilbert e $L \subset H$ um subespaço vetorial fechado. Então*

para todo $x \in H$ existe um único $y \in L$ tal que

$$\|x - y\| = d(x, L).$$

Definição 1.10.6. Chama-se subespaço de um espaço de Banach X , um subespaço vetorial Y fechado em X .

Definição 1.10.7. Seja E um espaço com produto interno e $L \subset E$ um subespaço vetorial de E . Para todo $x \in E$, $y \in L$ é projeção de x sobre L e denota-se $y = pr_L x$ se $x - y \perp L$.

Exemplo 1.10.3. Sejam os espaços $L_2[0, 1]$ e $L = P[0, 1]$. Seja $x(t) = e^t$, suponha que $p = pr_L x$ e que $p \in L$. Sabemos que $\overline{P[0, 1]} = L_2[0, 1]$ implica que existe $p_n(t) \rightarrow x - p$ com $p_n(t) \in L$. Para todo $\ell \in L$ temos

$$\langle x - p, \ell \rangle = 0 \Rightarrow \langle x - p, p_n \rangle = 0$$

passando para o limite obtemos o seguinte

$$\langle x - p, x - p \rangle = 0 \Rightarrow \|x - p\|^2 = 0 \Rightarrow p(t) = e^t$$

o que é um absurdo.

Teorema 1.10.4. (Sobre Projeção) Seja H um espaço de Hilbert e $L \subset H$ um subespaço fechado em H . Então para todo $x \in H$, existe um único $y \in L$ tal que $y = pr_L x$.

Demonstração. Temos que para todo $x \in H$, existe um único $y \in L$ tal que $\|x - y\| = d(x, L) = d$. Vamos provar que $y = pr_L x$, ou seja,

$$\langle x - y, \ell \rangle = 0 \quad \forall \ell \in L.$$

Então, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ temos

$$\|x - y, \lambda \ell\|^2 \geq d^2 \quad \forall \ell \in L.$$

Daí, obtemos o seguinte

$$\langle x - y - \lambda \ell, x - y - \lambda \ell \rangle \geq d^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

isso implica que

$$\|x - y\|^2 = -2\lambda \operatorname{Re} \langle x - y, \ell \rangle + |\lambda|^2 \|\ell\|^2 \geq d^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

logo, $-2\lambda \operatorname{Re} \langle x - y, \ell \rangle + |\lambda|^2 \|\ell\|^2 \geq 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ é um polinômio de grau 2 na variável λ , donde vale $-2\lambda \operatorname{Re} \langle x - y, \ell \rangle + |\lambda|^2 \|\ell\|^2 \geq 0$ se

$$b^2 - 4ac \leq 0 \Rightarrow 4\operatorname{Re}^2 \langle x - y, \ell \rangle \leq 0 \Rightarrow \operatorname{Re} \langle x - y, \ell \rangle = 0.$$

Multiplicar λ por i e provar que $\text{Im} \langle x - y, \ell \rangle = 0$. $\square$

Definição 1.10.8. *Seja E um espaço com produto interno e $M \subset E$, um conjunto qualquer. Chama-se complemento ortogonal de M em E e denota-se $M^\perp = \{y \in E \mid y \perp M\}$.*

Lema 1.10.2. *Seja E um espaço com produto interno e $M \subset E$, então*

i) $M^\perp$ é subespaço vetorial fechado em E ;

ii) Para todo $L \subset M$ temos $M^\perp \subset L^\perp$.

Demonstração. i) Sejam $x, y \in E$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Vamos provar que $\alpha x + \beta y \in M^\perp$ para todo $m \in M$. Então,

$$\langle \alpha x + \beta y, m \rangle = 0 \Leftrightarrow \alpha \langle x, m \rangle + \beta \langle y, m \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle x, m \rangle = \langle y, m \rangle.$$

Agora, seja $y \in E$ e $y \in \overline{M^\perp}$ então existe um $\{y_n\} \subset M^\perp$ tal que $y_n \rightarrow y$. Seja $m \in M$, logo $\langle m, y_n \rangle \rightarrow \langle m, y \rangle$ pois $\langle \cdot \rangle$ é contínua. Como $\langle m, y_n \rangle = 0$ para todo n , implica que $\langle m, y \rangle = 0$ e, portanto $y \in M^\perp$.

ii) Óbvio. $\square$

Definição 1.10.9. *Seja E um espaço com produto interno e sejam L e M dois espaços vetoriais fechados em E . Dizemos que $E = L \oplus M$ se*

i) $L \perp M$;

ii) Para todo $x \in E$ existe um único $\ell \in L$ e existe um único $m \in M$ tal que $x = \ell + m$.

Teorema 1.10.5. *Seja H um espaço de Hilbert. Para qualquer $L \subset H$ um subespaço fechado em H , temos*

$$H = L \oplus L^\perp.$$

Demonstração. Dado $x \in H$, pelo Teorema 1.10.4 existe um único $\ell \in L$ tal que $\ell = \text{pr}_L x$ se, e somente se, $x - \ell \perp L$ então, $x = \ell + (x - \ell)$ sendo que $m = x - \ell$ com $m \perp L$ e $m \in L^\perp$. Pelo Teorema 1.10.3 temos

$$\|x - \ell\| = d(x, L).$$

Como $m = x - \ell$ segue imediatamente que $x = m + \ell$. Basta então provar que $m \in L^\perp$. Para todo $y \in L$ e todo escalar λ , o vetor $\ell + \lambda y \in L$, logo

$$\begin{aligned} \|m\|^2 &= \|x - \ell\|^2 = d(x, L)^2 \leq \|x - (\ell + \lambda y)\|^2 = \|m - \lambda y\|^2 \\ &= \langle m - \lambda y, m - \lambda y \rangle = \|m\|^2 - \lambda \langle y, m \rangle - \bar{\lambda} \langle m, y \rangle + \lambda \bar{\lambda} \|y\|^2. \end{aligned}$$

Disso concluímos que

$$0 \leq |\lambda|^2 \|y\|^2 - 2\operatorname{Re}(\lambda \langle y, m \rangle).$$

Escreva $\langle y, m \rangle$ na forma polar $|\langle y, m \rangle| e^{i\theta}$ e para cada $t \in \mathbb{R}$ chama-se $\lambda = t e^{-i\theta}$. Da desigualdade acima segue que

$$0 \leq t^2 \|y\|^2 - 2t |\langle y, m \rangle| \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

e conseqüentemente o discriminante do binômio é menor ou igual a zero. Isso nos dá $|\langle y, m \rangle| = 0$, e portanto $m \in L^\perp$.

Para provar a unicidade, suponha que $\ell + m = \ell_1 + m_1$ com $\ell, \ell_1 \in L$ e $m, m_1 \in M^\perp$. Como M e $M^\perp$ são subespaços, então

$$\ell - \ell_1 = m - m_1 \in M \cap M^\perp = \{0\}.$$

Portanto segue que $\ell = \ell_1$ e $m = m_1$. □

Teorema 1.10.6. *Seja H um espaço de Hilbert. Para todo $L \subset H$ um subespaço, L é denso em H se, e somente se, $L^\perp = \{0\}$.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Seja $\bar{L} = H$ e $y \in L^\perp$, então, existe $\{\ell_n\} \subset L$ tal que $\ell_n \rightarrow y$ com $n \rightarrow \infty$, fazendo o produto interno por y e usando a continuidade, temos

$$\langle \ell_n, y \rangle \rightarrow \|y\|^2 \Rightarrow y = 0.$$

$\Leftarrow$) Seja $M = \bar{L}$ e seja $L \subset M$ isso implica que $M^\perp \subset L^\perp = \{0\}$ então $M^\perp = \{0\}$. Logo,

$$H = M \oplus M^\perp \Rightarrow H = M = \bar{L}.$$

□

1.11 Bases Ortogonais e Séries de Fourier em Espaços de Hilbert

Seja H um espaço de Hilbert e seja $\{\varphi_j\}$ uma base de Schauder em H . Para todo $x \in H$ tal que

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j \quad \text{e} \quad c_j = \frac{\langle x, \varphi_j \rangle}{\|\varphi_j\|^2}.$$

Se $\{\varphi_j\}$ é um sistema ortogonal, então

$$\langle x, \varphi_j \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \langle \varphi_j, \varphi_k \rangle = c_j \|\varphi_j\|^2$$

Definição 1.11.1. *Seja $\{\varphi_j\}$ um sistema ortogonal em H . Para todo $x \in H$,*

$$c_j = \frac{\langle x, \varphi_j \rangle}{\|\varphi_j\|^2}$$

com $j = 1, 2, \dots$ chama-se coeficiente de Fourier de x relativamente ao sistema ortogonal $\{\varphi_j\}$.

A série

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j \varphi_j$$

chama-se série de Fourier de x .

Observação 1.11.1. φ_j não é necessariamente base e nem precisamos da convergência da série para a definição.

Lema 1.11.1. *(Propriedade extremal de somas parciais de série de Fourier) Seja $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ um sistema ortogonal em um espaço de Hilbert H e seja $L_n = \mathcal{L}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, com $n \in \mathbb{N}$. Então, para todo $x \in H$*

$$pr_{L_n} x = \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j$$

sendo

$$c_j = \frac{\langle x, \varphi_j \rangle}{\|\varphi_j\|^2}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

temos

$$d^2(x, L_n) = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^n c_j^2 \|\varphi_j\|^2.$$

Demonstração. Para provar que

$$\left(x - \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j \right) \perp L_n \Leftrightarrow \left(x - \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j \right) \perp \varphi_k$$

para todo $k = 1, 2, \dots, n$.

i) Provar que

$$\langle x - \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j, \varphi_k \rangle$$

para todo $k = 1, 2, \dots, n$. Então,

$$\begin{aligned} \langle x - \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j, \varphi_k \rangle &= \langle x, \varphi_k \rangle - \sum_{j=1}^n c_j \langle \varphi_j, \varphi_k \rangle \\ &= \langle x, \varphi_k \rangle - c_k \|\varphi_k\|^2 = \langle x, \varphi_k \rangle - \frac{\langle x, \varphi_k \rangle}{\|\varphi_k\|^2} \|\varphi_k\|^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

para todo $k = 1, 2, \dots, n$.

ii) Agora, seja

$$y = \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j = \text{pr}_{L_n} x$$

então para todo $x \in H$ implica que $x = y + (x - y)$. Daí, pelo Teorema 1.10.1 temos $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|x - y\|^2$, logo, por Pitágoras mais uma vez obtemos

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^n c_j^2 \|\varphi_j\|^2 + d^2(x, L_n).$$

□

Teorema 1.11.1. *Seja $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ um sistema ortogonal em um espaço de Hilbert H . Então para cada $x \in H$ são válidas as afirmações seguintes:*

- i) $\sum_{j=1}^{\infty} c_j^2 \|\varphi_j\|^2 < +\infty$, com $c_j = \frac{\langle x, \varphi_j \rangle}{\|\varphi_j\|^2}$, $j = 1, 2, \dots$;
- ii) $\sum_{j=1}^{\infty} c_j \varphi_j$ converge em H ;
- iii) $S = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \varphi_j \Rightarrow S = \text{pr}_L x$ sendo $L = \overline{\mathcal{L}\{\varphi_j\}}$;
- iv) $S = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \varphi_j = x \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} c_j^2 \|\varphi_j\|^2 = \|x\|^2$ (Parseval).

Demonstração. i) Do Lema anterior, temos para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\sum_{j=1}^n c_j^2 \|\varphi_j\|^2 = \|x\|^2 - d^2(x, L_n) \Rightarrow \sum_{j=1}^n c_j^2 \|\varphi_j\|^2 \leq \|x\|^2 \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} c_j^2 \|\varphi_j\|^2 < +\infty$$

e também passando o limite em

$$\sum_{j=1}^n c_j^2 \|\varphi_j\|^2 \leq \|x\|^2$$

temos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j^2 \|\varphi_j\|^2 \leq \|x\|^2$$

para todo $x \in H$ (Bessel).

ii) Seja

$$S_n = \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j$$

e provemos que $\{S_n\}$ é de Cauchy. Então,

$$\|S_n - S_{n+p}\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k \varphi_k \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k^2 \|\varphi_k\|^2.$$

Como sabemos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j^2 \|\varphi_k\|^2 < +\infty$$

é convergente, decorrente do item (i) se, e somente se para todo $\varepsilon > 0$, existe um N tal que $n > N$ e para todo $p \in \mathbb{N}$ temos

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k^2 \|\varphi_k\|^2 < \varepsilon.$$

Portanto $\{S_n\}$ é de Cauchy e como H é completo, então S_n converge.

iii) Seja

$$S = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \varphi_j.$$

Temos que provar que $x - S \perp L$. Mas note que

$$x - S \perp L \Leftrightarrow x - S \perp \varphi_k$$

para todo k . Vamos verificar que

$$\begin{aligned} \langle x - S, \varphi_k \rangle &= 0 \\ \langle x - \sum_{j=1}^{\infty} c_j \varphi_j, \varphi_k \rangle &= 0 \\ \langle x, \varphi_k \rangle - \sum_{j=1}^{\infty} c_j \langle \varphi_j, \varphi_k \rangle &= 0 \\ \langle x, \varphi_k \rangle - c_k \|\varphi_k\|^2 &= 0. \end{aligned}$$

iv) Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\sum_{j=1}^n c_j^2 \|\varphi_j\|^2 = \|x\|^2 - \|x - S_n\|^2.$$

Passando para o limite obtemos

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j^2 \|\varphi_j\|^2 = \|x\|^2 - \|x - S\|^2.$$

Portanto,

$$x = S \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} c_j^2 \|\varphi_j\|^2 = \|x\|^2.$$

□

Definição 1.11.2. Um sistema ortogonal $\{\varphi_j\} \subset H$ se chama total se para todo $x \in H$, $\langle x, \varphi_j \rangle = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$ implica que $x = 0$. Ou ainda, se $\mathcal{L}\{\varphi_j\}$ é denso em H .

Exemplo 1.11.1. Em $L_2[-\pi, \pi]$ considere o sistema ortogonal $\{\sin t, \sin 2t, \dots, \sin nt, \dots\}$. Daí temos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin kt \, dt = 0$$

mas $1 \neq 0$, logo o sistema não é total.

Teorema 1.11.2. Seja H um espaço de Hilbert e $\phi = \{\varphi_j\}$ um sistema ortogonal em H . Então as afirmações seguintes são equivalentes entre si.

i) Para todo $x \in H$ tal que $\sum_{j=1}^{\infty} c_j \varphi_j$, onde $c_j = \frac{\langle x, \varphi_j \rangle}{\|\varphi_j\|^2}$ com $j = 1, 2, \dots, n, \dots$;

ii) O sistema ortogonal ϕ é total;

iii) $\overline{\mathcal{L}(\phi)} = H$;

iv) Para todo $x \in H$ é válida a identidade de Parseval $\sum_{j=1}^{\infty} c_j^2 \|\varphi_j\|^2 = \|x\|^2$.

Demonstração. (i) $\Leftrightarrow$ (ii)

$\Rightarrow$ Para todo $x \in H$, suponha que

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \varphi_j.$$

Provar que para todo $x \in H$, $\langle x, \varphi_j \rangle = 0$ para todo j implica que

$$c_j = \frac{\langle x, \varphi_j \rangle}{\|\varphi_j\|^2} = 0$$

para todo j . Assim,

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} 0 \cdot \varphi_j = 0$$

implica que o sistema é total.

$\Leftarrow$ Vamos supor que ϕ é total e seja $x \in H$. Considere

$$S = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \varphi_j$$

pelo item (iii) do teorema anterior temos que, $x - S \perp \varphi_k$ para todo k implica que $\langle x - S, \varphi_k \rangle = 0$ para todo k implica em $x - S = 0 \Rightarrow x = S$

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\sum_{j=1}^n c_j^2 \|\varphi_j\|^2 = \|x\|^2 - \|x - S_n\|^2.$$

Passando para o limite obtemos

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j^2 \|\varphi_j\|^2 = \|x\|^2 - \|x - S\|^2.$$

Portanto,

$$x = S \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} c_j^2 \|\varphi_j\|^2 = \|x\|^2.$$

(i) $\Leftrightarrow$ (iv) Ver itens (iii) e (iv) do teorema anterior. □

Exemplo 1.11.2. Seja $\overline{P[-1, 1]} = C[a, b]$ isso implica que $\overline{P[-1, 1]} = L_2[-1, 1]$. Então,

$$\overline{P[-1, 1]} = \overline{\mathcal{L}(1, t, \dots, t^n, \dots)} = L_2[-1, 1].$$

Usando o Teorema 1.1, temos

$$\overline{\mathcal{L}(P_0(t), P_1(t), \dots, P_n(t))} = L_2[-1, 1].$$

Isso significa que o sistema de polinômios de Legendre é uma base de Schauder.

Definição 1.11.3. Seja $\{\varphi_j\}$ um sistema ortogonal, chama-se base ortogonal em H , se $\{\varphi_j\}$ é base de Schauder em H .

Exemplo 1.11.3. O sistema ortogonal $\{P_{n0}(t)\}_{n=0,1,\dots}$ é uma base ortogonal em $L_2[-1, 1]$.

Teorema 1.11.3. *Um espaço de Hilbert H de dimensão infinita possui uma base ortogonal se, e somente se, H é separável.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Se H possui uma base ortogonal $\{\phi_j\}$ isso implica que $\{\phi_j\}$ é uma base de Schauder, logo, H é separável.

$\Leftarrow$) Suponha que H é separável, então existe um $G \subset H$, com $\overline{G} = H$ tal que G é enumerável. Seja $F = \{f_1, \dots, f_n, \dots\}$ o conjunto de todos os vetores em G que são linearmente independentes entre si. Como $F \subset G$ então F é enumerável e $\mathcal{L}(F) = \mathcal{L}(G)$. Pelo Teorema 1.1, isso implica que existe um $\phi = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ ortogonal, ou seja, uma ortogonalização de F , tal que $\mathcal{L}(\phi) = \mathcal{L}(F)$. Então,

$$H \supset \overline{\mathcal{L}(\phi)} = \overline{\mathcal{L}(F)} = \overline{\mathcal{L}(G)} \supset \overline{G} = H \Rightarrow \overline{\mathcal{L}(\phi)} = H$$

logo ϕ é total, e portanto ϕ é base ortogonal. $\square$

Teorema 1.11.4. *Todo espaço de Hilbert separável de dimensão infinita é isométrico a ℓ_2 .*

Demonstração. Seja H um espaço de Hilbert que é separável e de dimensão infinita. Pelo Teorema anterior existe uma base ortonormal $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}_{n \in \mathbb{N}}$ em H . Da desigualdade de Bessel sabemos que, dado $x \in H$, temos $(\langle x, x_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_2$. Defina o operador

$$J : H \longrightarrow \ell_2 \qquad J(x) = (\langle x, x_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}.$$

É fácil verificar que J é linear. Ademais pelo Teorema 1.11.2, item iii) temos que todo $x \in H$ é representado pela série

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, x_i \rangle x_i,$$

e assim a identidade de Parseval revela que $\|J(x)\| = \|x\|$. Em particular, J é injetora. Agora vamos provar que J é sobrejetora. Para isso seja $(a_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_2$. Vejamos primeiramente que a série $\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j$ converge em H . De fato, escrevendo para cada $k \in \mathbb{N}$, $S_k = \sum_{j=1}^k a_j x_j$, do Teorema de Pitágoras resulta que, para $n > m$,

$$\|S_n - S_m\|^2 = \left\| \sum_{j=m+1}^n a_j x_j \right\|^2 = \sum_{j=m+1}^n \|a_j x_j\|^2 = \sum_{j=m+1}^n |a_j|^2.$$

Como a série $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2$ é convergente, segue que $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em H , portanto converge. Logo

$$x := \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \in H$$

está bem definido e da condição $\langle x_j, x_n \rangle = \delta_{jn}$ segue imediatamente que $J(x) = (a_j)_{j=1}^\infty$.

□

Capítulo 2

Operadores Lineares

Neste capítulo vamos explorar os principais conceitos relacionados aos operadores lineares. A definição é análoga àquela de transformações lineares para o caso de espaços de dimensão finita. Sua definição pode ser vista na Definição 1.1.20. Alguns exemplos de operadores lineares em funções contínuas podem ser encontradas em (BENTO, 2007).

2.1 Operadores Lineares Limitados

Lembrando: Dados X, Y e $A : X \longrightarrow Y$ um operador linear. A é limitado se existe um $c \geqslant 0$ tal que $\|Ax\| \leqslant c\|x\|$ para todo $x \in X$ e $\|A\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\|$.

Definição 2.1.1. O conjunto de todos os operadores lineares limitados de X em Y , denota-se $\mathcal{L}(X, Y)$.

Teorema 2.1.1. Seja $\mathcal{L}(X, Y)$ um espaço normado relativamente a norma de operadores. Para todo $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ temos

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Ax\|_Y.$$

Teorema 2.1.2. Sejam X, Y e Z espaços normados, então para todo $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ e para todo $B \in \mathcal{L}(Y, Z)$, temos que

$$BA \in \mathcal{L}(X, Z) \quad e \quad \|BA\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|.$$

Teorema 2.1.3. Seja X um espaço normado e Y um espaço de Banach. Então $\mathcal{L}(X, Y)$ é de Banach.

Demonstração. Seja $\{A_n\}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(X, X)$. Seja $x \in X$ e $\{A_n x\} \subset Y$. Afir-
mamos que $\{A_n x\}$ é de Cauchy. De fato,

$$\|A_n x - A_m x\| = \|(A_n - A_m)x\| \leq \|A_n - A_m\| \cdot \|x\| \rightarrow 0.$$

Logo existe $Ax : A_n x \rightarrow Ax$ com $n \rightarrow \infty$ em Y . Vamos definir

$$A : x \rightarrow Ax \quad A : X \rightarrow Y.$$

Vamos provar que A é um operador linear. Então,

$$\begin{aligned} A(\alpha x + \beta y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(\alpha x + \beta y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha A_n x + \beta A_n y) \\ &= \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} A_n y = \alpha Ax + \beta Ay. \end{aligned}$$

Isso implica que A é linear.

Agora vamos provar que A é limitado. $\{A_n\}$ é de Cauchy, e portanto limitado, então existe um $c \geq 0$ tal que $\|A_n\| \leq c$. Por outro lado para todo $x \in X$, temos

$$\|A_n x\| \leq \|A_n\| \cdot \|x\| \Rightarrow \|A_n x\| \leq c \|x\|$$

para todo n . Como $A_n x \rightarrow Ax$ em Y temos

$$\|Ax\| \leq c \|x\|$$

para todo x , logo $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Vamos provar que $A_n \rightarrow A$. $\{A_n\}$ é de Cauchy, isso implica que para todo $\varepsilon > 0$ existe um N tal que para todo $n, m > N$ teremos $\|A_n - A_m\| < \varepsilon$, para todo $x \in X$. Daí,

$$\|(A_n - A_m)x\| \leq \|A_n - A_m\| \|x\| \leq \varepsilon \|x\|$$

para todo $n, m > N$. Passando o $\lim_{m \rightarrow \infty}$ temos que

$$\|A_n x - Ax\| \leq \varepsilon \|x\| \Rightarrow \|A_n - A\| \leq \varepsilon$$

para todo $n > N$ e $x \in X$ implica que $A_n \rightarrow A$. □

Exemplo 2.1.1. Seja X um espaço de Banach, então $\mathcal{L}(X)$ é de Banach. Seja $A \in \mathcal{L}(X)$ e consi-

der a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = e^A$. Então,

$$\sum \frac{\|A^n\|}{n!} \leq \sum \frac{\|A\|^n}{n!} = e^{\|A\|}.$$

2.2 Teorema de Banach-Steinhaus

O teorema da delimitação uniforme (ou princípio da delimitação uniforme) de S. Banach e H. Steinhaus (1927) é de grande importância. De fato, ao longo da análise, existem muitos exemplos de resultados relacionados a esse teorema, sendo o primeiro uma investigação de H. Lebesgue (1909). O teorema da delimitação uniforme é freqüentemente considerado uma das pedras angulares da análise funcional em espaços normatizados. (KREYSZIG, 1978, p. 247, tradução do autor).

Definição 2.2.1. *Sejam X, Y dois espaços normados, $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ e $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dizemos que $A_n \rightarrow A$ uniformemente, se $\|A_n - A\| \rightarrow 0$ com $n \rightarrow \infty$.*

Definição 2.2.2. *Sejam X, Y dois espaços normados, $A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$ e A um operador linear de X em Y . Dizemos que A_n converge fortemente para A , denotamos por $A_n \rightarrow A$ com $n \rightarrow \infty$ fortemente se, para todo $x \in X$ $A_n x \rightarrow Ax$ em Y .*

Lema 2.2.1. *Sejam X, Y dois espaços normados, $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ e $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Se $A_n \rightarrow A$ uniformemente, implica que $A_n \rightarrow A$ fortemente.*

Demonstração. Se $A_n \rightarrow A$ uniformemente, então

$$\|A_n - A\| \rightarrow 0 \Rightarrow \|A_n x - Ax\| \leq \|A_n - A\| \|x\| \rightarrow 0 \Rightarrow A_n x \rightarrow Ax$$

para todo $x \in X$. □

Exemplo 2.2.1. *Seja H um espaço de Hilbert separável e seja $\{e_j\}$ uma base ortonormal em H . Para todo $x \in H$ implica que*

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$P_n : H \rightarrow H \quad P_n(x) = \sum_{j=1}^n x_j e_j.$$

Daí,

$$\|P_n(x)\|^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 = \|x\|^2 \Rightarrow \|P_n(x)\| \leq \|x\|$$

logo, $\|P_n\| \leq 1$.

Vamos prova que $\|P_n\| = 1$. Tome $x_0 = e_1$ assim $x_0 = 1$, então

$$\|P_n(x_0)\|^2 = \sum_{j=1}^n |e_j|^2 = 1 \Rightarrow \frac{\|P_n(x_0)\|}{\|x_0\|} = 1 \leq \|P_n\| \Rightarrow \|P_n\| = 1.$$

Vamos provar que $P_n \rightarrow I$ fortemente. Dado $x \in H$ temos $P_n(x) \rightarrow x$, ou ainda,

$$\|P_n(x) - x\|^2 = \left\| \sum_{j=n+1}^{\infty} x_j e_j \right\|^2 \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} x_j^2 \rightarrow 0$$

pois este último termo $j = n + 1$ é resíduo da série $\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2$, mas

$$\|P_n - I\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|(P_n - I)x\| \geq \|(P_n - I)e_{n+1}\| = \|e_{n+1}\| = 1.$$

Isso implica que P_n não converge para I uniformemente.

Lema 2.2.2. Sejam X, Y dois espaços normados e $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Suponha que A_n é limitada numa bola fechada em X , ou seja, suponha que existe $B[x_0, r_0]$ e existe $c \geq 0$ tal que $\|A_n x\| \leq c$ para todo $x \in B[x_0, r_0]$ e para todo $n \in \mathbb{N}$. Existe $c_1 \geq 0$ tal que $\|A_n\| \leq c_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Tome $B[x_0, r_0]$ e seja $x \in X$ com $x \neq 0$. Defina $x_1 = x_0 + \frac{x}{\|x\|} \frac{r_0}{2}$, então $x_1 \in B[x_0, r_0]$ no que implica em $\|A_n x_1\| \leq c$ e também $\|A_n x_0\| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Temos que,

$$\begin{aligned} x = \frac{(x_1 - x_0)2\|x\|}{r_0} &\Rightarrow Ax = (Ax_1 - Ax_0) \frac{2\|x\|}{r_0} \\ &\Rightarrow \|A_n x\| \leq \frac{2\|x\|}{r_0} (\|A_n x_1\| + \|A_n x_0\|) \leq \frac{4c}{r_0} \|x\| \\ &\Rightarrow \|A_n\| \leq \frac{4c}{r_0} = c_1. \end{aligned}$$

□

Observação 2.2.1. Se A_n é limitado numa bola fechada, então A_n é limitado para todo n .

Teorema 2.2.1. (Princípio de Limitação Uniforme) Seja X um espaço de Banach e Y um espaço normado e seja $\{A_n\}$ uma sequência em $\mathcal{L}(X, Y)$. Vamos supor que para cada $x \in X$, existe $c_x \geq 0$ tal que $\|A_n x\| \leq c_x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, existe $c \geq 0$ tal que $\|A_n\| \leq c$.

Demonstração. Vamos supor que $\{A_n\}$ não é limitada, ou seja, não existe c como o da tese em nenhuma bola fechada em X . Seja $B[x_0, r_0]$ um bola fechada. Existe n_1 e também existe um $x_1 \in B[x_0, r_0]$ tal que $\|A_{n_1}x_1\| \geq 1$. Donde existe um $r_1 > 0$ tal que $B[x_1, r_1] \subset B[x_0, r_0]$ para todo $x \in B[x_1, r_1]$ tal que $\|A_{n_1}x\| \geq 1$.

Seguindo o raciocínio, construímos uma sequência de bolas fechadas encaixadas

$$B[x_1, r_1] \supset B[x_2, r_2] \supset \cdots \supset B[x_k, r_k] \supset \cdots$$

Seja $\{A_{n_k}\}$ uma subsequência onde $r_k \rightarrow 0$, então

$$\|A_{n_k}x\| \geq k \quad \forall x \in B[x_k, r_k].$$

Como X é de Banach, existe um único $x \in B[x_k, r_k]$ para todo k , onde $\|A_{n_k}x\| \geq k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, o que contradiz a hipótese que $\|A_nx\| \leq cx$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo $\|A_n\| \leq c$, para algum $c \geq 0$. $\square$

Corolário 2.2.1. (*Princípio de Ressonância*) *Seja X um espaço de Banach e Y um espaço normado e seja $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Supor que $\|A_n\| \rightarrow \infty$ com $n \rightarrow \infty$. Então existe um $x \in X$ tal que $\|A_nx\| \rightarrow \infty$ com $n \rightarrow \infty$.*

Observação 2.2.2. Este corolário é uma espécie de contrapositiva do teorema anterior.

Exemplo 2.2.2. *Para todo $t_0 \in [0, 2\pi]$, existe um $x \in C[0, 2\pi]$ tal que a série de Fourier de x diverge em t_0 .*

Prova. Seja $x(t) \in C[0, 2\pi]$, lembramos que a série de Fourier de uma dada função periódica $x \in C[0, 2\pi]$ é da forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

com os coeficientes de Fourier de x dados pelas fórmulas de Euler

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos nt \, dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin nt \, dt.$$

Vemos que a série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

pode convergir mesmo em pontos onde x é descontínuo. Isso mostra que a continuidade não é necessária para a convergência. Surpreendentemente, a continuidade também não é suficiente. De fato, usando o teorema da delimitação uniforme (Teorema 2.2.1), podemos mostrar o seguinte. Existem funções contínuas com valor real cujas séries de Fourier divergem em um determinado ponto t_0 .

Seja X o espaço normatizado de todas as funções contínuas com valor real de $C[0, 2\pi]$ com a norma definida por

$$\|x\| = \max |x(t)|.$$

Temos que X é um espaço de Banach, com $a = 0$ e $b = 2\pi$. Assim, podemos tomar $t_0 = 0$, sem restringir a generalidade. Para provar nossa afirmação, aplicaremos o teorema da delimitação uniforme (Teorema 2.2.1) a $A_n = T_n$ onde $T_n(x)$ é o valor em $t = 0$ da n ésima soma parcial da série de Fourier de x . Como para $t = 0$ os termos de seno são zero e o do cosseno é um, vemos que

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^n a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^n \cos jt \right] dt.$$

Queremos determinar a função representada pela soma sob o sinal integral. Para o efeito, calculamos

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{sen} \frac{t}{2} \sum_{j=1}^n \cos jt &= \sum_{j=1}^n 2 \operatorname{sen} \frac{t}{2} \cos jt \\ &= \sum_{j=1}^n \left[-\operatorname{sen} \left(m - \frac{1}{2} \right) t + \operatorname{sen} \left(m + \frac{1}{2} \right) t \right] \\ &= -\operatorname{sen} \frac{t}{2} + \operatorname{sen} \left(n + \frac{1}{2} \right) t, \end{aligned}$$

pode-se observar que a maioria dos termos é eliminada em pares. Dividindo isso por $\operatorname{sen} \frac{t}{2}$ e adicionando 1 em ambos os lados, temos

$$1 + 2 \sum_{j=1}^n \cos jt = \frac{\operatorname{sen} \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{\operatorname{sen} \frac{t}{2}}.$$

Logo

$$T_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \frac{\operatorname{sen} \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{\operatorname{sen} \frac{t}{2}} dt.$$

A partir disso, podemos mostrar que o funcional T_n linear é limitado. De fato,

$$|T_n(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \max |x(t)| \int_0^{2\pi} \left| \frac{\operatorname{sen} \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{\operatorname{sen} \frac{t}{2}} \right| dt = \frac{\|x\|}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\operatorname{sen} \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{\operatorname{sen} \frac{t}{2}} \right| dt.$$

A partir disso, vemos que T_n é limitado. Além disso, assumindo o supremo sobre todos os x da norma um, obtemos

$$\|T_n\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\operatorname{sen} \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{\operatorname{sen} \frac{t}{2}} \right| dt.$$

De fato, a igualdade é válida, como provaremos agora. Para esse fim, primeiro escrevamos

$$\left| \frac{\text{sen}(n + \frac{1}{2})t}{\text{sen} \frac{t}{2}} \right| = y(t) \frac{\text{sen}(n + \frac{1}{2})t}{\text{sen} \frac{t}{2}}$$

onde $y(t) = 1$ em cada t em que

$$\frac{\text{sen}(n + \frac{1}{2})t}{\text{sen} \frac{t}{2}} > 0$$

e $y(t) = -1$ em outro lugar. y não é contínuo, mas, para qualquer $\varepsilon > 0$, pode ser modificado para um x contínuo da norma 1, de modo que, para esse x , tenhamos

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} [x(t) - y(t)] \frac{\text{sen}(n + \frac{1}{2})t}{\text{sen} \frac{t}{2}} dt \right| < \varepsilon.$$

Escrevendo isso como duas integrais, obtemos

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} x(t) \frac{\text{sen}(n + \frac{1}{2})t}{\text{sen} \frac{t}{2}} dt - \int_0^{2\pi} y(t) \frac{\text{sen}(n + \frac{1}{2})t}{\text{sen} \frac{t}{2}} dt \right| = \left| T_n(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\text{sen}(n + \frac{1}{2})t}{\text{sen} \frac{t}{2}} dt \right| < \varepsilon.$$

Como o $\varepsilon > 0$ era arbitrário e $\|x\| = 1$, isso prova a fórmula desejada

$$\|T_n\| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\text{sen}(n + \frac{1}{2})t}{\text{sen} \frac{t}{2}} \right| dt.$$

Finalmente, mostramos que a sequência $\|T_n\|$ é ilimitada. Agora, usando o fato de que $|\text{sen} \frac{t}{2}| < \frac{t}{2}$ para $t \in (0, 2\pi]$ e fazendo $(n + \frac{1}{2})t = s$, obtemos

$$\begin{aligned} \|T_n\| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\text{sen}(n + \frac{1}{2})t}{\text{sen} \frac{t}{2}} \right| dt \\ &> \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|\text{sen}(n + \frac{1}{2})t|}{t} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{(2n+1)\pi} \frac{|\text{sen } s|}{s} ds \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{2n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\text{sen } s|}{s} ds \\ &\geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\text{sen } s| ds \\ &= \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{(k+1)} \longrightarrow \infty \end{aligned}$$

com $n \rightarrow \infty$ já que a série harmônica diverge. Portanto $\|T_n\|$ é ilimitado, de modo que $\|T_n\| \leq c$ não se mantém. Como X está completo, isso implica que $\|T_n(x)\| \leq c_x$ não pode ser válido para todos os x . Portanto, deve haver um $x \in X$ tal que $\|T_n(x)\|$ seja ilimitado. Mas, pela definição dos T_n 's, isso significa que a série de Fourier desse x diverge em $t = 0$.

Corolário 2.2.2. *Sejam X um espaço de Banach, Y um espaço normado e $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$, tal que $A_n \rightarrow A$ fortemente, com $A : X \rightarrow Y$ linear, então A é limitado.*

Demonstração. Para qualquer $x \in X$ temos $A_n(x) \rightarrow A(x)$, isso implica que $A_n(x)$ é limitada, então existe um $c_x \geq 0$ tal que $\|A_n(x)\| \leq c_x$ para todo n . Pelo Teorema 2.2.1 existe um $c \geq 0$ tal que $A_n \leq c$. Como $A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$ então, $\|A_n(x)\| \leq \|A_n\| \|x\|$ para todo $x \in X$. E também $\|A_n(x)\| \leq c\|x\|$, logo $\|A(x)\| \leq c\|x\|$ para todo x , e portanto, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. $\square$

Teorema 2.2.2. (Banach-Steinhaus) *Seja X um espaço de Banach, e sejam Y um espaço normado e $(T_i)_{i \in I}$ uma família de operadores em $\mathcal{L}(X, Y)$ satisfazendo a condição de que para cada $x \in E$ existe $c_x < \infty$ tal que*

$$\sup_{i \in I} \|T_i(x)\| < c_x.$$

Então $\sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty$.

Demonstração. Da continuidade de T_i resulta que o conjunto $\{x \in X \mid \|T_i(x)\| \leq n\} = (\|\cdot\| \circ T_i)^{-1}([0, n])$ é fechado para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $i \in I$. Dessa forma, o conjunto

$$A_n := \{x \in X \mid \sup_{i \in I} \|T_i(x)\| \leq n\} = \bigcap_{i \in I} \{x \in X \mid \|T_i(x)\| \leq n\}$$

é fechado por ser uma interseção de fechados. Assim, segue que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e, pelo Teorema de Baire, algum A_n possui interior não-vazio. Seja n_0 um número natural tal que A_{n_0} tenha interior não-vazio, e sejam $a \in \text{int}(A_{n_0})$ e $r > 0$ tais que $\{x \in X \mid \|x - a\| \leq r\} \subseteq \text{int}(A_{n_0})$. Seja $y \in X$ com $\|y\| < 1$. Se $x = a + ry$, então $\|x - a\| = \|ry\| \leq r$ e portanto $x \in A_{n_0}$. Assim

$$\|T_i(x - a)\| \leq \|T_i(x)\| + \|T_i(a)\| \leq n_0 + n_0$$

para todo $i \in I$. Logo $\|T_i(ry)\| = \|T_i(x - a)\| \leq 2n_0$ e $\|T_i(y)\| \leq \frac{2n_0}{r}$ para todo $i \in I$. Portanto

$$\sup_{i \in I} \|T_i\| \leq \frac{2n_0}{r}.$$

$\square$

2.3 Operadores Inversos

Se $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ e A é bijetor, então $A^{-1} \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Definição 2.3.1. *Sejam X, Y espaços vetoriais e seja $A : X \rightarrow Y$. Então,*

$$N(A) = \{x \in X \mid A(x) = 0\}.$$

Lema 2.3.1. *$A : X \rightarrow Y$ é injetivo se, e somente se, $N(A) = \{0\}$.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Se $x \neq 0$ então $A(x) \neq 0$. Logo, isso implica que $x \notin N(A)$, e portanto, $N(A) = \{0\}$.
 $\Leftarrow$) Vamos provar que A é injetivo. $A(x) = A(y)$ se, e somente se, $A(x - y) = 0$, isso implica que $x - y \in N(A)$. Como $N(A) = \{0\}$ então $x - y = 0 \Rightarrow x = y$. Logo, A é injetivo. $\square$

Definição 2.3.2. *Sejam X, Y espaços vetoriais, $A : X \rightarrow Y$ linear e I_X, I_Y identidades em X e Y respectivamente.*

- i) *Um operador $R : Y \rightarrow X$ se chama inverso à direita para A se $AR = I_Y$;*
- ii) *Um operador $L : Y \rightarrow X$ se chama inverso à esquerda para A se $LA = I_X$;*
- iii) *Um operador $A^{-1} : Y \rightarrow X$ se chama o inverso do operador A , se $AA^{-1} = I_Y$ e $A^{-1}A = I_X$.*

Exemplo 2.3.1. *Sejam $X = C^{(1)}[a, b]$ e $Y = C[a, b]$ espaços vetoriais. Sejam os operadores*

$$\begin{aligned} \partial & : X \rightarrow Y \\ x & \mapsto \partial x = x' \\ I & : Y \rightarrow X \\ x & \mapsto Ix(t) = \int_a^t x(s) ds. \end{aligned}$$

Daí, temos que

$$\begin{aligned} \partial Ix &= \frac{d}{dt} \left(\int_a^t x(s) ds \right) = x(t) = I_Y x \\ I \partial x &= \int_a^t x'(s) ds = x(t) - x(a) \neq x(t) \end{aligned}$$

Lema 2.3.2. *Sejam X, Y dois espaços vetoriais e $A : X \rightarrow Y$ um operador linear. São válidas as afirmações seguintes.*

- i) *Se A possui inverso à direita então $Im(A) = Y$;*
- ii) *Se A possui inverso à esquerda então $N(A) = \{0\}$;*

iii) Se A possui inverso à direita R e à esquerda L , então R e L são únicos e $R = L = A^{-1}$, sendo A^{-1} o operador inverso para A .

Demonstração. i) Suponha que existe R tal que $AR = I_Y$ para todo $y \in Y$, e seja $x = Ry$. Então, $Ax = ARy = I_Y y = y$, logo $y \in \text{Im}(A)$.

ii) Vamos supor que existe $L : Y \rightarrow X$ tal que $LA = I_X$. Seja $x \in N(A)$, então $Ax = 0$, logo $LAx = L \cdot 0 = I_X x = 0 \Rightarrow x = 0$, por isso, $N(A) = \{0\}$, e portanto, A é injetivo.

iii) Supor que existam $R, R' : Y \rightarrow X$, lineares tais que $AR = AR' = I_Y$ e $L, L' : Y \rightarrow X$, lineares, tais que $LA = L'A = I_X$. Então,

$$AR = AR' \Rightarrow LAR = LAR' \Rightarrow R = R'.$$

Daí, temos que $x = Ry$ e $x' = R'y$, logo

$$Ax' = Ax \Rightarrow A(x - x') = 0 \Rightarrow x = x' \Rightarrow Ry = R'y.$$

para todo y . Também,

$$LA = L'A \Rightarrow LAR = L'AR \Rightarrow L' = L.$$

Dado isso, temos

$$L'Ax = LAx \Rightarrow L'y = Ly \Rightarrow L' = L$$

pois $A(X) = Y$ para todo x e para todo y . Logo, $y = Ax \Rightarrow Ly = x$ então, $ALy = Ax = y \Rightarrow AL = I_Y$, portanto $L = R = A^{-1}$. $\square$

Observação 2.3.1. Neste lema a unicidade depende da existência das duas inversas à direita e à esquerda. Se A possui inverso somente à direita (ou esquerda) não vale em geral a unicidade. Um bom exemplo seria o operador integral e o operador diferencial.

Definição 2.3.3. Sejam X, Y dois espaços normados e $A : X \rightarrow Y$ um operador linear. Vamos dizer que A é continuamente inversível, se

i) $\text{Im}(A) = Y$;

ii) Existe $A^{-1} \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Exemplo 2.3.2. Sejam $X = \{x \in C^{(1)}[a, b] \mid x(a) = 0\}$ e $Y = C[a, b]$, e seja o operador linear $\partial : X \rightarrow Y$ tal que $\partial x = x'$. Temos que,

$$Ix(t) = \int_a^b x(s) ds$$

é inverso para o operador ∂ . Daí, temos que $I \in \mathcal{L}(X, Y)$, então ∂ é continuamente inversível.

Teorema 2.3.1. *Sejam X, Y dois espaços normados e $A : X \rightarrow Y$ um operador linear tal que $\text{Im}(A) = Y$ então, A é continuamente inversível se, e somente se, existe um $k > 0$ tal que $\|x\| \geq \|Ax\| \geq k\|x\|$ para todo $x \in X$.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Seja $A^{-1} \in \mathcal{L}(X, Y)$, então existe um $c > 0$ tal que $\|A^{-1}y\|_X \leq c\|y\|_Y$ para todo $y \in Y$. Seja $x \in X$ e $y = Ax \in Y$, assim $x = A^{-1}y$ isso implica em $\|x\| \leq c\|Ax\|$ para todo $x \in X$. Então, $\|Ax\| \geq \frac{1}{c}\|x\|$ para todo $x \in X$, com $k = \frac{1}{c}$.

$\Leftarrow$) Se $\text{Im}(A) = Y$ então A é sobrejetora. Seja $x \in X$ tal que $Ax = 0$. Isso implica que $\|Ax\| \geq k\|x\| \Rightarrow \|0\| \geq k\|x\| \Rightarrow x = 0$, logo $N(A) = \{0\}$, e portanto, A é injetor. Donde existe A^{-1} . Vamos provar que é linear.

$$\begin{aligned} A^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) &= A^{-1}(\alpha Ax_1 + \beta Ax_2) = A^{-1}A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Ix_1 + \beta Ix_2 \\ &= \alpha A^{-1}Ax_1 + \beta A^{-1}Ax_2 = \alpha A^{-1}y_1 + \beta A^{-1}y_2 \end{aligned}$$

logo, A^{-1} é linear. Agora vamos provar que $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

Para todo $y \in Y$, $x = A^{-1}y$, assim, $y = Ax$. Então,

$$\|Ax\| \geq k\|x\| \Rightarrow \|y\| \geq k\|A^{-1}y\| \Rightarrow \|A^{-1}y\| \leq \frac{1}{k}\|y\|$$

para todo $y \in Y$. □

Teorema 2.3.2. *Seja X um espaço de Banach, Y um espaço normado e $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Suponha que exista um $k > 0$ tal que $\|Ax\| \geq k\|x\|$ para todo $x \in X$. Então $\text{Im}(A)$ é subespaço vetorial fechado em Y .*

Demonstração. Seja $\{y_n\} \subset \text{Im}(A)$ tal que $y_n \rightarrow y$ em Y . Devemos provar que $y \in \text{Im}(A)$. Como A é inversível então para todo $y_n \in \text{Im}(A)$ existe um único $x_n \in X$ tal que $Ax_n = y_n$. Como y_n é convergente, logo y_n é de Cauchy. Daí,

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{k}\|Ax_n - Ax_m\| = \frac{1}{k}\|y_n - y_m\| \rightarrow 0$$

com $m, n \rightarrow \infty$, desse modo, $\{x_n\}$ é de Cauchy.

Como X é de Banach, existe um $x \in X$ tal que $x_n \rightarrow x$. Como $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ então $Ax_n \rightarrow Ax \Rightarrow y_n \rightarrow y$, logo, pela unicidade do limite, temos que $Ax = y$, portanto, $y \in \text{Im}(A)$. □

Corolário 2.3.1. *Sejam X um espaço de Banach, Y um espaço normado e $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Supor que:*

i) $\text{Im}(A)$ é denso em Y ;

ii) Existe um $k > 0$ tal que $\|Ax\| \geq k\|x\|$ para todo $x \in X$.

Então A é continuamente inversível.

Demonstração. Vamos provar que $\text{Im}(A) = Y$ e que existe $A^{-1} \in \mathcal{L}(X, Y)$. De ii) vem pela volta do Teorema 2.3.2 que $\text{Im}(A)$ é subespaço vetorial fechado em Y , então $\overline{\text{Im}(A)} = \text{Im}(A)$ e isso implica que $\text{Im}(A) = Y$ pois $\text{Im}(A)$ é denso.

Pelo Teorema 2.3.1 (volta) temos que A é continuamente inversível. $\square$

Teorema 2.3.3. *Sejam X, Y dois espaços normados e $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Suponha que existe $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $AS = I_Y$ e $SA = I_X$, então $S = A^{-1}$.*

Teorema 2.3.4. *Sejam X, Y, Z três espaços normados, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $B \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Suponha que A e B são continuamente inversíveis, então BA é continuamente inversível e $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.*

Demonstração. Note que $BA \in \mathcal{L}(X, Z)$ e $S = A^{-1}B^{-1} \in \mathcal{L}(Z, X)$. Temos então que

$$(BA)S = (BA)A^{-1}B^{-1} = I_Z,$$

e por outro lado

$$S(BA) = A^{-1}B^{-1}(BA) = I_X.$$

$\square$

Teorema 2.3.5. *Seja X um espaço de Banach e seja $A \in \mathcal{L}(X)$. Se $\|A\| < 1$ então $I - A$ é continuamente inversível e*

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Demonstração. Como X é de Banach, então $\mathcal{L}(X)$ também é de Banach (Teorema 2.1.3). Considere

$$\sum_{j=0}^{\infty} A^j.$$

Como $\|A^j\| \leq \|A\|^j$, vale o seguinte:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|A^j\| \text{ é majorada por } \sum_{j=0}^{\infty} \|A\|^j = \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

A série $\sum_{j=0}^{\infty} \|A\|^j$ é uma série geométrica com razão $r < 1$, e portanto, ela é convergente.

Seja

$$S = \sum_{j=0}^{\infty} A^j.$$

Tome $S_n = I + A + \cdots + A^{n-1}$. Então,

$$\begin{aligned}(I-A)S_n &= I + A + \cdots + A^{n-1} - A - A^2 - \cdots - A^{n-1} - A^n \\ &= I - A^n.\end{aligned}$$

Também $S_n(I-A) = I - A^n$. Aplicando o limite com $n \rightarrow \infty$, temos

$$\begin{aligned}(I-A)S &= I \\ S(I-A) &= I,\end{aligned}$$

logo S é inverso para $I-A$, ou seja, $S = (I-A)^{-1}$, donde

$$\|(I-A)^{-1}\| = \|S\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|A\|^j = \frac{1}{1-\|A\|}.$$

□

Teorema 2.3.6. *Sejam X e Y espaços de Banach e seja $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ continuamente inversível. Então todo $B \in \mathcal{L}(X, Y)$, tal que*

$$\|A - B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|},$$

é continuamente inversível.

Demonstração. Considere $A^{-1}B \in \mathcal{L}(X)$. Note que

$$A^{-1}B = A^{-1}(A - (A - B)) = I - A^{-1}(A - B).$$

Temos,

$$\|A^{-1}(A - B)\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A - B\| < 1$$

logo, pelo Teorema anterior, $S = A^{-1}B$ é continuamente inversível, então $B = AS$ também é continuamente inversível, pois A é continuamente inversível por hipótese. □

Observação 2.3.2. Todo operador linear limitado $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ que satisfaz $\|A - B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ é continuamente inversível.

Corolário 2.3.2. *Sejam X, Y dois espaços de Banach e seja $I(X, Y) \subset \mathcal{L}(X, Y)$ o conjunto de todos os operadores continuamente inversíveis. Então $I(X, Y)$ é aberto.*

Demonstração. Seja $A \in I(X, Y) \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Tome,

$$r_A = \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

para todo $B \in I$ tal que $B \in B(A, r_A)$ tem-se,

$$\|A - B\| < r = \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

e portanto, pelo Teorema anterior B é inversível, por isso $B(A, r_A) \subset I$, logo I é aberto. $\square$

2.4 Teorema de Banach Sobre Mapeamento Aberto e Gráfico Fechado

Lema 2.4.1. *Seja X um espaço normado e seja $A \subset X$ aberto em X . Então para todo $B \subset X$,*

$$A + B = \{x + y \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

é aberto.

Demonstração. Seja $x_0 \in X$ e considere $T_{x_0} : X \rightarrow X$ com $T_{x_0}(x) = x + x_0$. T é Lipschitz e portanto é contínua. Existe $T_{x_0}^{-1}(x) = x - x_0$ que também é contínua e T_{x_0} é homeomorfismo.

Para todo $A \subset X$ aberto, $T_{x_0}(A) = x_0 + A$ também é aberto. Agora considere

$$A + B = \bigcup_{y \in B} (y + A)$$

que por sua vez é aberto. $\square$

Lema 2.4.2. *Sejam X um espaço normado, Y um espaço de Banach e $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que é bijetor. Seja $B(0, 1)$ uma bola unitária em X . Então existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(0, \varepsilon) \subset \overline{A(B(0, 1))}$.*

Demonstração. Dado

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(0, n),$$

como A é bijetor, então

$$Y = A(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(B(0, n)) \Rightarrow Y = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A(B(0, n))}.$$

Logo, pelo Teorema de Baire (Teorema 1.6.4) existe um n_0 e existe $B(x_0, \varepsilon_0)$ tal que

$$\begin{aligned} B(x_0, \varepsilon_0) \subset \overline{A(B(0, n_0))} \Rightarrow 0 \in \left(\overline{A(B(0, n_0))} - B(x_0, \varepsilon_0) \right) &\subset \left(\overline{A(B(0, n_0))} + \overline{A(B(0, n_0))} \right) \\ &\subset 2 \overline{A(B(0, n_0))} = \overline{A(B(0, 2n_0))}. \end{aligned}$$

Como $B(x_0, \varepsilon_0)$ é aberto pelo Lema anterior, $\overline{A(B(0, n_0))} - B(x_0, \varepsilon_0)$ é aberto e como $0 \in \overline{A(B(0, n_0))} - B(x_0, \varepsilon_0)$, então existe um ε tal que $B(0, \varepsilon_1) \subset \overline{A(B(0, 2n_0))}$.

Por outro lado

$$A(B(0, 2n_0)) = 2n_0 A(B(0, 1)) \Rightarrow B(0, \varepsilon_1) \subset 2n_0 \overline{A(B(0, 1))} \Rightarrow B\left(0, \frac{\varepsilon_1}{2n_0}\right) \subset \overline{A(B(0, 1))}.$$

Tome $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{2n_0}$ e este ε satisfaz as condições da tese. $\square$

Teorema 2.4.1. (Banach) *Sejam X, Y dois espaços de Banach e um operador $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que A é bijetor. Então $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.*

Demonstração. Temos que provar que $A^{-1} : Y \rightarrow X$ é limitado se, e somente se, A^{-1} é contínuo em zero (item v) do Teorema 1.5.2). Temos que provar para todo $B(0, \delta) \subset X$ existe $B(0, \varepsilon) \subset Y$ tal que $A^{-1}(B(0, \varepsilon)) \subset B(0, \delta)$. Como A é bijetor, então $B(0, \varepsilon) \subset A(B(0, \delta))$ se, e somente se, $B(0, \varepsilon \cdot \delta^{-1}) \subset A(B(0, 1))$ se, e somente se, existe um ε_0 tal que $B(0, \varepsilon_0) \subset A(B(0, 1))$. Pelo Lema anterior existe um $\varepsilon > 0$ tal que $B(0, \varepsilon) \subset \overline{A(B(0, 1))}$. Provemos que $B(0, \frac{\varepsilon}{2}) \subset A(B(0, 1))$. Note que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos,

$$B\left(0, \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} B(0, \varepsilon) \subset \frac{1}{2^n} \overline{A(B(0, 1))} = \overline{A\left(B\left(0, \frac{1}{2^n}\right)\right)},$$

ou seja, $B(0, \frac{\varepsilon}{2^n}) \subset \overline{A(B(0, \frac{1}{2^n}))} A(B(0, \frac{1}{2^n}))$.

Seja $y \in B(0, \frac{\varepsilon}{2})$ isso implica que

$$y \in A\left(\overline{B\left(0, \frac{1}{2^n}\right)}\right) A\left(B\left(0, \frac{1}{2}\right)\right),$$

então existe um $x_1 \in B(0, \frac{1}{2})$ tal que

$$\|y - Ax_1\| < \frac{\varepsilon}{2^2} \Rightarrow y - Ax_1 \in B\left(0, \frac{\varepsilon}{2^2}\right) \Rightarrow y - Ax_1 \in A\left(\overline{B\left(0, \frac{1}{2^2}\right)}\right).$$

Seguindo o mesmo raciocínio existe um $x_2 \in B(0, \frac{1}{2^2})$ tal que

$$\|y - Ax_1 - Ax_2\| < \frac{\varepsilon}{2^3}.$$

A partir disso, continuamos e construímos $\{x_n\}$ tal que

$$\|x_n\| < \frac{1}{2^n}$$

e tal que

$$\|y - Ax_1 - \cdots - Ax_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Considere a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ e majorada por } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

e como x é Banach, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x.$$

Sendo $S_n = x_1 + \cdots + x_n$ implica que $S_n \rightarrow x$. Como A é contínuo então,

$$AS_n \rightarrow Ax \Rightarrow \sum_{i=1}^n Ax_i \rightarrow Ax \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} Ax_i = Ax.$$

Daí, temos que

$$\|y - Ax_1 - \cdots - Ax_n\| = \|y - AS_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} Ax_i = y \Rightarrow y = Ax.$$

Como

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i,$$

temos que

$$\|x\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Ou seja, dado $x \in B(0, \frac{\varepsilon}{2})$ existe um $y \in A(B(0, 1))$ tal que $x = A^{-1}y$ ou $y = Ax$. $\square$

Teorema 2.4.2. *Seja X um espaço vetorial e sejam $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ duas normas definidas nesse espaço X . Vamos supor que:*

i) $\|\cdot\|_1$ é subordinada a $\|\cdot\|_2$;

ii) $\{X, \|\cdot\|_1\}$ e $\{X, \|\cdot\|_2\}$ são Banach.

Então $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$.

Demonstração. Por hipótese existe c_1 tal que $\|x\|_1 \leq c_1\|x\|_2$ para todo $x \in X$. Seja $X_1 = \{X, \|\cdot\|_1\}$ e $X_2 = \{X, \|\cdot\|_2\}$ e considere

$$\begin{aligned} J : X_2 &\longrightarrow X_1 \\ x &\longrightarrow Jx = x, \end{aligned}$$

de modo que

$$\|Jx\|_1 \leq c_1 \|x\|_2$$

para todo $x \in X_2$, logo $J \in \mathcal{L}(X_2, X_1)$.

Pelo Teorema anterior $J^{-1} \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ então existe $c_2 > 0$ tal que $\|J^{-1}x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1$ para todo $x \in X$. Assim,

$$\|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1$$

para todo $x \in X$. Por conseguinte, temos a equivalência. $\square$

Definição 2.4.1. *Sejam X e Y dois espaços normados. Se chama soma direta desses espaços ao conjunto*

$$X + Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\},$$

com

$$\|(x, y)\|_{X+Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y.$$

Definição 2.4.2. *Sejam X, Y dois espaços de normados, $A : X \longrightarrow Y$ e $D(A) \subset X$. Chama-se gráfico de A e denota-se G_A , ao conjunto*

$$G_A = \{(x, Ax) \mid x \in D(A)\}.$$

Observação 2.4.1. Obviamente $G_A \subset X + Y$.

Definição 2.4.3. *Seja $A : X \longrightarrow Y$ um operador linear e $D(A) \subset X$ chama-se fechado, caso seu gráfico G_A é um conjunto fechado em $X + Y$.*

Lema 2.4.3. *Um operador linear $A : X \longrightarrow Y$ é fechado se, e somente se, para todo $\{x_n\} \subset D(A)$ tal que $x_n \longrightarrow x \in X$ e $A(x_n) \longrightarrow y$ em Y , então $x \in D(A)$ e $Ax = y$.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Seja A um operador linear fechado, então G_A é fechado, logo para todo $\{x_n\} \in D(A)$ tal que $x_n \longrightarrow x$ em X e $A(x_n) \longrightarrow y$ em Y . Como $(x_n, A(x_n)) \in G_A$ para todo n , assim, $(x, y) \in G_A$, e portanto, $y = Ax$. $\square$

Teorema 2.4.3. *Seja o operador linear $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $D(A) = X$. Então A é fechado.*

Demonstração. Seja $\{x_n\} \subset X$ tal que $x_n \longrightarrow x$ em X e $Ax_n \longrightarrow y$ em Y . Por conseguinte, $x \in D(A) = X$ e como A é contínuo $Ax_n \longrightarrow Ax$ e pela unicidade do limite temos que $Ax = y$, e portanto, A é fechado. $\square$

Lema 2.4.4. *Sejam X, Y espaços normados e $A : X \longrightarrow Y$ um operador linear com $D(A) \subset X$. Supor que existe o operador inverso $A^{-1} : Y \longrightarrow X$ e $D(A^{-1}) = \text{Im}(A)$. A é fechado se, e somente se, A^{-1} é também fechado.*

Exemplo 2.4.1. *Seja o operador linear $\partial : C[a, b] \longrightarrow C[a, b]$ com $D(\partial) = \{x \in C^{(1)}[a, b] \mid x(a) = 0\}$ e $\partial x = x'$. Vamos provar que é fechado. Seja*

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ x(a) = 0 \end{cases}$$

para todo $y \in C[a, b]$. Assim,

$$x(t) = \int_a^t y(s) ds.$$

Daí, $\partial^{-1} : C[a, b] \longrightarrow C[a, b]$, então

$$\partial^{-1}x(t) = \int_a^t y(s) ds.$$

Por consequência $\partial^{-1} \in \mathcal{L}(X, Y)$, logo é fechado, e portanto, ∂ é fechado.

Teorema 2.4.4. (Banach) *Sejam X, Y dois espaços de Banach e seja $A : X \longrightarrow Y$ um operador fechado. Então se $D(A) = X$ implica que $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.*

Demonstração. Seja $\|x\|_G = \|x\|_X + \|Ax\|_Y$ para todo $x \in X$, então $\|x\|_X \leq \|x\|_G$. Vamos provar que $\{X, \|\cdot\|_G\}$ é de Banach. Seja $\{x_n\}$ uma sequência de Cauchy em

$$\{X, \|\cdot\|_G\}$$

então

$$\|x_n - x_m\|_G \longrightarrow 0 \Rightarrow \|x_n - x_m\| + \|Ax_n - Ax_m\|_Y \longrightarrow 0$$

com $m, n \rightarrow \infty$. Logo, $\{x_n\}$ é de Cauchy em X e $\{Ax_n\}$ é de Cauchy em Y . Daí, existe um $x \in X$ e um $y \in Y$ tais que

$$\begin{aligned} x_n &\longrightarrow x \text{ em } X \\ Ax_n &\longrightarrow y \text{ em } Y, \end{aligned}$$

logo $Ax = y$ pois A é fechado, por isso $x_n \longrightarrow x$ em norma G . Então,

$$\|x_n - x\|_G = \|x_n - x\|_X + \|Ax_n - Ax\|_Y \longrightarrow 0.$$

Logo, $\{X, \|\cdot\|_G\}$ é de Banach, então $\|\cdot\|_X \sim \|\cdot\|_G$, desse modo, existe um $c > 0$ tal que

$$\|x\|_G \leq c\|x\|_X \Rightarrow \|x\|_X + \|Ax\|_Y \leq c\|x\|_X,$$

ou seja, $\|Ax\|_Y \leq c\|x\|_Y$ para todo $x \in X$, e portanto, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. □

Capítulo 3

Espaços Dual e Operadores Adjuntos

3.1 Espaço Dual

Para Botelho, Pellegrino e Teixeira (2015, p. 83) a qualidade importante dos espaços duais é que os funcionais são retratados como objetos pertencentes a mesma classe dos elementos do espaço. Além disso, se utilizarmos o dual do dual de um devido espaço normado, podemos ocasionalmente, voltarmos ao espaço original.

Seja $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ uma funcional linear com $f(x) = \langle x, f \rangle$. f é limitado se existe um $c \geq 0$ tal que $|\langle x, f \rangle| \leq c\|x\|$ para todo x .

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x, f \rangle|$$

Definição 3.1.1. *O conjunto de todos os funcionais lineares limitados num espaço normado X se chama o espaço dual a X e designa-se X^* . $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ sempre é de Banach.*

Teorema 3.1.1. *O espaço $\ell_1^* \cong \ell_\infty$ (ℓ_1^* é isométrico a ℓ_∞). Ou seja, para todo $f \in \ell_1^*$, existe um único $y \in \ell_\infty$ tal que*

$$\langle x, f \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \quad \forall x \in \ell_1.$$

Demonstração. Seja $y \in \ell_\infty$ e seja $fy \in \ell_1^*$ tal que para todo $x \in \ell_1$,

$$\langle x, fy \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

Note que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| |y_i| \leq \sup_{1 \leq i \leq n} |y_i| \sum_{i=1}^n |x_i|$$

e passando para o limite temos

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \|y\|_\infty \sum_{i=1}^n |x_i| < \infty.$$

Assim,

$$|\langle x, fy \rangle| < \|y\|_\infty \|x\|_1 \Rightarrow \|fy\| \leq \|y\|_\infty.$$

Considere $J: \ell_\infty \rightarrow \ell_1^*$ definida por $Jy = fy$. Seja $f \in \ell_1^*$. Seja $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ com $e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0, \dots) \in \ell_1$. Temos que $\{e_j\}$ é base de Schauder em ℓ_1 , pois para todo $x \in \ell_1$ temos

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j, \quad \text{onde } x_j = \langle x, f e_j \rangle.$$

Seja $y_j = \langle e_j, f \rangle$ para todo $j = 1, \dots, n, \dots$. Então,

$$|y_j| = |\langle e_j, f \rangle| \leq \|f\|$$

para todo $j \in \mathbb{N}$, logo $y = (y_1, \dots, y_n, \dots) \in \ell_\infty$. Como f é contínuo e

$$\left\langle \sum_{j=1}^n x_j e_j, f \right\rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j$$

e passando o limite com $n \rightarrow \infty$ obtemos

$$\langle x, f \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j \quad \forall x \in \ell_1.$$

Donde,

$$\langle x, f \rangle = \langle x, Jy \rangle \Rightarrow f = Jy$$

para todo $x \in \ell_1$. Portanto, J é sobrejetor. Ainda,

$$\|y_j\| = \langle e_j, f \rangle$$

e aplicando o supremo, temos

$$\|y\|_\infty \leq \|fy\| \leq \|y\|_\infty,$$

logo $\|y\|_\infty = \|fy\| = \|Jy\|$. □

Exemplo 3.1.1. Sejam $X^* = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)^*$ e $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$. Vamos mostrar que $X^* \cong X$.

Vamos provar que para todo X de dimensão finita, $X^* \cong X$. Seja $\{e_1, \dots, e_n\} \subset X$ uma

base de X . Seja $f \in X^*$. Daí, como f é linear temos

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \omega_i = \langle \alpha, \omega \rangle. \end{aligned}$$

Então temos que $\dim X^* = n$, e portanto, $X^* \cong X$.

Teorema 3.1.2. Para qualquer $p > 1$ temos $\ell_p^* \cong \ell_q$, sendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ou seja, para todo $f \in \ell_p^*$ existe um único $y \in \ell_q$ tal que

$$\langle x, f \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

Demonstração. Seja $\{e_k\}$ uma base de Schauder em ℓ_p . Para todo $x \in \ell_p$ têm uma única representação do tipo

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k.$$

Considere um funcional $f \in \ell_p^*$. Essa funcional f é linear e limitado, então

$$\langle x, f \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \gamma_k, \quad \text{onde } \gamma_k = f(e_k).$$

Seja $q \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow (q-1)p = q$ e considere a sequência

$$x_n = \xi_k^{(n)} = \begin{cases} \frac{|\gamma_k|^q}{\gamma_k}, & \text{se } 0 \leq k \leq n \text{ e } \gamma_k \neq 0 \\ 0, & \text{se } k > n \text{ ou } \gamma_k = 0 \end{cases}$$

Vamos substituir

$$\langle x_n, f \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(n)} \gamma_k = \sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k|^q.$$

Também temos, usando a sequência $x_n = \xi_k^{(n)}$ e $(q-1)p = q$,

$$\begin{aligned} |\langle x_n, f \rangle| \leq \|f\| \|x_n\| &= \|f\| \left(\sum |\xi_k^{(n)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|f\| \left(\sum |\gamma_k|^{(q-1)p} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|f\| \left(\sum |\gamma_k|^q \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

como $\langle x_n, f \rangle \leq |\langle x_n, f \rangle|$, então

$$\langle x_n, f \rangle \leq \|f\| \left(\sum |\gamma_k|^q \right)^{\frac{1}{p}}$$

e como

$$\langle x_n, f \rangle = \sum_{k=1}^n |\gamma_k|^q$$

temos,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |\gamma_k|^q &\leq \|f\| \left(\sum |\gamma_k|^q \right)^{\frac{1}{p}} \Rightarrow \frac{\sum_{k=1}^n |\gamma_k|^q}{\left(\sum |\gamma_k|^q \right)^{\frac{1}{p}}} \leq \|f\| \\ &\Rightarrow \frac{\sum |\gamma_k|^q}{\left(\sum |\gamma_k|^q \right)^{\frac{1}{p}}} \leq \|f\| \\ &\Rightarrow \left(\sum |\gamma_k|^q \right)^{1-\frac{1}{p}} \leq \|f\| \\ &\Rightarrow \left(\sum |\gamma_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

logo $(\gamma_k) \in \ell_q$. Por outro lado, tomando $b \in \ell_q$ tal que $b = \beta_k$, então existe um ℓ_p^* tal que

$$\langle x, g \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \beta_k$$

onde $x = (\xi_k) \in \ell_p$. Desse modo, pela desigualdade de Hölder temos,

$$|\langle x, f \rangle| = \left| \sum \xi_k \gamma_k \right| \leq \left(\sum |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |\gamma_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \|x\| \left(\sum |\gamma_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Para $x \in \ell_p$ tal que $\|x\| = 1$ temos,

$$|f(x)| \leq \left(\sum |\gamma_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \Rightarrow \|f\| = \|c\|_q$$

onde $c = (\gamma_k) \in \ell_q$ e $\gamma_k = f(e_k)$.

Defina

$$\begin{aligned} g &: \ell_p^* \longrightarrow \ell_q \\ f &\longmapsto c \end{aligned}$$

tal que $\|f\| = \|c\|_q$. Consequentemente g é sobrejetora. Se

$$g(f) = 0 \Rightarrow \|0\| = \|f\| = 0 \Rightarrow f = 0 \Rightarrow N(g) = 0$$

logo, g é injetora e portanto bijetora. Note que $\alpha f \mapsto \alpha c$ e portanto, se $\alpha_1 f_1 \mapsto \alpha_1 c_1$ e $\alpha_2 f_2 \mapsto \alpha_2 c_2$ implica que $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \mapsto \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2$, por conseguinte, g é linear e portanto é isomorfismo. Que g preserva norma está provado acima

$$\|gf\|_q = \|c\|_q = \|f\|.$$

Portanto, $\ell_p^* \cong \ell_q$. □

Teorema 3.1.3. *Seja $p > 1$ e $L_p^*[a, b] \cong L_q[a, b]$, sendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ou seja, para todo $f \in L_p^*[a, b]$ existe um único $y \in L_q[a, b]$ tal que*

$$\langle x, f \rangle = \int_a^b x(t)y(t) dt.$$

Teorema 3.1.4. (Riez) *Seja H um espaço de Hilbert. Para todo $f \in H^*$, existe um único $y \in H$ tal que $\langle x, f \rangle = \langle x, y \rangle$ para todo $x \in H$ e $\|f\| = \|y\|$.*

Demonstração. Seja $f \in H^*$ e seja $N = N(f)$ (N é subespaço vetorial fechado). Se $N = H^*$ então $f = 0$, logo $y = 0$. Suponha que $N \neq H^*$ isso implica que $H^* = N \oplus N^\perp$, onde $N^\perp \neq \{0\}$, por isso existe $y_0 \perp N$ e $y_0 \neq 0$. Seja $x \in H$ e considere

$$x_1 = x - \frac{\langle x, f \rangle}{\langle y_0, f \rangle} y_0.$$

Assim

$$\langle x_1, f \rangle = \langle x, f \rangle - \frac{\langle x, f \rangle}{\langle y_0, f \rangle} \langle y_0, f \rangle = 0,$$

por consequência $x_1 \in N$ e como $y_0 \perp N$ então $\langle x_1, y_0 \rangle = 0$. Daí,

$$\langle x, y_0 \rangle = \frac{\langle x, f \rangle}{\langle y_0, f \rangle} \|y_0\|^2 \Rightarrow \langle x, f \rangle = \left\langle x, \frac{\langle y_0, f \rangle}{\|y_0\|^2} y_0 \right\rangle \Rightarrow \langle x, f \rangle = \langle x, y \rangle$$

para todo $x \in H$.

Agora vamos provar a unicidade. Supor que $\langle x, f \rangle = \langle x, y_1 \rangle$ para todo $x \in H$. Subtraindo $\langle x, y - y_1 \rangle = 0$ para todo $x \in H$ e tomando $x = y - y_1$ temos que

$$\langle y - y_1, y - y_1 \rangle = 0 \Rightarrow \|y - y_1\|^2 = 0 \Rightarrow y = y_1.$$

Provamos que

$$|\langle x, f \rangle| = |\langle x, y \rangle| \leq \|y\| \cdot \|x\| \Rightarrow \|f\| \leq \|y\|$$

para todo $x \in H$. Por outro lado

$$|\langle y, f \rangle| = |\langle y, y \rangle| = \|y\|^2.$$

Daí, temos que,

$$\begin{aligned} \|f\| &\geq \frac{|\langle y, f \rangle|}{\|y\|} = \frac{\|y\|^2}{\|y\|} = \|y\| \\ \|f\| &\geq \|y\| \\ \|f\| &= \|y\|. \end{aligned}$$

□

Corolário 3.1.1. *Seja H um espaço de Hilbert real. Então $H^* \cong H$.*

Demonstração. Seja $f \in H^*$, então existe único $y \in H$ tal que $\langle x, f \rangle = \langle x, y \rangle$ para todo x e $\|f\| = \|y\|$. Defina

$$\begin{aligned} J : H^* &\longrightarrow H \\ f &\longrightarrow Jf = y. \end{aligned}$$

Provando que J é linear e bijetor, então temos que $\|Jy\| = \|y\|$.

Usando o fato acima e a identidade do paralelogramo, concluímos que J também preserva o produto interno. □

Observação 3.1.1. Se H é complexo J é anti-linear, ou seja, $J(\alpha x + \beta y) = \overline{\alpha}Jx + \overline{\beta}Jy$.

3.2 O Teorema de Hahn-Banach

O Teorema de Hahn-Banach é um teorema de extensão para funcionais lineares. O teorema de Hahn-Banach se torna um dos teoremas mais importantes em conexão com operadores lineares limitados. Além disso, o teorema também caracteriza a extensão em que os valores de uma funcionalidade linear podem ser pré-atribuídos. O teorema foi descoberto por H. Hahn (1927), e redescoberto em sua forma atual mais geral por S. Banach (1929) e generalizado para espaços vetoriais complexos por H. F. Bohnenblust e A. Sobczyk (1938). De um modo geral, em um problema de extensão, considera-se um objeto matemático (por exemplo, um mapeamento) definido em um subconjunto M de um determinado conjunto X e deseja-se estender o objeto de M para todo o conjunto X de tal maneira que certas propriedades básicas do objeto continuem fechados para o objeto estendido. No teorema de Hahn-Banach, o objeto a ser estendido é um funcional linear f

que é definido no subespaço M de um espaço vetorial X . (KREYSZIG, 1978, p. 213, tradução do autor).

Definição 3.2.1. *Seja X um espaço vetorial normado e $M \subset X$ um subespaço vetorial próprio. Seja $f_0 : M \rightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear limitado em M . Um funcional $f \in X^*$ se chama extensão de f_0 se $\langle x, f_0 \rangle = \langle x, f \rangle$ para todo $x \in M$.*

Exemplo 3.2.1. *Seja H um espaço de Hilbert e $M \subset H$ um subespaço vetorial fechado.*

Para todo $f_0 \in H^*$ existe um único $y_0 \in M$ tal que $\langle x, f_0 \rangle = \langle x, y_0 \rangle$ para todo $x \in M$ e $\|f_0\| = \|y_0\|$. Considere $f \in H^*$ tal que $\langle x, f \rangle = \langle x, y_0 \rangle$. Então,

$$\|f\| = \|y_0\| = \|f_0\|$$

para todo $x \in M$. Portanto, temos que $\langle x, f \rangle = \langle x, y_0 \rangle = \langle x, f_0 \rangle$.

Definição 3.2.2. *Seja X um espaço vetorial. Uma aplicação $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se seminorma se:*

- i) $p(x) \geq 0$;
- ii) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$;
- iii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

Teorema 3.2.1. (Hahn-Banach) *Seja X um espaço vetorial real e $L_0 \subset X$ um subespaço vetorial próprio e seja p uma seminorma em X . Então para todo f_0 linear em L_0 tal que $|\langle x, f_0 \rangle| \leq p(x)$ para todo $x \in L_0$, existe um funcional linear f em X^* tal que $|\langle x, f \rangle| \leq p(x)$ para todo $x \in X$ tal que f é extensão de f_0 e $\langle x, f \rangle = \langle x, f_0 \rangle$ para todo $x \in L_0$.*

Demonstração. Seja $y_0 \in X \setminus L_0$ e seja $L_1 = \mathcal{L}\{L_0, y_0\}$. Para todo $x \in L_1$, existe um único $x_0 \in L_0$ e existe único $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $x = x_0 + \lambda y_0$. Considere $\langle x, f_1 \rangle = \langle x_0, f_0 \rangle + \lambda c$, sendo $c \in \mathbb{R}$. Vamos provar que f_1 é linear.

Se $x \in L_0$ então $\lambda = 0$, logo, para todo $x \in L_0$ temos $\langle x, f_1 \rangle = \langle x_0, f_0 \rangle$. Iremos fazer uma escolha de $c \in \mathbb{R}$ apropriado. Sejam $x', x'' \in L_0$. Então,

$$\begin{aligned} \langle x', f_0 \rangle + \langle x'', f_0 \rangle &= \langle x' + x'', f_0 \rangle \leq |\langle x' + x'', f_0 \rangle| \\ &\leq p(x' + x'') = p(x' - y_0 + y_0 + x'') \\ &\leq p(x' - y_0) + p(x'' + y_0). \end{aligned}$$

Logo, para todo $x', x'' \in L_0$ temos $\langle x', f_0 \rangle - p(x' - y_0) \leq -\langle x'', f_0 \rangle + p(x'' + y_0)$. Assim, existe

$$c' = \sup_{x' \in L_0} (\langle x', f_0 \rangle - p(x' - y_0))$$

para x'' fixo. Também existe um

$$c'' = \inf_{x'' \in L_0} (-\langle x'', f_0 \rangle + p(x'' + y_0))$$

para x' fixo. Logo, $c' \leq c''$. Tome $c \in \mathbb{R}$ tal que $c' \leq c \leq c''$, desta forma

$$\langle x', f_0 \rangle - p(x' - y_0) \leq c \leq -\langle x'', f_0 \rangle + p(x'' + y_0). \quad (3.1)$$

Agora vamos avaliar para $\lambda > 0$. Para todo $x \in L_1$, $x = x_0 + \lambda y_0$ e $\lambda > 0$. Desse modo,

$$\begin{aligned} \langle x, f_1 \rangle &= \langle x_0, f_0 \rangle + \lambda c \\ &= \lambda \left(\left\langle \frac{x_0}{\lambda}, f_0 \right\rangle + c \right). \end{aligned}$$

Usando $x'' = \frac{x_0}{\lambda}$ em 3.1 e fazendo $\langle x'', f_0 \rangle + c \leq p(x'' + y_0)$, obtemos

$$\lambda \left(\left\langle \frac{x_0}{\lambda}, f_0 \right\rangle + c \right) \leq \lambda p \left(\frac{x_0}{\lambda} + y_0 \right) = p(x_0 + \lambda y_0) = p(x),$$

logo $\langle x, f_1 \rangle \leq p(x)$.

Avaliando agora para $\lambda < 0$ temos,

$$\begin{aligned} \langle x, f_1 \rangle &= \langle x_0, f_0 \rangle + \lambda c \\ &= -\lambda \left\langle \frac{x_0}{-\lambda}, f_0 \right\rangle - c \\ &\leq -\lambda p \left(\frac{x_0}{-\lambda} - y_0 \right) \\ &= p(x_0 + \lambda y_0) = p(x) \Rightarrow \langle x, f_1 \rangle \leq p(x), \end{aligned}$$

e portanto $\langle x, f_1 \rangle \leq p(x)$ para todo $x \in L_1$. Se $\langle x, f_1 \rangle = 0$ então $|\langle x, f_1 \rangle| \leq p(x)$, por outro lado se

$$\langle x, f_1 \rangle < 0 \Rightarrow |\langle x, f_1 \rangle| = -\langle x, f_1 \rangle = \langle -x, f_1 \rangle \leq p(-x) = p(x).$$

Em ambos os casos $|\langle x, f_1 \rangle| \leq p(x)$ para todo $x \in L_1$.

Vamos usar o Lema de Zorn para provar a extensão. Para todo M subespaço vetorial em X tal que $L_0 \subset M$. Tome $g : M \rightarrow \mathbb{K}$ linear tal que

- i) g é extensão de f_0 ;
- ii) $|\langle x, g \rangle| \leq p(x) \quad \forall x \in M$.

Denotemos $M = \{(M, g)\}$. Diremos que $(M_1, g_1) < (M_2, g_2)$, se $M_1 \subset M_2$ e se $\langle x, g_1 \rangle = \langle x, g_2 \rangle$ para

todo $x \in M_1$. Seja $A \subset M$ totalmente ordenado. Tome

$$L = \bigcup_{(M_\lambda, g_\lambda)} M_\lambda.$$

Definimos $f : L \rightarrow \mathbb{K}$. Para todo $x \in L$ existe um λ_0 tal que $x \in M_{\lambda_0}$ e definimos $\langle x, f \rangle = \langle x, g_{\lambda_0} \rangle$. Afirmamos que $\{L, f\}$ é majorante de A . Ou seja, para todo $(M_\lambda, g_\lambda) \in A$ temos $(M_\lambda, g_\lambda) < (L, f)$. Logo, pelo Lema de Zorn, existe um elemento máximo em M , que é $(\tilde{X}, f)$.

Afirmamos que $\tilde{X} = X$. Suponha por absurdo que $\tilde{X} \subset X$. Pelo procedimento anterior, existe $\tilde{X}_1 \subset X$ tal que $\tilde{X} \subset \tilde{X}_1$ e existe $f_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow \mathbb{K}$ que satisfaz i) e ii), ou seja, $(\tilde{X}, f) < (\tilde{X}_1, f_1)$ o que é impossível porque $(\tilde{X}, f)$ é máximo. Portanto, é um absurdo. $\square$

Nota 3.2.1. O Teorema de Hahn-Banach é válido no caso de X complexo.

Teorema 3.2.2. *Seja X um espaço normado e seja $M \subset X$ um subespaço vetorial próprio em X . Para qualquer f_0 funcional linear e limitado em M existe um funcional $f \in X^*$ tal que:*

i) f é extensão de f_0 tal que $\langle x, f \rangle = \langle x, f_0 \rangle$ para todo $x \in M$;

ii) $\|f\| = \|f_0\|_{\mathcal{L}(M, \mathbb{K})}$.

Demonstração. Definimos em $p(x) = \|f_0\|_{\mathcal{L}(M, \mathbb{K})} \cdot \|x\|$. Note que

$$|\langle x, f_0 \rangle| \leq \|f_0\|_{\mathcal{L}(M, \mathbb{K})} \cdot \|x\| = p(x)$$

para todo $x \in M$. Pelo Teorema Hahn-Banach, existe $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ linear tal que f é extensão de f_0 e $|\langle x, f \rangle| \leq p(x)$ para todo $x \in X$. Onde

$$|\langle x, f \rangle| \leq \|f_0\|_{\mathcal{L}(M, \mathbb{K})} \cdot \|x\| \quad \forall x \in X.$$

Logo, $\|f\| \leq \|f_0\|_{\mathcal{L}(M, \mathbb{K})}$. Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \|f_0\|_{\mathcal{L}(M, \mathbb{K})} &= \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in M}} |\langle x, f_0 \rangle| = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in M}} |\langle x, f \rangle| \\ &\leq \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x, f \rangle| = \|f\| \end{aligned}$$

logo $\|f_0\|_{\mathcal{L}(M, \mathbb{K})} \leq \|f\|$. $\square$

Corolário 3.2.1. *Seja X um espaço normado, então para todo $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$, existe $f \in X^*$ tal que $\|f\| = 1$ e $\langle x_0, f \rangle = \|x_0\|$.*

Demonstração. Seja $L_0 = \mathcal{L}\{x_0\} = \{\lambda x_0 \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$. Defina $f_0 : \langle \lambda x_0, f_0 \rangle = \lambda \|x_0\|$. Seja f_0 linear e $\langle x_0, f_0 \rangle = \|x_0\|$ e $\|f_0\| = 1$.

Pelo Teorema Hahn-Banach, existe $f \in X^*$ tal que $\langle x_0, f \rangle = \langle x_0, f_0 \rangle = \|x_0\|$ e $\|f\| = \|f_0\| = 1$. $\square$

Corolário 3.2.2. *Seja X um espaço normado. Para todo $x_1, x_2 \in X$ existe $f \in X^*$ tal que $\|f\| = 1$ e $\langle x_1, f \rangle \neq \langle x_2, f \rangle$.*

Demonstração. Seja $x_0 = x_1 - x_2 \neq 0$. Existe $f \in X^*$ tal que $\|f\| = 1$ e $\langle x_0, f \rangle = \|x_0\| \neq 0$. Desse modo,

$$\langle x_1, f \rangle - \langle x_2, f \rangle = \|x_0\| \neq 0.$$

$\square$

Corolário 3.2.3. *Seja X um espaço normado. Então para todo $x \in X$*

$$\|x\| = \sup_{\substack{\|f\| \leq 1 \\ f \in X^*}} |\langle x, f \rangle|.$$

Nota 3.2.2. Para todo $f \in X^*$, $\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x, f \rangle|$.

Demonstração. Seja

$$c = \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle x, f \rangle|.$$

Sabemos que $|\langle x, f \rangle| \leq \|f\| \cdot \|x\|$ para todo $x \in X$. Onde

$$c \leq \sup_{\|f\| \leq 1} \|f\| \cdot \|x\| = \|x\|.$$

Para cada $x \in X$, existe $f \in X^*$ tal que $\|f\| = 1$ e tal que $\langle x, f \rangle = \|x\|$. Portanto, $c = \|x\|$. $\square$

Corolário 3.2.4. *Seja X um espaço normado e $M \subset X$ um subespaço vetorial fechado em X . Então para todo $x_0 \in X$ tal que $x_0 \notin M$. Existe $f \in X^*$ tal que*

$$i) \quad \langle x, f \rangle = 0 \text{ para todo } x \in M;$$

$$ii) \quad \langle x_0, f \rangle = 1;$$

$$iii) \quad \|f\| = \frac{1}{d}, \quad d = d(x_0, M).$$

Demonstração. Seja $L_0 = \mathcal{L}(M, x_0)$. Para todo $x \in L_0$, $x = m + \lambda x_0$, com $m \in M$. Definimos $\langle x, f_0 \rangle = \lambda$. Note que $\langle m, f_0 \rangle = 0$ para todo $m \in M$ pois $\lambda = 0$, $x = m$ e $\langle x_0, f_0 \rangle = 1$. Para todo

$x \in L_0$,

$$\begin{aligned} |\langle x, f_0 \rangle| &= \frac{|\lambda| \cdot \|x\|}{\|x\|} = \frac{|\lambda|}{\|m + \lambda x_0\|} \cdot \|x\| \\ &= \frac{1}{\|\frac{m}{\lambda} + x_0\|} \cdot \|x\| \leq \frac{1}{d} \|x\|. \end{aligned}$$

Logo, $\|f_0\| \leq \frac{1}{d}$. Como $d = \inf \|x_0 - m\|$, então existe $y_n \in M$ tal que $\|x_0 - y_n\| \rightarrow d$. Temos

$$\langle x_0 - y_n, f_0 \rangle = \langle x_0, f_0 \rangle = 1,$$

donde

$$\begin{aligned} 1 = |\langle x_0 - y_n, f_0 \rangle| &\leq \|x_0 - y_n\| \cdot \|f_0\| \Rightarrow 1 \leq d \|f_0\| \\ &\Rightarrow \|f_0\| \geq \frac{1}{d} \\ &\Rightarrow \|f_0\| = \frac{1}{d}. \end{aligned}$$

Pelo Teorema Hahn-Banach existe f do enunciado. □

Lema 3.2.1. *Seja $L \subset X$ um subespaço de X um espaço normado. L é denso em X se, e somente se, para todo $f \in X^*$ temos $\langle x, f \rangle = 0$ para todo $x \in L$, então $f \equiv 0$.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Vamos supor que $\bar{L} = X$ e seja $f \in X^*$ tal que $\langle x, f \rangle = 0$ para todo $x \in L$. Tome $x \in X$. Então existe $x_n \in L$ tal que $x_n \rightarrow x$, por conseguinte,

$$\langle x_n, f \rangle \rightarrow \langle x, f \rangle \Rightarrow \langle x, f \rangle = 0 \Rightarrow f \equiv 0.$$

$\Leftarrow$) Seja $L \subset X$ tal que para todo $f \in X^*$, $\langle x, f \rangle = 0$ para todo $x \in L$ então $f = 0$. Supondo $\bar{L} \neq X$, logo existe um $x_0 \in X$ tal que $x_0 \notin \bar{L}$. Então existe $f \in X^*$ tal que $\langle x, f \rangle = 0$ para todo $x \in \bar{L}$, desse modo, $\langle x_0, f \rangle = 1$, o que é uma contradição. □

Definição 3.2.3. *Seja X um espaço normado. Um conjunto $\{x_1, \dots, x_n\}$ é biortogonal com $\{f_1, \dots, f_n\} \subset X^*$ se $\langle x_i, f_j \rangle = \delta_{ij}$ para todo $i, j = 1, \dots, n$ tal que*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Lema 3.2.2. *Seja X um espaço normado, para todo $\{x_1, \dots, x_n\}$ linearmente independente em X , existe $\{f_1, \dots, f_n\} \subset X^*$ tal que $\{x_1, \dots, x_n\}$ e $\{f_1, \dots, f_n\}$ são biortogonais;*

Demonstração. Para todo $i = 1, \dots, n$ temos $L_i = \mathcal{L}\{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n\}$ com $x \notin L_i$. Pelo corolário anterior, existe $f_i \in X^*$ tal que $\langle x, f_i \rangle = 0$ para todo $x \in L_i$, $\langle x_i, f_i \rangle = 1$. Portanto, $\langle x_i, f_i \rangle = \delta_{ij}$. $\square$

Lema 3.2.3. *Seja X um espaço normado. Para todo $\{f_1, \dots, f_n\}$ linearmente independente em X^* existe $\{x_1, \dots, x_n\}$ em X tal que $\langle x_i, f_j \rangle = \delta_{ij}$ para todo $i, j = 1, \dots, n$.*

Demonstração. Para $n = 1$ temos $\{f_1\}$, logo $f_1 \neq 0$, então existe $y_1 \in X$ tal que $\langle y_1, f_1 \rangle \neq 0$. Tome

$$x_1 = \frac{y_1}{\langle y_1, f_1 \rangle} \Rightarrow \langle x_1, f_1 \rangle = 1.$$

Suponha por indução que para todo $n-1$, $\{f_1, \dots, f_{n-1}\}$ linearmente independente, existe $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ e vamos provar que existe para $\{f_1, \dots, f_n\}$. Seja $\{f_1, \dots, f_n\}$ linearmente independente em X^* .

Para todo $x \in X$, defina

$$y_x = x - \langle x_1, f_1 \rangle x_1 - \dots - \langle x, f_{n-1} \rangle x_{n-1}.$$

Vamos provar que existe $x \in X$ tal que $\langle y_x, f_n \rangle \neq 0$. Suponha por absurdo que $\langle y_x, f_n \rangle = 0$ para todo $x \in X$. Então,

$$\begin{aligned} \langle x, f_n \rangle &= \langle x, f_1 \rangle \langle x_1, f_n \rangle + \dots + \langle x, f_{n-1} \rangle \langle x_{n-1}, f_n \rangle \\ &= \langle x, \langle x_1, f_n \rangle f_1 + \dots + \langle x_{n-1}, f_n \rangle f_{n-1} \rangle \end{aligned}$$

isso implica que

$$f_n = \langle x_1, f_n \rangle f_1 + \dots + \langle x_{n-1}, f_n \rangle f_{n-1}$$

, o que é uma contradição. Logo, existe $x \in X$ tal que

$$y_n = x - \langle x_1, f_1 \rangle x_1 - \dots - \langle x, f_{n-1} \rangle x_{n-1}$$

tal que $\langle y_n, f_n \rangle \neq 0$ e tome

$$x_n = \frac{y_n}{\langle y_n, f_n \rangle}$$

e afirmamos que $\{x_1, \dots, x_n\}$ é biortogonal a $\{f_1, \dots, f_n\}$. De fato

$$\langle x_n, f_j \rangle = \frac{1}{\langle y_n, f_n \rangle} (\langle x, f_j \rangle - \langle x, f_j \rangle) = 0$$

com $j = 1, \dots, n-1$ e $\langle x_n, f_n \rangle = 1$. $\square$

Definição 3.2.4. *Dizemos que g em $[a, b]$ tem variação finita, se para todo $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$,*

então

$$\sum_{i=1}^{\infty} |g(t_i) - g(t_{i-1})| \leq c$$

sendo $c \geq 0$. Então,

$$\bigvee_a^b g = \sup_{a=t_0 < t_1 < \dots < t_n=b} \sum_{i=1}^n |g(t_i) - g(t_{i-1})|$$

é a variação total de g em $[a, b]$.

Exemplo 3.2.2. Toda sequência monótona em $[a, b]$ tem variação finita. Seja g crescente com

$$|g(t_i) - g(t_{i-1})| = g(t_i) - g(t_{i-1})$$

para todo $t_i > t_{i-1}$ então,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |g(t_i) - g(t_{i-1})| &= \sum_{i=1}^n [g(t_i) - g(t_{i-1})] \\ &= g(t_1) - g(a) + g(t_2) - g(t_1) + \dots + g(b) - g(t_{n-1}) \\ &= g(b) - g(a). \end{aligned}$$

Exemplo 3.2.3. Toda sequência $g \in C^{(1)}[a, b]$ é de variação finita. Existe um $\mu \geq 0$ e $|g'(t)| \leq M$ para todo $t \in [a, b]$. Então existe um $s_i \in [t_{i-1}, t_i]$ tal que $g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(s_i)(t_i - t_{i-1})$. Logo,

$$\sum_{i=1}^n |g(t_i) - g(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^n |g(s_i)| |t_i - t_{i-1}| \leq M \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = M(b - a).$$

Definição 3.2.5. Sejam x e g definidas em $[a, b]$. x é integrável relativamente a g no sentido de Riemann-Stieltjes em $[a, b]$, se existe $I \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe δ , então,

$$\left| I - \sum_{i=1}^n x(s_i) [g(t_i) - g(t_{i-1})] \right| < \varepsilon$$

para todo $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ tal que $\max_i |t_i - t_{i-1}| < \delta$ para todo $s_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

Teorema 3.2.3. (Riez) Para todo $f \in (C[a, b])^*$, existe g de variação finita em $[a, b]$ tal que

$$\langle x, f \rangle = \int_a^b x(t) dg(t)$$

para todo $x \in C[a, b]$ e

$$\|f\| = \bigvee_a^b g.$$

Demonstração. Seja $C[a, b] = C[0, 1]$. Agora, seja $B[0, 1] = \{f \text{ limitado em } [0, 1]\}$, sendo que $B[0, 1]$ é um espaço vetorial normado com a norma

$$\|x\| = \sup_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|.$$

Note que $C[0, 1] \subset B[0, 1]$. Para todo $f \in (C[a, b])^*$ então, pelo Teorema de Hahn-Banach existe um $F \in (B[a, b])^*$ tal que $\langle x, F \rangle = \langle x, f \rangle$ para todo $x \in C[0, 1]$, então, $\|F\| = \|f\|$ com $t > 0$. Para cada $t \in [0, 1]$, considere

$$H_t(\lambda) = \begin{cases} 1, & 0 \leq s \leq t \\ 0, & t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Seja $g(t) = \langle H_t, F \rangle$ com $t \in [0, 1]$. Desse modo,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |g(t_i) - g(t_{i-1})| &= \sum_{i=1}^n s_i [g(t_i) - g(t_{i-1})] \\ &= \sum_{i=1}^n s_i [\langle H_{t_i}, F \rangle - \langle H_{t_{i-1}}, F \rangle] \\ &= \sum_{i=1}^n s_i \langle H_{t_i} - H_{t_{i-1}}, F \rangle \end{aligned}$$

Por conseguinte, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |g(t_i) - g(t_{i-1})| &= \left| \left\langle \sum_{i=1}^n s_i (H_{t_i} - H_{t_{i-1}}), F \right\rangle \right| \\ &\leq \|F\| \cdot \left\| \sum_{i=1}^n s_i (H_{t_i} - H_{t_{i-1}}) \right\| \\ &\leq \|F\| = \|f\|. \end{aligned}$$

Logo,

$$\bigvee_a^b g \leq \|f\|.$$

Considere a sequência

$$x_n(t) = \sum_{i=1}^n x\left(\frac{i}{n}\right) \left[H_{\frac{i}{n}}(t) - H_{\frac{i-1}{n}}(t) \right].$$

Então,

$$\sum_{i=1}^n \left[H_{\frac{i}{n}}(t) - H_{\frac{i-1}{n}}(t) \right] = 1$$

para todo $t \in [0, 1]$.

Escolhendo uma partição bem fina, obtemos que $\|x - x_n\| \rightarrow 0$ em $B[0, 1]$ e $x_n \rightarrow x$ em $B[0, 1]$

para todo $x \in C[0, 1]$. Donde $\langle x_n, F \rangle \longrightarrow \langle x, F \rangle = \langle x, f \rangle$ para todo $x \in C[a, b]$. Note que

$$\begin{aligned}\langle x_n, F \rangle &= \sum_{i=1}^n x\left(\frac{i}{n}\right) \left[\left\langle H_{\frac{i}{n}}(t), F \right\rangle - \left\langle H_{\frac{i-1}{n}}(t), F \right\rangle \right] \\ &= \sum_{i=1}^n x\left(\frac{i}{n}\right) \left[g\left(\frac{i}{n}\right) - g\left(\frac{i-1}{n}\right) \right] \longrightarrow \int_a^b x dg\end{aligned}$$

Assim,

$$\langle x, f \rangle = \int_a^b x dg \quad \forall x \in C[a, b].$$

Então,

$$|\langle x, f \rangle| = \left| \int_a^b x dg \right| \leq \bigvee_a^b g \cdot \|x\| \Rightarrow \|f\| \leq \bigvee_a^b g.$$

Portanto,

$$\|f\| = \bigvee_a^b g.$$

□

3.3 Espaços Reflexivos e Convergência Fraca

Definição 3.3.1. *Seja X um espaço normado e seja X^* o seu Dual. Se chama Bidual para X , ao espaço $X^{**} = (X^*)^*$.*

Teorema 3.3.1. *Seja X um espaço normado. Existe um operador linear $\pi : X \longrightarrow X^{**}$ tal que*

$$\|\pi(x)\|_{X^{**}} = \|x\|_X.$$

Demonstração. Para todo $x \in X$, seja $g_x \in (X^*)^* = X^{**}$ e $\langle f, g_x \rangle = \langle x, f \rangle$ para todo $f \in X^*$. Então,

$$|\langle f, g_x \rangle| = |\langle x, f \rangle| \leq \|x\| \cdot \|f\|$$

para todo $f \in X^*$. Isso implica que $\|g_x\| \leq \|x\|$. Pelo Corolário 3.2.1, do Teorema de Hahn-Banach, para todo $x \neq 0$, $x \in X$ existe f tal que $\|f\| = 1$ e $\langle x, f \rangle = \|x\|$. Desse modo,

$$\|g_x\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle x, f \rangle| = \|x\|.$$

Defina $\pi : x \longrightarrow g_x$. Mostramos que π é linear e injetor e preserva a norma. Isso pode ser expresso em termos de um isomorfismo de espaços normativos. □

Definição 3.3.2. Um espaço normado se chama reflexivo, se $\pi(X) = X^{**}$. Se X é reflexivo, então $X \cong X^{**}$.

Exemplo 3.3.1. Se X não é completo então ele não é reflexivo.

Exemplo 3.3.2. Se $\dim X < +\infty$, logo X é reflexivo.

Exemplo 3.3.3. Para todo $p > 1$ temos que ℓ_p e $L_p[a, b]$ são reflexivos.

Exemplo 3.3.4. Seja H um espaço de Hilbert, então H é reflexivo. Temos que,

$$H^* = H \Rightarrow H^{**} = (H^*)^* = H^* = H.$$

Teorema 3.3.2. Seja X um espaço normado tal que X^* é separável. Desse modo, X também é separável.

Demonstração. Seja $S^* = \{f \in X^* \mid \|f\| = 1\}$. Como X^* é separável existe $F = \{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ enumerável tal que $\overline{F} = S^*$ onde $F \subset S^*$.

Observação: Existe $G = \{g_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $\overline{G} = X^*$ e tal que para todo $f \in S^*$ existe $g_n \in G : g_n \rightarrow f$ e $f_n = \frac{g_n}{\|g_n\|}$ com $f_n \in S^*$, $f_n \rightarrow f$.

Continuando a demonstração, temos que,

$$1 = \|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x, f \rangle|$$

assim, existe um $x_n \in X$ tal que $|\langle x_n, f_n \rangle| \geq \frac{1}{2}$. Seja $Y = \mathcal{L}\{x_n\}$. Afirmamos que $\overline{Y} = X$. Suponha que $\overline{Y} \neq X$. Pelo Teorema de Hahn-Banach existe $f \in X^*$ tal que $\langle y, f \rangle = 0$ para todo $y \in \overline{Y}$ e $\|f\| = 1$, onde $f \in S^*$, isso implica que existe $f_{n_k} : f_{n_k} \rightarrow f$ e $f_{n_k} \in F$. Daí,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\leq |\langle x_{n_k}, f_{n_k} \rangle| = |\langle x_{n_k}, f_{n_k} \rangle - \langle x_{n_k}, f \rangle| \\ &\leq \|x_{n_k}\| \cdot \|f_{n_k} - f\| \\ &\leq \|f_{n_k} - f\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

com $n \rightarrow \infty$, o que é uma contradição. Portanto, $\overline{Y} = X$. □

Corolário 3.3.1. O espaço ℓ_1 não é reflexivo.

Demonstração. Provamos que $\ell_1^* = \ell_\infty$. Suponha ℓ_1 , então $\ell_1 = \ell_\infty^*$, logo ℓ_∞^* é separável, consequentemente, ℓ_∞ é separável, o que contradiz o Teorema anterior.

Pela mesma razão, L_1 e ℓ_∞ não são reflexivos. □

Definição 3.3.3. *Seja X um espaço normado, se diz uniformemente convexo se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que para todo $x, y \in X$, $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x - y\| \geq \varepsilon$, então,*

$$\|x + y\| \leq 2(1 - \delta).$$

Teorema 3.3.3. (Clarkson) *Para todo $p > 1$, ℓ_p e $L_p(\Omega)$ são uniformemente convexos.*

Demonstração. Sejam $p \geq 2$ e $\|x\| = \|y\| = 1$. Pela Desigualdade de Clarkson a seguir temos que

$$\left(\left\| \frac{x+y}{2} \right\|_p^p + \left\| \frac{x-y}{2} \right\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{\|x\|_p^p + \|y\|_p^p}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \Rightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\|_p^p + \left\| \frac{x-y}{2} \right\|_p^p \leq \frac{\|x\|_p^p + \|y\|_p^p}{2} = 1.$$

Então, se $\|x - y\| \geq 2\varepsilon$ com $0 < \varepsilon \leq 1$, nós vemos que

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|_p^p \leq 1 - \left\| \frac{x-y}{2} \right\|_p^p \leq 1 - \varepsilon^p.$$

Elevando ambos os lados na potência $\frac{1}{p}$, temos

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|_p \leq (1 - \varepsilon^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Fazendo $\delta = 1 - (1 - \varepsilon^p)^{\frac{1}{p}}$, obtemos

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|_p \leq 1 - \delta.$$

Por outro lado, sejam $1 < p \leq 2$ e $\|x\| = \|y\| = 1$. Por outra desigualdade de Clarkson temos o seguinte,

$$\left(\left\| \frac{x+y}{2} \right\|_q^q + \left\| \frac{x-y}{2} \right\|_q^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{\|x\|_p^p + \|y\|_p^p}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \Rightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\|_q^q + \left\| \frac{x-y}{2} \right\|_q^q \leq \left(\frac{\|x\|_p^p + \|y\|_p^p}{2} \right)^{\frac{q}{p}} = 1.$$

Então se $\|x - y\| \geq 2\varepsilon$, com $0 < \varepsilon \leq 1$, nós vemos que

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|_q^q \leq 1 - \left\| \frac{x-y}{2} \right\|_q^q \leq 1 - \varepsilon^q.$$

Elevando ambos os lados na potência $\frac{1}{q}$, obtemos

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|_p \leq (1 - \varepsilon^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Fazendo $\delta = 1 - (1 - \varepsilon^q)^{\frac{1}{q}}$, obtemos

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|_p \leq 1 - \delta.$$

□

Teorema 3.3.4. (Milman) *Todo espaço de Banach X uniformemente convexo é reflexivo.*

Demonstração. Seja X um espaço de Banach uniformemente convexo. Tome $x^{**} \in S_{X^{**}}$ e considere Q a injeção canônica de X em X^{**} . Segue do Teorema de Goldstine (MEGGINSON, 1998) que existe uma sequência x_i com $i \in I$ em B_X tal que

$$(Q(x_i))_{i \in I} \xrightarrow{w^*} x^{**}.$$

Defina $(i_1, j_1) \leq (i_2, j_2)$ quando $i_1 \leq i_2$ e $j_1 \leq j_2$ com $i_1, i_2, j_1, j_2 \in I$. Assim,

$$\left(Q \left(\frac{1}{2}(x_i + x_j) \right) \right)_{i,j \in I \times I}$$

é uma sequência tal que

$$\left(Q \left(\frac{1}{2}(x_i + x_j) \right) \right)_{i,j \in I \times I} \xrightarrow{w^*} x^{**}.$$

Se $x_i^* \in X^*$ é uma sequência que converge para $x^* \in X^*$, então

$$\begin{aligned} 1 &= \|x^{**}\| \leq \lim_{(i,j) \in I \times I} \inf \left\| Q \left(\frac{1}{2}(x_i + x_j) \right) \right\| \\ &= \lim_{(i,j) \in I \times I} \inf \left\| \frac{1}{2}(x_i + x_j) \right\| \leq \lim_{(i,j) \in I \times I} \sup \left\| \frac{1}{2}(x_i + x_j) \right\| \leq 1, \end{aligned}$$

donde

$$\left\| \frac{1}{2}(x_i + x_j) \right\| \longrightarrow 1.$$

Como X é uniformemente convexo, segue que $\|x_i - x_j\| \longrightarrow 0$, o que implica que x_i é uma sequência de Cauchy. Como X é completo, existe $x_0 \in X$ tal que $x_i \longrightarrow x_0$. Logo, $(Q(x_i))_{i \in I} \longrightarrow Q(x_0)$, donde $x^{**} = Q(x_0)$. Portanto, X é reflexivo. □

Definição 3.3.4. $\{f_n \subset X^*\}$ converge fortemente para $f \subset X^*$ se $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ com $n \rightarrow \infty$.

Definição 3.3.5. $\{f_n \subset X^*\}$ converge fortemente para $f \in X^*$ se para todo $x \in X$

$$\begin{aligned}\langle x, f_n \rangle &\rightarrow \langle x, f \rangle \\ f_n &\rightarrow f\end{aligned}$$

Observação 3.3.1. Se f_n converge fortemente para f então f_n converge (ω^*) para f . De fato,

$$|\langle x, f_n \rangle| - \langle x, f \rangle = |\langle x, f_n - f \rangle| \leq \|f_n - f\| \cdot \|x\| \rightarrow 0$$

com $n \rightarrow \infty$.

Exemplo 3.3.5. Considere $\ell_p^* = \ell_q$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $e_n = (0, \dots, 0, 1, \dots, 0, 1, \dots)$. Para cada $x \in \ell_p$ temos $\langle x, e_n \rangle = x_n$ convergindo para 0 com $n \rightarrow \infty$. Então,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty.$$

Ou seja, $e_n \rightarrow 0$, de modo que, $\|e_n - e_m\|_q = 2^{\frac{1}{q}}$, e portanto, não é de Cauchy.

Teorema 3.3.5. Seja X um espaço normado e $\{f_n\} \subset X^*$ uma sequência. Então f_n converge (ω^*) para f , $f \in X^*$ se, e somente se:

- i) Existe $c > 0$ tal que $\|f_n\| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
- ii) Existe X' denso em X tal que $\langle x', f_n \rangle \rightarrow \langle x', f \rangle$ para todo $x' \in X'$.

Definição 3.3.6. Uma sequência $\{x_n\} \subset X$, converge $(x_n \rightarrow x)$ fracamente para $x \in X$ se para todo $f \in X^*$, temos que

$$\langle x_n, f \rangle \rightarrow \langle x, f \rangle.$$

Teorema 3.3.6. Seja X um espaço normado e $\{x_n\} \subset X$.

- i) Caso $\{x_n\}$ converge fortemente em X , então o seu limite é único;
- ii) Se $x_n \rightarrow x$ então x_n converge fracamente para x ;
- iii) Para todo $\{x_n\} \subset X$ que converge fracamente é limitada.

Demonstração. i) Suponha que x_n converge fracamente para x e x_n converge fracamente para y . Por definição, para todo $f \in X^*$ temos

$$\langle x_n, f \rangle \rightarrow \langle x, f \rangle \quad \text{e} \quad \langle x_n, f \rangle \rightarrow \langle y, f \rangle$$

isso implica que $\langle x, f \rangle = \langle y, f \rangle$ para todo $f \in X^*$ ou que $\langle x - y, f \rangle = 0$ para todo $f \in X^*$, pelo Teorema de Hahn-Banach existe $f \in X^*$ tal que $\|f\| = 1$ e $\langle x - y, f \rangle = \|x - y\|$. Então,

$$\|x - y\| = \langle x - y, f \rangle = 0 \Rightarrow x = y.$$

ii) Óbvio.

iii) Suponha que x_n converge fracamente para $x \in X$. Assim, $\langle x_n, f \rangle$ é convergente em $\mathbb{K}$ para todo $f \in X^*$, logo existe um $c \geq 0$ tal que $|\langle x_n, f \rangle| \leq c_f$ para todo $f \in X^*$. Seja $g_n = \pi(x_n) \in X^{**}$. Onde $|\langle f, g_n \rangle| \leq c_f$ para todo $f \in X^*$. Ora, se $g_n : X^* \rightarrow \mathbb{K}$ então, pelo princípio da limitação uniforme, $\|g_n\| \leq c$ implica que

$$\|g_n\| = \|\pi(x_n)\| = \|x_n\| \leq c$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $\{x_n\}$ é limitada. □

Exemplo 3.3.6. *Seja H um espaço de Hilbert separável e seja $\{e_j\}$ uma base ortonormal em H . Para todo $x \in H$ temos,*

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j = x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle e_j.$$

Dai,

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 \leq \|x\| \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_j \rangle|^2 = \|x\|^2$$

para todo $x \in H$. Se $\langle x, e_j \rangle \rightarrow 0$ com $j \rightarrow \infty$, então $\langle e_j, x \rangle \rightarrow 0$, e isso implica que e_j converge fracamente para 0. Como $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$, desse modo, $\{e_n\}$ não é de Cauchy.

Teorema 3.3.7. *Seja X um espaço normado, x_n converge fracamente para x em X se, e somente se,*

i) *Existe $c \geq 0$ tal que $\|x_n\| \leq c$;*

ii) *$\langle x_n, f \rangle \rightarrow \langle x, f \rangle$ para todo $f \in F$, sendo F um subespaço vetorial denso em X^* .*

Teorema 3.3.8. (Mazur) *Seja X um espaço de Banach e $\{x_n\}$ uma sequência em X e $x \in X$. Se x_n converge fracamente para x , então existe $\tilde{x}_n$ tal que*

i) $\tilde{x}_n = \sum_{k=1}^n \alpha(n)_k x_k$, sendo $\alpha(n)_k \geq 0$ tal que $\sum_{k=1}^n \alpha(n)_k = 1$;

ii) $\tilde{x}_n \rightarrow x$ fortemente.

Demonstração. Vamos provar como caso particular que x_n converge fracamente para x , então existe $\tilde{x}_n$ tal que

$$\tilde{x}_n = \sum_{k=1}^n \alpha(n)_k x_k,$$

com $\alpha(n)_k \in K$ tal que $\tilde{x}_n \rightarrow x$ fortemente. Suponha que $\tilde{x}_n$ não converge para x . Seja $Y = \overline{\mathcal{L}(\{x_n\})}$, logo $x \notin Y$. Pelo Corolário 3.2.4 existe $f \in X^*$ tal que $\langle y, f \rangle = 0$ para todo $y \in Y$ e $\langle x_0, f \rangle = 1$ para $x_0 \in X \setminus Y$ de modo que $\langle x_n, f \rangle = 0$ para todo n . Sabemos que x_n converge fracamente para x , então $\langle x_n, f \rangle \rightarrow \langle x, f \rangle$ sendo que $\langle x_n, f \rangle = 0$ e $\langle x, f \rangle = 1$, o que é um absurdo. $\square$

Teorema 3.3.9. *Seja X um espaço de Banach que é uniformemente convexo e seja $\{x_n\} \subset X$:*

i) x_n converge fracamente para x ;

ii) $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$. Então x_n converge fortemente para x .

Definição 3.3.7. *Um conjunto $M \subset X$ chama-se fracamente limitado, se para todo $f \in X^*$ existe $c_f \geq 0$ tal que $|\langle x, f \rangle| \leq c_f$ para todo $x \in M$.*

Teorema 3.3.10. *Seja X um espaço de Banach. O conjunto $M \subset X$ é limitado se, e somente se, M é fracamente limitado.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Seja M limitado, então existe um c tal que $\|x\| \leq c$ para todo $x \in M$. Seja $f \in X^*$, temos que

$$|\langle x, f \rangle| \leq \|f\| \|x\| \leq c \|f\|$$

para todo $x \in M$. Tome $c_f = c \|f\|$. $\Leftarrow$) Seja M fracamente limitado, mas não é limitado. Existe $\{x_n\} \in M$ tal que $\|x_n\| \geq n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $y_n = \frac{x_n}{n}$. Temos que,

$$|\langle y_n, f \rangle| = \frac{1}{n} |\langle x_n, f \rangle| \leq \frac{c_f}{n} \rightarrow 0$$

com $n \rightarrow \infty$ e para todo $f \in X^*$. Isso implica que y_n converge fracamente para 0, então existe c tal que $\|y_n\| \leq c$ para todo n , mas

$$\|y_n\| = \frac{\|x_n\|}{n} \geq \frac{n^2}{n} \geq n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto é um absurdo. $\square$

Teorema 3.3.11. *(Compacidade Fraca) Seja X um espaço de Banach reflexivo e $M \subset X$ limitado. Para cada $\{x_n\} \subset M$ e $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ existe $x_0 \in X$ tal que x_{n_k} converge fracamente para x_0 .*

Nota 3.3.1. Seja H um espaço de Hilbert e $\{e_j\}$ ortonormal com $\|e_j\| \leq 1$ para todo j , mas $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$ para todo $i \neq j$. $\{e_j\}$ não contém nenhuma subsequência convergente.

Demonstração. Suponha que X seja separável, então $X = X^{**}$ e, logo X^{**} é separável, assim, X^* também é separável. Existe $F \subset X$ enumerável e denso em X^* , sendo $F = \{f_1, f_2, \dots, f_n, \dots\}$. Se M é limitado então existe $c \geq 0$ tal que $\|x\| \leq c$ para todo $x \in M$. Seja $x^{(0)} = \{x_n\} \subset M$. Temos

$$|\langle x, f_1 \rangle| \leq \|x_n\| \cdot \|f_1\| \leq c \|f_1\|$$

para todo n . Seja $x_n^{(1)} \subset x_n^{(0)}$, subsequência tal que $\langle x_n^{(1)}, f_1 \rangle$ converge. Novamente

$$\left| \langle x_n^{(1)}, f_2 \rangle \right| \leq c \|f_2\|$$

para todo n . Seja $x_n^{(2)}$ subsequência de $x_n^{(1)}$ tal que $\langle x_n^{(2)}, f_2 \rangle$ converge. Continuando o raciocínio, construímos a sequência

$$x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}, \dots)$$

tal que $\langle x_n^{(n)}, f_n \rangle$ converge. Construímos então

$$x^* = (x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(n)}, \dots).$$

Afirmamos que para todo $k \in \mathbb{N}$ a sequência

$$\langle x_1^{(1)}, f_k \rangle, \langle x_2^{(2)}, f_k \rangle, \dots, \langle x_n^{(n)}, f_k \rangle, \dots$$

converge, ou seja, existe o

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n^{(n)}, f_k \rangle.$$

Vamos provar que para todo $f \in X^*$ temos que $\{\langle x_n^{(n)}, f \rangle\}$ é de Cauchy.

Seja $f \in X^*$, então existe $\{f_n\} \subset F$ tal que f_n converge para f .

$$\begin{aligned} & \left| \langle x_n^{(n)}, f \rangle - \langle x_m^{(m)}, f \rangle \right| \\ & \leq \left| \langle x_n^{(n)}, f \rangle - \langle x_n^{(n)}, f_n \rangle \right| + \left| \langle x_n^{(n)}, f_n \rangle - \langle x_m^{(m)}, f_m \rangle \right| + \left| \langle x_m^{(m)}, f_m \rangle - \langle x_m^{(m)}, f \rangle \right| \\ & \leq \|x_n^{(n)}\| \|f - f_n\| + \left| \langle x_n^{(n)}, f_n \rangle - \langle x_m^{(m)}, f_m \rangle \right| + \|x_m^{(m)}\| \|f_m - f\| \\ & \leq c \|f - f_n\| + \left| \langle x_n^{(n)}, f_n \rangle - \langle x_m^{(m)}, f_m \rangle \right| + c \|f_m - f\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

com $m, n \rightarrow \infty$. Então, para todo $f \in X^*$ existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n^{(n)}, f \rangle = g_f.$$

Introduzimos $g : X^* \longrightarrow K$ tal que $\langle f, g \rangle = g_f$. Tome $g_n = \pi(x_n^{(n)})$ tal que $g_n : X^* \longrightarrow K$ e tal que

$$\langle f, g_n \rangle = \langle x_n^{(n)}, f \rangle.$$

Daí, temos que

$$\langle g_n \rangle \rightarrow \langle f, g \rangle \quad \forall f \in X^*.$$

Por outro lado, $\|g_n\|$:

$$|\langle f, g_n \rangle| = |\langle x_n^{(n)}, f \rangle| \leq \|x_n^{(n)}\| \|f\| \leq c \|f\|.$$

Para cada X^* , $|\langle f, g_n \rangle| \leq c \|f\|$, desse modo, $\|g_n\| \leq c$. Por um Corolário do Teorema de Hahn-Banach temos que g é contínuo, logo $g \in X^{**}$, então existe x_0 tal que $\pi(x_0) = g$. Por conseguinte, $x_n^{(n)}$ converge fracamente para x_0 , ou seja, para todo f temos $\langle x_n, f \rangle \rightarrow \langle x_0, f \rangle$ para todo $f \in X^*$. Mas $\langle x_n, f \rangle = \langle f, g_n \rangle \longrightarrow \langle f, g \rangle = \langle x_0, f \rangle$. $\square$

Teorema 3.3.12. *Uma sequência $x^{(n)} = \{x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(n)}, \dots\}$ converge fracamente para x em ℓ_p com $p > 1$ se, e somente se,*

i) *Existe $c \geq 0$ tal que $\|x^{(n)}\| \leq c$;*

ii) *$x_i^{(n)} \rightarrow x_i$ com $n \rightarrow \infty$ e para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Se $x^{(n)}$ converge fracamente para x , então existe $c \geq 0$ tal que $\|x^{(n)}\| \leq c$ para todo n .

$\Rightarrow$) $\langle x^{(n)}, f \rangle \rightarrow \langle x, f \rangle$ para todo $f \in \ell_p^* = \ell_q$. Considere $e_i \in \ell_q$ tal que $e_i = (0, \dots, 1, 0, \dots)$ com $i \in \mathbb{N}$. Temos que

$$\langle x^{(n)}, e_i \rangle \rightarrow \langle x, e_i \rangle$$

sendo que $\langle x^{(n)}, e_i \rangle = x_i^{(n)}$ e $\langle x, e_i \rangle = x_i$ com $n \rightarrow \infty$ e com $i \in \mathbb{N}$.

$\Leftarrow$) Seja $F = \mathcal{L}\{e_i\}$, assim, $\overline{F} = \overline{\mathcal{L}\{e_i\}} = \ell_q$. Para todo $f \in \mathcal{L}\{e_i\}$, então

$$f = \sum_{k=1}^{n_1} \alpha_k e_k.$$

Temos que

$$\langle x^{(n)}, f \rangle = \sum_{k=1}^{n_1} \alpha_k \langle x^{(n)}, e_k \rangle = \sum_{k=1}^{n_1} \alpha_k x_k^{(n)} \rightarrow \sum_{k=1}^{n_1} \alpha_k x_k = \langle x, f \rangle.$$

$\square$

Teorema 3.3.13. *Uma sequência x_n converge fracamente para x em $L_p[a, b]$ com $p > 1$ se, e somente se,*

- i) Existe $c \geq 0$ tal que $\|x_n\|_p \leq c$;
- ii) Para todo $t \in [0, 1]$ tem-se $\int_0^t x_n(\lambda) d\lambda \longrightarrow \int_0^t x(\lambda) d\lambda$.

Teorema 3.3.14. Uma sequência x_n converge fracamente para x em $C[a, b]$ se, e somente se,

- i) Existe $c \geq 0$ tal que $\|x_n\| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
- ii) $x_n(t) \longrightarrow x(t)$ com $n \rightarrow \infty$ para todo $t \in [a, b]$.

3.4 Operadores Adjuntos

De forma sucinta, no ramo da Matemática, mais especificamente em Análise Funcional, podemos dizer que um operador linear em um espaço de Hilbert pode possuir um operador adjunto. O adjunto de um operador linear A é, de vez em quando, chamado de conjugado Hermitiano de A .

Definição 3.4.1. Sejam X, Y dois espaços normados e $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Se chama operador adjunto, a um operador $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ tal que $\langle x, A^* f \rangle = \langle A(x), f \rangle$ para todo $x \in X$ e para todo $f \in Y^*$.

Teorema 3.4.1. Para todo $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ existe um único $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ e $\|A^*\| = \|A\|$

Demonstração. Suponha que existe $A_1^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ tal que $\langle x, A^* f \rangle = \langle A(x), f \rangle$ e $\langle x, A_1^* f \rangle = \langle A(x), f \rangle$ para todo $x \in X$ e para todo $f \in Y^*$. Então $\langle x, (A^* - A_1^*) f \rangle = 0$ para todo $x \in X$ e para todo $f \in Y^*$. Logo, $(A^* - A_1^*) f = 0$ implica que $A^* = A_1^*$ para todo f . Temos que

$$|\langle x, g_f \rangle| = |\langle A(x), f \rangle| \leq \|A(x)\| \cdot \|f\| \leq \|A\| \cdot \|f\| \cdot \|x\|$$

para todo $x \in X$, onde $A^* f = g_f$ para todo $f \in Y^*$. Desse modo,

$$\|g_f\| \leq \|A\| \cdot \|f\| \Rightarrow \|A^* f\| \leq \|A\| \cdot \|f\|$$

para todo $f \in Y^*$, isso implica que $\|A^*\| \leq \|A\|$.

Para todo $x \in X$ temos $y = A(x)$, então, pelo Teorema de Hahn-Banach existe um $f \in Y^*$ tal que $\|f\| = 1$ e $\langle y, f \rangle = \|y\|$. Assim,

$$\|A(x)\| = \|y\| = \langle y, f \rangle = \langle A(x), f \rangle = \langle x, A^* f \rangle.$$

Daí, temos que

$$\begin{aligned}\langle x, A^* f \rangle &\leq \|x\| \cdot \|A^*\| \cdot \|f\| \Rightarrow \|A(x)\| \leq \|A^*\| \cdot \|x\| \\ &\Rightarrow \|A\| \leq \|A^*\| \\ &\Rightarrow \|A\| = \|A^*\|.\end{aligned}$$

□

Teorema 3.4.2. *Sejam X, Y dois espaços normados e $A, B \in \mathcal{L}(X, Y)$.*

- i) *Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ temos $(\alpha A + \beta B)^* = \alpha A^* + \beta B^*$;*
- ii) *Se $B \in \mathcal{L}(Y, Z)$ com Z sendo espaço normado, então $(BA)^* = A^* B^*$;*
- iii) *Caso $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$, $D(A^{-1}) = Y$, então $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.*

Demonstração. i) Trivial.

ii) Para todo $x \in X$ e para todo $f \in Z^*$, sabemos que

$$\langle BA(x), f \rangle = \langle x, (BA)^* f \rangle.$$

Também

$$\langle B(A(x)), f \rangle = \langle A(x), B^* f \rangle = \langle x, A^* B^* f \rangle.$$

Como

$$\langle x, (BA)^* f \rangle = \langle x, A^* B^* f \rangle \Rightarrow (BA)^* = A^* B^*.$$

iii) Temos que $AA^{-1} = I_Y$ e $A^{-1}A = I_X$. Por outro lado

$$(AA^{-1})^* = (A^{-1})^* A^* = I_{Y^*},$$

também

$$(A^{-1}A)^* = A^* (A^{-1})^* = I_{X^*},$$

isso implica que $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

□

Definição 3.4.2. *Sejam H_1 e H_2 dois espaços de Hilbert e seja $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ um operador. Um operador $A^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ chama-se Hilbertiano adjunto a A se para todo $x \in H_1$ e para todo $y \in H_2$ tivermos*

$$\langle A(x), y \rangle_{H_2} = \langle x, A^* y \rangle_{H_1}.$$

Capítulo 4

Operadores Compactos

Em Análise Funcional, os operadores compactos modelam uma grupo de operadores lineares limitados entre os espaços de Banach. Em espaços de Hilbert, pode-se mostrar que, de fato, operadores compactos são limites na norma operacional de operadores de posto finito. O estudo destes operadores veio do desenvolvimento da teoria espectral e também da validade de uma versão da alternativa de Fredholm.

4.1 Conjuntos Compactos em Espaços Normados

Definição 4.1.1. *Seja X um espaço normado e $M \subset X$ um subconjunto. Diremos que M é compacto se para todo $\{x_n\} \subset M$, existe subsequências $\{x_{n_k}\}$ e existe $x_0 \in M$ tal que x_{n_k} converge para x_0 .*

Lema 4.1.1. *Todo conjunto compacto em espaço normado é limitado.*

Demonstração. Se $M \subset X$ compacto mas não limitado, então existe $\{x_n\} \subset M$ tal que $\|x_n\| \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como M é compacto, existe x_{n_k} convergente, logo $\{x_{n_k}\}$ é limitada. Desse modo existe $c \geq 0$ tal que $\|x_{n_k}\| \leq c$ para todo n_k , portanto, é uma contradição. $\square$

Lema 4.1.2. *Todo conjunto compacto num espaço normado X é complexo, isto é, para todo $\{x_n\} \subset M$ de Cauchy, existe $x_0 \in M$ tal que $x_n \rightarrow x_0$.*

Demonstração. Seja $\{x_n\} \subset M$ de Cauchy e M compacto. Então, existe $\{x_{n_k}\}$ tal que $x_{n_k} \rightarrow x_0$ isso implica que $x_n \rightarrow x_0$. $\square$

Corolário 4.1.1. *Todo conjunto compacto em um espaço normado X é fechado.*

Demonstração. Seja $M \subset X$ compacto e seja $x_0 \in \overline{M}$ então $\{x_n\} \subset M$ tal que $x_n \rightarrow x_0$. Como M é compacto, logo também será completo. Pela unicidade do limite, temos que $x_0 \in M$. $\square$

Nota 4.1.1. Em $\mathbb{R}^n$ qualquer conjunto fechado é limitado e compacto. Porém, caso $\dim X = \infty$, isso não é verdade.

Exemplo 4.1.1. Seja $B = B[0, 1]$ em ℓ_1 . Temos

$$B = \{x \in \ell_1 \mid \|x\| \leq 1\}$$

limitado e fechado. Considere $\{e_n\} \subset B$ sendo $e_n = (0, \dots, 1, \dots)$ e $\|e_n - e_m\| = 2$ para todo $m \neq n$. Isso implica que não existe $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ convergente.

Definição 4.1.2. Um conjunto $M \subset X$ chama-se relativamente compacto, se $\overline{M}$ é compacto em X .

Lema 4.1.3. Todo conjunto M relativamente compacto em X é limitado.

Demonstração. Seja $M \subset \overline{M}$ compacto e portanto limitado. Portanto, M é limitado. $\square$

Teorema 4.1.1. (Riez) A dimensão de um espaço normado X é finita se, e somente se, a bola unitária $B[0, 1] \subset X$ é relativamente compacta.

Demonstração. $\Rightarrow$) Vamos supor que $\dim X = n$ então $X \cong \mathbb{R}^n$ implica que $B[0, 1]$ é compacto.

$\Leftarrow$) Suponha que $B[0, 1]$ é relativamente compacta em X , mas a $\dim X = \infty$. Seja $x_1 \in X$, $x_1 \neq 0$, $\|x_1\| = 1$ e $L_1 = \mathcal{L}(x_1)$. Seja $L_1 \neq X$, então existe $x_2 \in X$ tal que $\|x_2 - \ell\| \geq \frac{1}{2}$ para todo $\ell \in L_1$, logo, pelo Teorema 1.7.5 temos que $\|x_2\| = 1$. Daí, $\|x_2 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$ para $x_2 \in B[0, 1]$. Tome $L_2 = \mathcal{L}\{x_1, x_2\} \neq X$. Tome $\varepsilon = \frac{1}{2}$, existe x_3 tal que $\|x_3\| = 1$ tal que $\|x_3 - \ell\| \geq \frac{1}{2}$ para todo $\ell \in L_2$, por conseguinte, $\|x_3 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$ e $\|x_3 - x_2\| \geq \frac{1}{2}$. Assim construímos $\{x_n\} \subset B[0, 1]$, tal que $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$ para todo $m > n$, logo não existe $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, o que contradiz a hipótese de que $B[0, 1]$ é relativamente compacto. $\square$

Definição 4.1.3. Seja $M \subset X$. $S \subset X$ chama-se ε -rede de M se para todo $x \in M$ existe $s \in S$ tal que $\|x - s\| < \varepsilon$.

Definição 4.1.4. Um conjunto $M \subset X$ se chama totalmente limitado se para todo $\varepsilon > 0$, M possui uma ε -rede finita.

Exemplo 4.1.2. Em $\mathbb{R}^n$, todo conjunto limitado é totalmente limitado.

Seja $M \subset \mathbb{R}^n$, então existe $Q = [a, b] \times \dots \times [a, b]$ tal que $M \subset Q$. Seja $\varepsilon > 0$ e seja N tal que

$$\frac{b-a}{N} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tome $h = \frac{1}{N}$ e seja $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n \neq b$ tal que $t_i - t_{i-1} = h$. Considere $S = \{(t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_n})\}$. S é ε -rede para Q em $\{\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty\}$. Dado $x \in Q$, com $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ para todo x_k . Existe t_{i_k} tal

que $|x_k - t_{i_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Portanto,

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n) - (t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_n})\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Exemplo 4.1.3. Em ℓ_1 tome $\mathcal{E} = \{e_j\}$, $e_j = (0, \dots, 1, \dots)$ não é totalmente limitado pois $\varepsilon < \frac{1}{2}$ não existe ε -rede finita para $\mathcal{E}$, de modo que, $\|e_i - e_j\|_2$ para todo $i \neq j$.

Teorema 4.1.2. (Hausdorff) Seja X um espaço normado. Para todo $M \subset X$ relativamente compacto em X , M é totalmente limitado. Por outro lado, se X é um espaço de Banach, para todo $M \subset X$ que é totalmente limitado é relativamente compacto.

Demonstração. $\Rightarrow$) Seja X um espaço normado e M relativamente compacto em X . Suponha por absurdo que M não é totalmente limitado, então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que M não possui nenhuma ε_0 -rede finita. Ou ainda, M não pode ser coberto por um número finito de bola abertas de raio ε_0 .

Tome $x_1 \in M$, desse modo, $B(x_1, \varepsilon_0) \neq M$, logo existe $x_2 \in M$ tal que $x_2 \notin B(x_1, \varepsilon_0)$, então $\|x_1 - x_2\| \geq \varepsilon_0$. Daí, temos que $B(x_1, \varepsilon_0) \cup B(x_2, \varepsilon_0) \neq M$ de modo que existe $x_3 \in M$ tal que $\|x_1 - x_3\| \geq \varepsilon_0$ e $\|x_2 - x_3\| \geq \varepsilon_0$.

Continuando, assim, construímos uma sequência $\{x_n\} \subset M$ tal que $\|x_n - x_m\| \geq \varepsilon_0$. Para todo $m > n_0$ temos que $\{x_n\}$ não compreende nenhuma sequência de Cauchy. Absurdo, pois M é relativamente compacto.

$\Leftarrow$) Seja X um espaço de Banach e M totalmente limitado em X . Temos que provar que $\overline{M}$ é compacto. Provemos que para todo $\{x_n\} \subset M$ contém uma subsequência de Cauchy. Seja $\varepsilon > 0$ e $S_\varepsilon = \{s_1, \dots, s_n\}$ uma ε -rede de M . Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\frac{1}{n}$ -rede finita,

$$S_{\frac{1}{n}} = \left\{ s_1^{(n)}, \dots, s_{k_n}^{(n)} \right\}.$$

Seja $Y = \{x_n\}$. Dado isso $Y \subset M$, então

$$Y \subset M \subset \bigcup_{i=1}^{k_1} B\left(s_i^{(1)}, 1\right)$$

existe $Y_1 \subset Y$ tal que Y_1 é infinito e existe

$$B_1 = B\left(s_{i_1}^{(1)}, 1\right)$$

tal que

$$Y \subset B\left(s_{i_1}^{(1)}, 1\right).$$

Note que

$$Y_1 \subset M \subset B\left(s^{(s)}, \frac{1}{2}\right)$$

existe $Y_2 \subset Y_1 \subset Y$ e existe

$$B_2 = B\left(s_{i_2}^{(2)}, \frac{1}{2}\right)$$

tal que

$$Y_2 \subset B_2 = B\left(s_{i_2}^{(2)}, \frac{1}{2}\right).$$

Existe $Y_1 \supset Y_2 \supset \dots \supset Y_n \supset \dots$ tal que

$$Y_n \subset B\left(s_{i_n}^{(n)}, \frac{1}{n}\right).$$

Tome $x_{n_1} \in Y_1$ e $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_2} \in Y_2$. Construimos $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ tal que $x_{n_k} \in Y_k$. Vamos provar que $\{x_{n_k}\}$ é de Cauchy.

Para todo $\lim > N$ e $x_{n_\ell}, x_{n_m} \in Y_N$, donde

$$\|x_{n_\ell} - x_{n_m}\| \leq \|x_{n_\ell} - s_{i_N}^{(N)}\| + \|x_{n_m} - s_{i_N}^{(N)}\| \leq \frac{2}{N}$$

logo, $\{x_{n_k}\}$ é de Cauchy. Seja $\{y_n\} \subset \overline{M}$ de modo que existe $\{x_n\} \subset M$ tal que $\|y_n - x_n\| < \frac{1}{n}$, assim existe $\{x_{n_k}\}$ de Cauchy e $\{y_{n_k}\}$ é também de Cauchy, pois

$$\|y_{n_\ell} - y_{n_m}\| \leq \|y_{n_\ell} - x_{n_\ell}\| + \|x_{n_\ell} - x_{n_m}\| + \|x_{n_m} - y_{n_m}\| \leq \frac{1}{n_\ell} + \frac{1}{n_m} + \|x_{n_\ell} - x_{n_m}\| \rightarrow 0$$

com $n_\ell, n_m \rightarrow \infty$. Como X é de Banach, existe $y_0 \in X$ tal que $y_{n_k} \rightarrow y_0$ então $y_0 \in \overline{M}$. Portanto M é relativamente compacto. $\square$

Definição 4.1.5. Um conjunto $M \subset C[a, b]$ chama-se uniformemente limitado se existe $c \geq 0$ tal que $|x(t)| \leq c$ para todo $t \in [a, b]$ e para todo $x \in M$.

Nota 4.1.2. $M \subset C[a, b]$ é uniformemente completo se, e somente se, é limitado em $C[a, b]$.

Definição 4.1.6. O conjunto $M \subset C[a, b]$ se chama equicontínuo se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que para todo $t_1, t_2 \in [a, b]$ tal que $|t_1 - t_2| < \delta_\varepsilon$, então $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$ para todo $x \in M$.

Exemplo 4.1.4. Seja $M = \{1, t, t^2, \dots\} \subset C[0, 1]$. M é uniformemente limitado pois $|t^n| \leq 1$ para todo $t \in [0, 1]$ e para todo $n \in \mathbb{N}$. M não é equicontínuo.

Dado

$$t_1^{(n)} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad e \quad t_2^{(n)} = 1$$

então

$$\left| t_1^{(n)} - t_2^{(n)} \right| = \frac{1}{n}$$

mas

$$\left| \left(t_1^{(n)} \right)^n - \left(t_2^{(n)} \right)^n \right| = \left| \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n - 1 \right| = 1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n \rightarrow 1 - e^{-1}$$

com $n \rightarrow \infty$.

Teorema 4.1.3. (Ascoli-Arzelá) *Um conjunto $M \subset C[a, b]$ é relativamente compacto se, e somente se, M é uniformemente limitado e equicontínuo.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Seja M relativamente compacto, pelo Teorema de Hausdorff (Teorema 4.1.2) M é totalmente limitado, então M é limitado, logo M é uniformemente limitado.

Seja $\varepsilon > 0$ e $S = \{s_1(t), \dots, s_n(t)\}$ uma $\frac{\varepsilon}{3}$ -rede de M . Temos $s_i(t) \in C[a, b]$ para todo $i = 1, \dots, N$ então $s_i(t)$ é uniformemente contínua, desse modo, para cada $i = 1 : N$ existe δ_i tal que $|s_i(t_1) - s_i(t_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $t_1, t_2 \in [a, b]$ tal que $|t_1 - t_2| < \delta_i$. Seja

$$\delta = \min_{1 \leq i \leq N} \delta_i.$$

Para todo $t_1, t_2 \in [a, b]$ tal que $|t_1 - t_2| < \delta$ temos

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leq |x(t_1) - s_{i_0}(t_1)| + |s_{i_0}(t_1) - s_{i_0}(t_2)| + |s_{i_0}(t_2) - x(t_2)| < \varepsilon$$

pois para todo $x \in M$ existe i_0 tal que $\|x - s_{i_0}\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Isso implica que $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$ para todo $t_1, t_2 \in [a, b]$ tal que $|t_1 - t_2| < \delta$. Portanto M é equicontínuo.

$\Leftrightarrow$) Dado M uniformemente limitado e equicontínuo, então M é totalmente limitado (Teorema 4.1.2), assim, M é relativamente compacto pois $C[a, b]$ é de Banach. para todo $\varepsilon > 0$, $|x(t)| \leq c$, para todo $t_1, t_2 \in [a, b]$ e para todo $x \in M$. Seja

$$-c = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m = c$$

uma partição de $[-c, c]$ tal que $|\lambda_i - \lambda_{i-1}| < \frac{\varepsilon}{5}$.

Considere $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ tal que $|t_i - t_{i-1}| < \delta$, sendo $|x(t_1) - x(t_2)| < \frac{\varepsilon}{5}$ para todo $|t_1 - t_2| < \delta$. Temos

$$S_\varepsilon = \{s(t) \in C[a, b] \mid s(t_i) = \lambda_j\}$$

com $i = 0 : n$, $j = 0 : m$ e s é linear em $[t_{i-1}, t_i]$ com $i = 1 : n$. Daí, S_ε é finito.

Seja $x \in M$ e seja $s \in S_\varepsilon$ tal que $|x(t_i) - s(t_i)| < \frac{\varepsilon}{5}$.

Primeiro vamos provar que para cada $i = 1 : n$

$$|s(t_i) - s(t_{i-1})| \leq |s(t_i) - x(t_i)| + |x(t_i) - (t_{i-1})| + |x(t_{i-1}) - s(t_{i-1})| \leq \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} = \frac{3}{5}\varepsilon.$$

Logo, para todo $t \in [t_{i-1}, t_i]$ temos

$$|s(t_i) - s(t)| < \frac{3}{5}\varepsilon \quad \forall i = 1 : n.$$

Para todo $x \in M$ e para todo $t \in [a, b]$ existe i_0 tal que $t \in [t_{i_0-1}, t_{i_0}]$. Desse modo,

$$|x(t) - s(t)| \leq |x(t) - x(t_{i_0})| + |x(t_{i_0}) - s(t_{i_0})| + |s(t_{i_0}) - s(t)| < \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{3}{5}\varepsilon = \varepsilon.$$

□

Definição 4.1.7. *Seja X um espaço normado. $C(D)$ é o conjunto das funcionais contínuas definidas no compacto $D \subset X$. Então,*

$$\|f\| = \sup_{x \in D} f(x).$$

Teorema 4.1.4. *$M \subset \ell_p$ com $p \geq 1$ é relativamente compacto se, e somente se,*

- i) *M é limitado em ℓ_p . Existe $c \geq 0$ tal que $\|x\| \leq c^{\frac{1}{p}}$ para todo $x \in M$;*
- ii) *Para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\sum_{i=n_\varepsilon}^{\infty} |x_i|^p < \varepsilon^p \quad \forall x \in M.$$

Demonstração. i) Consequência de Hausdorff.

ii) Para cada $x \in \ell_p$, $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ defina os operadores seguintes:

$$\begin{aligned} S_n(x) &= (x_1, \dots, x_n, 0, \dots) \\ R_n(x) &= (0, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots) \\ \|S_n(x)\| &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \|x\| \\ \|R_n(x)\| &= \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \longrightarrow 0 \quad \text{com } n \rightarrow \infty \\ \|R_n(x)\| &= \|x - S_n(x)\|. \end{aligned}$$

Por Hausdorff, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\frac{\varepsilon}{3}$ -rede finita. Seja $S = \{s_1, \dots, s_n\}$. Para cada $x \in M$ existe $i_0 \in \{1, \dots, m\}$ tal que $\|x - s_{i_0}\| < \frac{\varepsilon}{3}$, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$ existe n_i tal que $\|R_{n_i}(s_i)\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Seja

$$n_\varepsilon = \min_{1 \leq i \leq m} n_i \Rightarrow \|R_{n_\varepsilon}(s_i)\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}.$$

Para todo $x \in M$ temos,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=n_\varepsilon}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|R_{n_\varepsilon}(x)\| = \|x - S_{n_\varepsilon}(x)\| &\leq \|x - s_{i_0}\| + \|s_{i_0} - S_{n_\varepsilon}(s_{i_0})\| + \|S_{n_\varepsilon}(s_{i_0}) - S_{n_\varepsilon}(x)\| \\ &\leq 2\|x - s_{i_0}\| + \|R_{n_\varepsilon}(s_{i_0})\| < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$) (Vamos construir uma ε -rede). Seja $\varepsilon > 0$ e n_ε tal que

$$\left(\sum_{i=n_\varepsilon}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in M.$$

Seja $S = \{(y_1, \dots, y_{n_\varepsilon}, 0, \dots, 0, \dots) \mid y_i = k_i \delta\}$, onde

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2 n_\varepsilon^{\frac{1}{p}}}; \quad k_i \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad |k_i| \leq \frac{c}{\delta}.$$

Seja $x \in \ell_p$ e $y \in S$ tal que

$$y = \left(\left[\frac{x_1}{\delta} \right] \delta, \dots, \left[\frac{x_n}{\delta} \right] \delta, 0, \dots \right),$$

de modo que $\left[\frac{x_1}{\delta} \right]$ denota a parte inteira. Assim,

$$\begin{aligned} \|x - y\|_p &= \left(\sum_{i=1}^{n_\varepsilon} \left| \left[\frac{x_1}{\delta} \right] \delta - x_i \right|^p + \sum_{i=n_\varepsilon+1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(n_\varepsilon \delta^p + \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^p + \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Teorema 4.1.5. (Riez) $M \subset L_p[a, b]$ com $p \geq 1$ é relativamente compacto se, e somente se,

i) M é limitado em $L_p[a, b]$, ou seja, existe $c \geq 0$ tal que $\|x\|_p \leq c$ para todo $x \in M$;

ii) M é equicontínuo em média, isto é, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que $|s| < \delta$. Então,

$$\int_a^b |x(t+s) - x(t)|^p dt < \varepsilon \quad \forall x \in M.$$

Lema 4.1.4. *Sejam X e Y dois espaços normados e seja $f : X \rightarrow Y$ contínua. Então para todo $M \subset X$ compacto $f(M)$ é compacto em Y .*

Demonstração. Seja $\{y_n\} \in f(M)$, logo para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in M$ tal que $f(x_n) = y_n$, isso implica que existe $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ tal que $x_{n_k} \rightarrow x$ em X desse modo $x \in M$, por conseguinte, $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x)$ em Y , assim $f(x) \in f(M)$, e portanto, $f(M)$ é compacto. $\square$

Teorema 4.1.6. (Weierstrass) *Seja X um espaço normado e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, para todo $M \subset X$ compacto, temos que f é limitada em M e assume em M os seus valores máximos e mínimos.*

Demonstração. Consequência do Lema 4.1.4. $\square$

Teorema 4.1.7. (Cantor) *Sejam X, Y dois espaços normados e $f : X \rightarrow Y$ contínua. Para todo $M \subset X$ compacto, f é uniformemente contínua em M , isto é, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|f(x_1) - f(x_2)\| < \varepsilon$ para todo $x_1, x_2 \in M$ tal que $\|x_1 - x_2\| < \delta$.*

Definição 4.1.8. *Uma família $\{\mathcal{U}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de conjuntos abertos em um espaço normado X , chama-se cobertura de $M \subset X$ se*

$$M \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{U}_\lambda.$$

4.2 Operadores Compactly

Definição 4.2.1. *Sejam X, Y espaços normados e $A : X \rightarrow Y$ um operador linear. A chama-se compacto se para todo $M \subset X$ limitado, $A(M)$ é relativamente compacto em Y .*

Nota 4.2.1. Se Y é um espaço de Banach, então A é compacto se, e somente se, para todo $M \subset X$ limitado, $A(M)$ é totalmente limitado em Y .

Nota 4.2.2. Se A é um operador compacto, então A é limitado, ou seja, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Exemplo 4.2.1. *Vamos mostrar que $A : X \rightarrow Y$ linear que aplica conjuntos limitados em conjuntos limitados é limitado.*

Vamos supor que A não é limitado, então para todo $k > 0$ existe $x \in X$ tal que $\|x\| = 1$, mas $\|A(x)\| \geq k$, portanto $A(s(0, 1))$ não é limitado, o que é um absurdo.

Definição 4.2.2. *Sejam X e Y dois espaços normados, $\tau(X, Y)$ é o conjunto de todos os operadores lineares compactos de X em Y .*

$$\tau(X, Y) \subset \mathcal{L}(X, Y).$$

Exemplo 4.2.2. Seja X um espaço de Banach e o operador $I : X \longrightarrow X$. O operador $I \in \tau(X)$ se, e somente se, $\dim X < +\infty$. Caso $\dim X, Y = \infty$ então $\tau(X, Y) \neq \mathcal{L}(X, Y)$.

Exemplo 4.2.3. Sejam X, Y dois espaços normados e $T : X \longrightarrow Y$ linear. Todo $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ operador de dimensão finita é compacto.

Prova. Seja T com dimensão finita. Para todo $M \subset X$ limitado temos $T(M) \subset \text{Im}(T)$, então $T(M)$ é relativamente compacto. Se $\dim Y < +\infty$ então $\tau(X, Y) = \mathcal{L}(X, Y)$ para todo espaço normado X . Em particular, para todo $f \in X^*$ temos que f é compacto.

$$f : X \longrightarrow \mathbb{K} \quad e \quad \dim \mathbb{K} = 1.$$

Observação 4.2.1. Todo operador limitado de dimensão finita é compacto.

Exemplo 4.2.4. Seja X um espaço normado e $\dim X < +\infty$. Para todo T linear, $T : X \longrightarrow Y$ é limitado, ou seja, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Todo T tem dimensão finita. Neste caso, também $\tau(X, Y) = \mathcal{L}(X, Y)$.

Exemplo 4.2.5. Sejam $C^{(1)}[a, b]$, $\|x\|_{C^{(1)}[a, b]} = \|x\|_{C[a, b]} + \|x'\|_{C[a, b]}$ e $C^{(1)}[a, b] \subset C[a, b]$ e seja $I : C^{(1)}[a, b] \longrightarrow C[a, b]$ com $I(x) = x$. Vamos provar que I é compacto.

Prova. Seja M um conjunto limitado em $C^{(1)}[a, b]$ temos que provar que $I(M) = M$ é relativamente compacto em $C[a, b]$. Dado M limitado e $C^{(1)}[a, b]$, então existe $c \geq 0$ tal que $\|x\|_{C^{(1)}[a, b]} \leq c$ para todo $x \in M$. Assim, $\|x\|_{C[a, b]} \leq c$, logo M é uniformemente limitado.

Por outro lado,

$$|x(t_1) - x(t_2)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} x'(s) ds \right| \leq \left| \int_{t_1}^{t_2} |x'(s)| ds \right| \leq c |t_2 - t_1|$$

para todo $x \in M$. Logo, para cada ε existe $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$ equicontínuo. Portanto, I é compacto.

Exemplo 4.2.6. Seja $K : C[a, b] \longrightarrow C[a, b]$ sendo

$$Kx(t) = \int_a^b K(t, s)x(s) ds$$

e $K(t, s) \in C[a, b] \times C[a, b]$. Seja M um conjunto em $C[a, b]$ limitado, assim, existe $c \geq 0$ tal que $\|x\| \leq c$ para todo $x \in M$. Vamos provar que $K(M)$ é relativamente compacto em $C[a, b]$.

Prova. Para todo $y(t) \in K(M)$ então $y(t) = Kx(t)$ para todo $x \in M$.

$$\|y\| = \|Kx\| \leq \|K\| \cdot \|x\| \leq \|K\| \cdot c \quad \forall y \in K(M).$$

Logo, $K(M)$ é uniformemente limitado.

Seja $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $(t_1, s_1), (t_2, s_2) \in [a, b] \times [a, b]$ e tal que

$$\|(t_1, s_1) - (t_2, s_2)\|_2 < \delta \Rightarrow |K(t_1, s_1) - K(t_2, s_2)| < \frac{\varepsilon}{c(b-a)}.$$

Então, para todo $y \in K(M)$ temos que

$$|y(t_1) - y(t_2)| \leq \int_a^b |K(t_1, s) - K(t_2, s)| |x(s)| ds \leq c \frac{\varepsilon}{c(b-a)} \cdot (b-a) = \varepsilon$$

para todo $t_1, t_2 \in M$ tal que $|t_1 - t_2| < \delta$. Portanto, $K(M)$ é equicontínuo.

Lema 4.2.1. *Sejam X, Y dois espaços normados, então $\tau(X, Y)$ é um subespaço vetorial em $\mathcal{L}(X, Y)$.*

Demonstração. Se A e B pertencem a $\tau(X, Y)$ então $A + B \in \tau(X, Y)$. Seja $M \subset X$ limitado, temos que provar que $(A + B)(M)$ é relativamente compacto.

Seja $\{y_n\} \in (A + B)(M)$, então existe $x_n \in M$ tal que $y_n = Ax_n + Bx_n$ com $\{Ax_n\} \subset A(M)$, logo existe $\{Ax'_n\} \subset \{Ax_n\}$ tal que Ax'_n converge. Seja $\{Bx'_n\} \subset \{Bx_n\} \subset B(M)$, desse modo existe $\{Bx''_n\}$ convergente. Então, $y''_n = Ax''_n + Bx''_n$ é convergente. $\square$

Teorema 4.2.1. *Seja X um espaço normado e Y um espaço de Banach e seja $T_n \in \tau(X, Y)$ tal que $T_n \rightarrow T \in \mathcal{L}(X, Y)$ uniformemente. Então $T \in \tau(X, Y)$.*

Demonstração. Seja $B \subset X$ limitado de modo que $\|x\| \leq c$ para todo $x \in B$. Provar que $T(B)$ é relativamente compacto em Y . Como Y é um espaço de Banach basta provar que $T(B)$ é totalmente limitado. Sabemos que $T_n \rightarrow T$ uniformemente. Seja $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que $\|T_{n_0} - T\| < \frac{\varepsilon}{2c}$. $T_{n_0} \in \tau(X, Y)$ então $T_{n_0}(B)$ é totalmente limitado. Seja $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ uma $\frac{\varepsilon}{2}$ -rede finita de $T_{n_0}(B)$. Vamos provar que S é ε -rede para $T(B)$.

Seja $y \in T(B)$, assim

$$\begin{aligned} \|y - s_{i_0}\| &= \|Tx - s_{i_0}\| \leq \|Tx - T_{n_0}x\| + \|T_{n_0}x - s_{i_0}\| \\ &\leq \|T - T_{n_0}\| + \|T_{n_0}x - s_{i_0}\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2c}c + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

$\square$

Corolário 4.2.1. *Sejam X, Y dois espaços normados. $\tau(X, Y)$ é um subespaço vetorial fechado em $\mathcal{L}(X, Y)$.*

Exemplo 4.2.7. *Seja $T : \ell_2 \rightarrow \ell_2$ sendo $T(x) = (\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_n}{n}, \dots)$ e $\|T\| = 1$. Provar que $T \in \tau(\ell_2)$.*

Prova. Seja

$$T_n(x) = \left(\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_n}{n}, 0, \dots \right)$$

e seja $T_n \in \tau(\ell_2)$. Para todo $x \in \ell_2$, temos

$$\|(T_n - T)x\|^2 = \left\| \left(0, \dots, 0, x_{\frac{n+1}{n+1}}, \dots \right) \right\|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{x_i^2}{i^2} \leq \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{i=n+1}^{\infty} x_i^2 \leq \frac{1}{(n+1)^2} \|x\|^2.$$

Isso implica que

$$\|(T_n - T)x\| \leq \frac{1}{n+1} \|x\| \quad \forall x \in \ell_2.$$

Então,

$$\|T_n - T\| \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

com $n \rightarrow \infty$. Portanto T é compacto.

Lema 4.2.2. *Seja $\{x_n\} \subset X$. $\{x_n\}$ é relativamente compacto como conjunto de pontos de X . Se x_n converge fracamente para x , então $x_n \rightarrow x$.*

Demonstração. Supor que x_n converge fracamente para x , mas $x_n \not\rightarrow x$, logo existe $\varepsilon_0 > 0$ e existe $\{x_{n_k}\}$ tal que $\|x_{n_k} - x\| \geq \varepsilon_0$. Daí, $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, de modo que existe $\{x_{n'_k}\} \subset \{x_{n_k}\}$. Temos que $x_{n'_k} \rightarrow x_1$ me X . Como x_n converge fracamente para x então $x_{n'_k}$ converge fracamente para x . $x_{n'_k}$ convergind fracamente para x_1 implica que $x = x_1$. Ou seja, $x_{n'_k} \rightarrow x$ fortemente, o que contradiz $\|x_{n'_k} - x\| \geq \varepsilon_0$. $\square$

Teorema 4.2.2. *Sejam X, Y espaços normados e $T \in \tau(X, Y)$. Então T aplica toda sequência $\{x_n\}$ que converge fracamente a uma sequência $\{Tx_n\}$ que converge fortemente em Y .*

Demonstração. Seja $\{x_n\}$ um sequência que converge fracamente, consequentemente $\{x_n\}$ é limitada, então $\{Tx_n\}$ é relativamente compacto em Y , isso implica que $\{Tx_n\}$ converge fracamente então pelo Lema anterior $\{Tx_n\}$ converge fortemente. $\square$

Teorema 4.2.3. *Sejam X, Y, Z três espaços normados e sejam A um operador limitado, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $B \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Se A ou B é compacto então $BA \in \tau(X, Z)$.*

Demonstração. Seja $A \in \tau(X, Y)$ e seja $M \subset X$ limitado, por conseguinte, $A(M)$ é relativamente compacto em Y , assim $\overline{A(M)}$ é compacto e $B\left(\overline{A(M)}\right)$ é compacto. Seja $\overline{B(A(M))} \subset B(\overline{A(M)})$, isso implica que $\overline{B(A(M))}$ é relativamente compacto em Y .

Se B é compacto então para todo $M \in X$ temos $A(M)$ limitado, logo $B(A(M))$ é relativamente compacto. $\square$

Teorema 4.2.4. (Riez) *Sejam X e Y espaços normados e $A \in \tau(X, Y)$. Então $A^* \in \tau(Y^*, X^*)$.*

Demonstração. Seja $M \subset Y^*$ limitado, então existe $c \geq 0$ tal que $\|f\| \leq c$ para todo $f \in M$. Provar que $A^*(M)$ é relativamente compacto em X^* .

Para todo $f \in M$,

$$\begin{aligned} \|A^*f\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x, A^*f \rangle| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Ax, f \rangle| \\ &= \sup_{y \in A(B)} |\langle y, f \rangle| \\ &= \sup_{y \in \overline{A(B)}} |\langle y, f \rangle| \\ &= \sup_{y \in D} |\langle y, f \rangle|, \end{aligned}$$

sendo $D = \overline{A(B)}$ compacto em Y . Dado

$$\left\{ C(D), \|g\| = \sup_{x \in D} |g(x)| \right\}$$

é de Banach. Seja $\|A^*f\| = \|f\|_{C(D)}$. Assim, $M \subset C(D)$.

Primeiro vamos provar que M é uniformemente limitado. Para todo $y \in A(B)$ tal que

$$|\langle y, f \rangle| = |\langle Ax, f \rangle| = |\langle x, A^*f \rangle| \leq \|x\| \cdot \|A^*\| \cdot \|f\|$$

sendo que $\|x\| \leq 1$ e $\|f\| \leq c$. Para todo $y \in \overline{A(B)}$,

$$|f(y)| = |\langle y, f \rangle| \leq c \|A^*\| \quad \forall f \in M.$$

Logo $M \subset C(D)$ é uniformemente limitado.

Agora vamos provar que M é equicontínuo. Para todo $y_1, y_2 \in D$ temos

$$\begin{aligned} |f(y_1) - f(y_2)| &= |\langle y_1, f \rangle - \langle y_2, f \rangle| \\ &= |\langle y_1 - y_2, f \rangle| \\ &\leq \|y_1 - y_2\| \cdot \|f\| \\ &\leq c \|y_1 - y_2\|. \end{aligned}$$

Logo, M é equicontínuo. Então M é relativamente compacto em $C(D)$ (Ascoli-Arzelá).

Seja $\{A^*f_n\} \subset A^*(M)$. Sabemos que $\{f_n\}$ de modo que existe $\{f_{n_k}\}$ convergente em $C(D)$. Assim,

$$\|f_{n_k} - f_{n_m}\| \longrightarrow 0$$

com $k, m \rightarrow \infty$, mas

$$\|f_{n_k} - f_{n_m}\| = \|A^* f_{n_k} - A^* f_{n_m}\| \rightarrow 0$$

com $k, m \rightarrow \infty$. Desse modo, $\{A^* f_{n_k}\}$ é de Cauchy em $C(D)$ que é de Banach, e portanto, converge. $\square$

Observação 4.2.2. Dual para operador compacto é um operador compacto.

4.3 Equações Lineares com Operadores Compactos

Definição 4.3.1. *Seja X um espaço de Banach e seja $T \in \tau(X)$ e seja $Tx - \lambda x = y$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $y \in X$. Esta é a equação linear de segundo gênero. Associadas a ela existem:*

- i) $Tz - \lambda z = 0$;
- ii) $T^*f - \lambda f = 0$;
- iii) $T^*h - \lambda h = 0$.

Onde $N(T - \lambda I)$, $N(T^* - \lambda I)$ são núcleos e $R(T - \lambda I)$, $R(T^* - \lambda I)$ são imagens.

Lema 4.3.1. *Seja X um espaço de Banach, $T \in \tau(X)$ então para todo $\lambda \neq 0$ temos:*

- i) $\dim N(T - \lambda I) < +\infty$;
- ii) $\dim N(T^* - \lambda I) < +\infty$.

Demonstração. i) Para todo $x \in N(T - \lambda I)$ temos $(T - \lambda I)x = 0$ ou $Tx = \lambda Ix$, assim $I = \frac{1}{\lambda}T$ em $N(T - \lambda I)$, isso implica que $\dim N(T - \lambda I) < +\infty$ (ver Teorema de Riez sobre identidade).

ii) De forma análoga ao item i). $\square$

Lema 4.3.2. *Seja X um espaço de Banach, $T \in \tau(X)$ e $\lambda \neq 0$. Seja $N = N(T - \lambda I)$ e M um subespaço vetorial fechado tal que $X = N + M$. Para todo $y \in R(T - \lambda I)$ existe um único $x \in M$ que é solução de $Tx - \lambda x = y$ e existe $c \geq 0$ tal que $\|x\| \leq c \|y\|$.*

Demonstração. Seja a $\dim N < +\infty$, então existe M um subespaço em X tal que $X = N + M$. Seja $Ax = (T - \lambda I)x$ para todo $x \in M$. Afirmamos $N(A) = \{0\}$. De fato se $x \in N(A)$, temos $(T - \lambda I)x = 0$, por conseguinte, $x \in N$ e $x = 0$.

Seja o operador $A : X \rightarrow X$ injetor com $D(A) = M$. Mais ainda $R(T - \lambda I)$, então existe $A^{-1} : X \rightarrow X$ com $D(A^{-1}) = R(T - \lambda I)$ e $R(A^{-1}) = M$. Vamos provar que A^{-1} é limitado.

Suponha que A^{-1} não é limitado, assim existe $y_n \in R(T - \lambda I)$ tal que $\|y_n\| = 1$, mas $\|A^{-1}y_n\| \rightarrow \infty$ com $n \rightarrow \infty$. Tome

$$x_n = \frac{A^{-1}y_n}{\|A^{-1}y_n\|} \Rightarrow x_n \in M \text{ e } \|x\| = 1.$$

Tx_n contém uma subsequência convergente $Tx_{n_k}, Tx_{n_k} \rightarrow x_0 \in X$. Temos $Ax_{n_k} = Tx_{n_k} - \lambda x_{n_k}$. Daí,

$$\|Ax_n\| = \frac{\|y_n\|}{\|A^{-1}y_n\|} = \frac{1}{\|A^{-1}y_n\|} \rightarrow 0$$

com $n \rightarrow \infty$. Assim,

$$x_{n_k} = \frac{1}{\lambda}(Tx_{n_k} - Ax_{n_k}) \Rightarrow x_{n_k} \rightarrow \frac{1}{\lambda}x_0$$

com $k \rightarrow \infty$. Isso implica que

$$(T - \lambda I)x_{n_k} = Tx_{n_k} - \lambda x_{n_k} \rightarrow x_0 - x_0 = 0.$$

Portanto

$$(T - \lambda I)x_{n_k} \rightarrow 0 \text{ e } (T - \lambda I)x_{n_k} \rightarrow \frac{1}{\lambda}(T - \lambda I)x_0$$

com $n_k \rightarrow \infty$. Assim, $(T - \lambda I)x_0 = 0$, logo $x_0 \in N$ e $x_0 \in M$, desse modo $x_0 = 0$, o que é um absurdo, pois $\|x_{n_k}\| = 1$. Logo A^{-1} é limitado.

Assim, para cada $y \in D(A^{-1})$ implica em $\|A^{-1}y\| \leq c\|y\|$ com $y = (T - \lambda I)x$ então $\|x\| \leq c\|y\|$, para todo $y \in R(T - \lambda I)$. $\square$

Teorema 4.3.1. (Fredholm) *Seja X um espaço de Banach e $T \in \tau(X)$. Para todo $\lambda \neq 0$, $R(T - \lambda I)$ e $R(T^* - \lambda I)$ são subespaços fechados em X e X^* respectivamente.*

Demonstração. Seja $\{y_n\} \subset R(T - \lambda I)$ tal que $y_n \rightarrow y_0$ de modo que existe $x_n \in M$ tal que $(T - \lambda I)x_n = y_n$. Existe $c \geq 0$ tal que $\|x_n\| \leq c\|y_n\|$ para todo $y_n \in R(T - \lambda I)$. Seja $(T - \lambda I)x_n = y_n$ e $(T - \lambda I)x_m = y_m$. Então $(T - \lambda I)(x_n - x_m) = y_n - y_m$. Desse modo

$$\|x_n - x_m\| \leq c\|y_n - y_m\| \rightarrow 0$$

com $m, n \rightarrow \infty$ implica que $\{x_n\}$ é de Cauchy, como X é de Banach, existe $x_0 \in X$ tal que $x_n \rightarrow x_0$, consequentemente $x_0 \in M$. Assim,

$$(T - \lambda I)x_n \rightarrow (T - \lambda I)x_0$$

implica que $y_n \rightarrow y_0$, então $(T - \lambda I)x_0 = y_0$, logo $y_0 \in R(T - \lambda I)$.

O outro caso é demonstrado de forma análoga. $\square$

Teorema 4.3.2. (*2º Fredholm*) Seja X um espaço de Banach, $T \in \tau(X)$ e $\lambda \neq 0$. Então as afirmações seguintes são equivalente.

- i) $Tx - \lambda x = y$ é resolúvel para todo $y \in X$;
- ii) $Tz - \lambda z = 0$ têm somente uma solução $z = 0$;
- iii) $T^*f - \lambda f = g$ é resolúvel para todo $g \in X^*$;
- iv) $T^*h - \lambda h = 0$ implica que $h \equiv 0$.

Demonstração. i) $\Rightarrow$ ii) Supor por absurdo que existe $x_1 \in X$, $x_1 \neq 0$ e $(T - \lambda I)x_1 = 0$ então existe $x_2 \in X$ tal que $(T - \lambda I)x_2 = x_1$ e $x_2 \neq 0$. Desse modo,

$$\begin{aligned} N_1 &= N(T - \lambda I) \\ N_2 &= N(T - \lambda I)^2. \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$N_1 \subset N_2 \subset \dots \subset N_n \subset N_{n+1} \subset \dots$$

tal que $N_n = (T - \lambda I)^n$. Pelo Teorema 1.7.5, para todo $n = 2, 3, \dots$ existe $z_n \in N_n \setminus N_{n-1}$ com $\|z_n\| = 1$ e $\|z_n - z\| \geq \frac{1}{2}$ para todo $z \in N_{n-1}$. Logo $\{z_n\}$ é limitada, então existe Tz_{n_k} convergente. Para todo $m > n$ temos

$$\begin{aligned} \|Tz_m - Tz_n\| &= \|Tz_m - \lambda z_m + \lambda z_m - \lambda z_n + \lambda z_n - Tz_n\| \\ &= |\lambda| \left\| z_m - \frac{1}{\lambda} \underbrace{[(T - \lambda I)z_n - (T - \lambda I)z_m + \lambda z_n]}_{\omega} \right\|. \end{aligned}$$

Verificar que $\omega \in N_{m-1}$, ou seja,

$$(T - \lambda I)^{m-1}\omega = (T - \lambda I)^m z_n - (T - \lambda I)^m z_m = \lambda(T - \lambda I)^{m-1}z_n = 0.$$

Assim,

$$\|Tz_m - Tz_n\| \geq \frac{|\lambda|}{2} \quad \forall m > n.$$

Então Tz_n não compreende nenhuma subsequências de Cauchy, o que contradiz o fato de T ser compacto. Logo $x_1 = 0$, e portanto, $N_1 = \{0\}$.

ii) $\Rightarrow$ iii) Temos $N(T - \lambda I) = \{0\}$ e provar $R(T^* - \lambda I) = X^*$. Para todo $g \in X^*$ temos $N(T - \lambda I) = \{0\}$, assim, $T - \lambda I$ é injetor. Para todo $y \in R(T - \lambda I)$ existe um único $x \in X$ tal que $y = (T - \lambda I)x$. Mas ainda, $X = N + M$ implica em $X = M$. Por um lema anterior, existe $c \geq 0$ tal que $\|x\| \leq c \|y\|$

para todo $y \in R(T - \lambda I)$.

Defina um funcional f_0 em $R(T - \lambda I)$ para to $y \in R(T - \lambda I)$, tal que $\langle y, f_0 \rangle = \langle x, g \rangle$ e f_0 é limitado. Temos

$$|\langle y, f_0 \rangle| = |\langle x, g \rangle| \leq \|g\| \cdot \|x\| \leq c \|g\| \cdot \|y\|.$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach existe $f \in X^*$, extensão de f_0 . Para todo $x \in X$,

$$\begin{aligned} \langle x, (T^* - \lambda I)f \rangle &= \langle (T - \lambda I)x, f \rangle \\ &= \langle (T - \lambda I)x, f_0 \rangle \\ &= \langle x, g \rangle. \end{aligned}$$

Logo

$$\langle x, (T^* - \lambda I)f - g \rangle = 0 \Rightarrow (T^* - \lambda I)f - g = 0 \Rightarrow (T^* - \lambda I)f = g$$

então $g \in R(T^* - \lambda I)$.

iii) $\Rightarrow$ iv) Idem a demonstração de i) $\Rightarrow$ ii).

iv) $\Rightarrow$ i) Seja $N(T^* - \lambda I) = \{0\}$. Supor que $R(T - \lambda I) \neq X$ como hipótese de absurdo. Por Corolário do Teorema de Hahn-Banach, existe $f \in X^*$, $f \neq 0$ e $\langle y, f \rangle = 0$ para todo $y \in R(T - \lambda I)$.

Logo, para todo $x \in X$, temos

$$0 = \langle (T - \lambda I)x, f \rangle = \langle x, (T^* - \lambda I)f \rangle \Rightarrow (T^* - \lambda I)f = 0.$$

Assim, $f \in (T^* - \lambda I)$, uma contradição, pois $N(T^* - \lambda I) = \{0\}$ e $f \neq 0$. □

Teorema 4.3.3. *Seja X um espaço de Banach, $T \in \tau(X)$ e $\lambda \neq 0$.*

$$\dim N(T - \lambda I) = \dim N(T^* - \lambda I).$$

Demonstração. Seja $n = \dim N(T - \lambda I)$, $m = \dim N(T^* - \lambda I)$. Supor $n < m$ (caso $m < n$ é de forma análoga). Considere $\phi = \{\phi_j\}_{j=1}^n$ base em $N(T - \lambda I)$, $\psi = \{\psi_j\}_{j=1}^m$ base de $N(T^* - \lambda I)$, $\Gamma = \{\gamma_j\}_{j=1}^n$ biortogonal a ϕ , $Z = \{Z_j\}_{j=1}^m$ biortogonal a ψ e o operador auxiliar

$$\tilde{T}x = Tx - \sum_{j=1}^n \langle x, \gamma_j \rangle z_j.$$

Então $\tilde{T} \in \tau(x)$ e vamos provar que $N(\tilde{T} - \lambda I) = \{0\}$. Seja $x \in N(\tilde{T} - \lambda I)$, temos

$$\tilde{T}x - \lambda x = 0 \Rightarrow (T - \lambda I)x = \sum_{j=1}^n \langle x, \gamma_j \rangle z_j \tag{4.1}$$

Aplicando ψ_k , com $k = 1, \dots, n$ temos

$$\begin{aligned}\langle (T - \lambda I)x, \psi_k \rangle &= \langle x, \gamma_k \rangle \\ 0 = \langle x, (T^* - \lambda I)\psi_k \rangle &= \langle x, \gamma_k \rangle\end{aligned}$$

para todo $k = 1 : n$. Logo, em 4.1 acima

$$(T - \lambda I)x = 0 \Rightarrow x \in N(T - \lambda I) \Rightarrow x = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i.$$

Aplicando γ_k , com $k = 1 : n$

$$0 = \langle x, \gamma_k \rangle = c_k \Rightarrow x = 0.$$

Logo $N(\tilde{T} - \lambda I) = \{0\}$, pelo teorema anterior, $N(\tilde{T}^* - \lambda I) = \{0\}$. Dado

$$\tilde{T}^* f = T^* f - \sum_{j=1}^n \langle z_j, f \rangle \gamma_j.$$

Afirmamos que $\psi_k \in N(\tilde{T}^* - \lambda I)$. Vamos calcular

$$(\tilde{T}^* - \lambda I)\psi_k = (T^* - \lambda I)\psi_k - \sum_{j=1}^n \langle z_j, \psi_k \rangle \gamma_j$$

como $\psi_k \in N(T^* - \lambda I)$, então

$$(T^* - \lambda I)\psi_k = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^n \langle z_j, \psi_k \rangle \gamma_j = 0.$$

Assim, $\psi_k \in N(\tilde{T} - \lambda I)$ para todo $k = (n+1) : m$, logo $N(\tilde{T} - \lambda I) \neq \{0\}$, o que é um absurdo. $\square$

Teorema 4.3.4. *Seja X um espaço de Banach, $T \in \mathfrak{T}(X)$ e $\lambda \neq 0$. Então $Tx - \lambda x = y$ é solúvel para um $y \in X$ se, e somente se, $\langle y, h \rangle = 0$ para todo $h \in N(T^* - \lambda I)$.*

Demonstração. Para $y \in X$, supor que existe $x \in X$ tal que $Tx - \lambda x = y$ para todo $h \in N(T^* - \lambda I)$, de modo que

$$\langle y, h \rangle = \langle (T - \lambda I)x, h \rangle = \langle x, (T^* - \lambda I)h \rangle = 0.$$

$\Leftarrow$) Para todo $y \in X$ temos $\langle y, h \rangle = 0$ para todo $h \in N(T^* - \lambda I)$. Suponha que $y \notin R(T - \lambda I)$, então, por um corolário do Teorema de Hahn-Banach, existe $f \in X^*$ tal que $\langle y, f \rangle = 1$ e $\langle w, f \rangle = 0$ para todo $w \in R(T - \lambda I)$. Logo, para todo $x \in X$,

$$0 = \langle (T - \lambda I)x, f \rangle = \langle x, (T^* - \lambda I)f \rangle.$$

$\Rightarrow$) Seja $(T^* - \lambda I)f = 0$, então $f \in N(T^* - \lambda I)$, assim $\langle y, f \rangle = 0$, o que é um absurdo, pois $\langle y, f \rangle = 1$. $\square$

4.4 Operadores Autoadjuntos Compactos em Espaços de Hilbert

Seja H um espaço de Hilbert e seja $T \in \mathcal{L}(H)$. Então,

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \quad \forall x, y \in H.$$

Definição 4.4.1. *Seja H um espaço de Hilbert, todo $T \in \mathcal{L}(H)$ chama-se autoadjunto se $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ para todo $x, y \in H$.*

Exemplo 4.4.1. *Seja*

$$kx(t) = \int_a^b k(t, s)x(s) ds$$

e seja $L_2[a, b]$. Temos que $k^*(t, s) = k(t, s)$, e portanto, k é autoadjunto.

Lema 4.4.1. *Seja H um espaço de Hilbert e sejam os operadores $A, B \in \mathcal{L}(H)$ autoadjuntos, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha A + \beta B$ é autoadjunto.*

Demonstração.

$$\begin{aligned} \langle (\alpha A + \beta B)x, y \rangle &= \alpha \langle Ax, y \rangle + \beta \langle Bx, y \rangle \\ &= \alpha \langle x, Ay \rangle + \beta \langle x, By \rangle \\ &= \langle x, (\alpha A + \beta B)y \rangle \end{aligned}$$

para todo $x, y \in H$. $\square$

Lema 4.4.2. *Seja H um espaço de Hilbert e sejam os operadores $A, B \in \mathcal{L}(H)$ autoadjuntos, então BA é autoadjunto se, e somente se, $AB = BA$.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Temos $\langle (BA)x, y \rangle = \langle x, (BA)y \rangle$ para todo $x, y \in H$, mas

$$\langle (BA)x, y \rangle = \langle Ax, By \rangle = \langle x, ABy \rangle \Rightarrow \langle x, (BA - AB)y \rangle = 0$$

para todo $x, y \in H$. Portanto, $BA = AB$.

$\Leftarrow$) $\langle BAx, y \rangle = \langle Ax, By \rangle = \langle x, ABy \rangle = \langle x, B Ay \rangle$. $\square$

Teorema 4.4.1. *Seja H um espaço de Hilbert e seja $A \in \mathcal{L}(H)$ um operador autoadjunto. Então,*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x \rangle|.$$

Demonstração. Seja $|\langle Ax, x \rangle| \leq \|A\| \cdot \|x\|^2$ e $\|x\| = 1$, assim, $|\langle Ax, x \rangle| \leq \|A\|$. Seja

$$M = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x \rangle| \Rightarrow M \leq \|A\|.$$

Vamos provar que $\|A\| \leq M$. Seja $x \in H$ e $x \neq 0$, então

$$\left| \left\langle A \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \right| \leq M \Rightarrow |\langle Ax, x \rangle| \leq M \|x\|^2$$

para todo $x \in H$. Provar que para todo $x, y \in H$,

$$\langle A(x+y), x+y \rangle = \langle Ax, x \rangle + 2 \operatorname{Re} \langle Ax, y \rangle + \langle Ay, y \rangle$$

e que

$$\langle A(x-y), x-y \rangle = \langle Ax, x \rangle - 2 \operatorname{Re} \langle Ax, y \rangle + \langle Ay, y \rangle$$

isso implica que

$$4 \operatorname{Re} \langle Ax, y \rangle = \langle A(x+y), x+y \rangle - \langle A(x-y), x-y \rangle$$

desse modo,

$$\begin{aligned} 4 |\operatorname{Re} \langle Ax, y \rangle| &\leq M (\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) \\ 4 |\operatorname{Re} \langle Ax, y \rangle| &\leq 2 M (\|x\|^2 + \|y\|^2) \end{aligned}$$

para todo $x, y \in H$, se

$$\|x\| = \|y\| = 1 \Rightarrow |\operatorname{Re} \langle Ax, y \rangle| \leq M.$$

Seja $x \in H$, $\|x\| = 1$, $Ax \neq 0$ e $y = \frac{Ax}{\|Ax\|}$. Então,

$$\left| \operatorname{Re} \left\langle Ax, \frac{Ax}{\|Ax\|} \right\rangle \right| \leq M \Rightarrow \|Ax\| \leq M$$

para todo $x \in H$ tal que $\|x\| = 1$, então $\|A\| \leq M$, e portanto, $\|A\| = M$. □

Definição 4.4.2. *Seja X um espaço de Banach complexo e seja $T : X \longrightarrow X$ um operador linear. $\lambda \in \mathbb{C}$ é ponto regular de T se*

- i) $N(T_\lambda) = \{0\}$, $T_\lambda = T - \lambda I$;
- ii) $\overline{R(T_\lambda)} = X$;
- iii) O operador $T^{-1} : X \longrightarrow X$ com $D(T_\lambda^{-1}) = R(T_\lambda)$ é contínuo, logo existe $c \geq 0$ tal que $\|T_\lambda^{-1}y\| \leq c \|y\|$ para todo $y \in D(T_\lambda^{-1})$.

O conjunto de todos os λ regulares de T chama-se conjunto resolvente de T e se designa $\rho(\overline{T})$, Temos que $T_\lambda^{-1} = R_\lambda(T)$ é resolvente de T .

Definição 4.4.3. Para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \notin \rho(T)$ chama-se valor espectral de T .

O conjunto desses λ_s , chama-se espectro de T . Temos que

$$\tau(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \notin \rho(T)\}$$

é um espectro de T , sendo $\mathbb{C} = \tau(T) \cup \rho(T)$.

Definição 4.4.4. Sejam X um espaço de Banach, $T : X \longrightarrow X$ um operador linear e $\lambda \in \tau(T)$. Diz que:

- i) $\lambda \in \tau_p(T)$ é um espectro pontual, se $N(T_\lambda) \neq \{0\}$;
- ii) $N(T_\lambda) = \{0\}$, mas $\overline{R(T_\lambda)} \neq X$, então $\lambda \in \tau_r(T)$ é um espectro residual;
- iii) $N(T_\lambda) = \{0\}$, $\overline{R(T_\lambda)} = X$, mas T_λ^{-1} não é limitado, então $\lambda \in \tau_c(T)$ é um espectro contínuo.

Logo,

$$\tau(T) = \tau_p(T) \dot{\bigcup} \tau_r(T) \dot{\bigcup} \tau_c(T).$$

Observação 4.4.1. $N(T_\lambda) \neq \{0\}$ e existe $x \neq 0$, $x \in N(T_\lambda)$, então $(T - \lambda I)x = 0$, por conseguinte, $Tx = \lambda x$.

Definição 4.4.5. Seja X um espaço vetorial e seja $T : X \longrightarrow X$ um operador linear, λ é um autovalor de T se existe $x \in X$, $x \neq 0$ tal que $Tx = \lambda x$, sendo que x é um autovetor correspondente ao autovalor λ . Temos que X_λ é autoespaço de T . Assim, $\lambda \in \tau_p(T)$ se, e somente se, λ é um autovalor de T .

Capítulo 5

Aplicação de Análise Funcional

Nos capítulos anteriores foram abordados os conceitos centrais da teoria da Análise Funcional. A teoria neles desenvolvida forma os pilares para as aplicações dessa disciplina a todas as áreas e problemas que dela demandam. Neste capítulo, o objetivo principal é analisar e descrever uma aplicação dos conceitos desenvolvidos nos capítulos precedentes. Foi selecionado um trabalho com objetivo de mostrar o alcance, a abrangência e a necessidade dessa profunda e bela disciplina.

Com isso em mente, o trabalho analisado, o qual é um artigo, foi escrito pelos autores Sergio Floquet, Augusto A. de Castro Júnior, Marco A. S. Trindade e J. David M. Vianna com o título “ C^* -Álgebra e a Descrição da Mecânica Quântica”.

5.1 C^* -Álgebra e a Descrição da Mecânica Quântica

No artigo C^* -Álgebra e a Descrição da Mecânica Quântica dos autores Sergio Floquet, Augusto A. de Castro Júnior, Marco A. S. Trindade e J. David M. Vianna apresentam sobre a teoria das C^* -Álgebras demonstrando dois importantes resultados, o Teorema de Gelfand que relaciona toda C^* -Álgebra Abeliiana às funções contínuas sobre um espaço de Hausdorff compacto que é um espaço topológico no qual seja qual for dois pontos diferentes, eles têm vizinhanças disjuntas e também o Teorema de Gelfand-Neumark que associa toda C^* -Álgebra, mas dessa vez é não Abeliiana aos operadores lineares sobre um espaço de Hilbert. Posteriormente, foi mapeado a Mecânica Clássica dentro dos princípios da C^* -Álgebra, obtendo assim uma determinação algébrica para os estados e às observáveis clássicas. Daí, aprofundando no caso Quântico, mantendo a indicação algébrica e usando o Princípio da Incerteza, obtêm-se que os estados quânticos devem ser representados por vetores dos Espaços de Hilbert ao mesmo tempo que os observáveis quânticos são operadores auto-adjuntos sobre este espaço.

Primeiramente, (FLOQUET et al., 2018), relacionam a descrição matemática da Mecânica Quântica com a Mecânica Clássica, no qual, a Mecânica Clássica são basicamente vetores que guar-

dam as informações de posições e os momentos de cada partícula de movimento, podendo dizer que, são elementos de espaço vetorial de dimensão finita. Já na Mecânica Quântica existe a necessidade de um Espaço de Hilbert para que possa descrever os estados e de operadores auto-adjuntos para caracterizar os observáveis. Agora vamos entender melhor o que seria a C^* -Álgebra, que na matemática, especificamente na área de estudo deste trabalho de conclusão de curso que é análise funcional, uma C^* -Álgebra (leia-se “C-estrela”) é uma álgebra dos espaços de Banach junto com uma involução ou função involutória (função que é seu próprio inverso) que satisfaz as propriedades do adjunto. Uma particularidade é o de uma álgebra complexa A de operadores lineares contínuos em um espaço de Hilbert complexo que apresenta duas propriedades adicionais, no qual a primeira diz que A é um conjunto topologicamente fechado na topologia de norma de operadores, já a segunda propriedade nos diz que A está encerrada sob a operação de admissão de operadores.

C^* -Álgebra tem como seu principal uso em mecânica quântica para modelar as álgebras de observáveis físicos, foi aí que ela teve seu início considerado importante. Começou a mecânica matricial de Werner Heisenberg's mecânica matricial e de uma forma mais matematicamente desenvolvido com Pascual Jordan em torno do ano de 1933. Por conseguinte, John von Neumann empenhou-se em determinar uma representação geral para estas álgebras que resultou em um grande acervo de artigos sobre os anéis de operadores. As C^* -Álgebras são agora, também, uma ferramenta importante na teoria de representações unitárias de grupos localmente compactos, e também são usadas em formulações algébricas da mecânica quântica. Em 1943, Israel Gelfand e Mark Neumark definiram a C^* -Álgebra e provaram o teorema que hoje recebe seus nomes, o Teorema de Gelfand-Neumark, onde mostra que toda C^* -Álgebra não Abelianiana é isometricamente isomorfa à álgebra de operadores sobre um espaço de Hilbert.

Floquet *et al.* (2017), tem como um objetivo no trabalho representar a estrutura matemática da Mecânica Quântica, ou seja, que a estrutura tenha consequência dos Teoremas relacionados às C^* -Álgebras. Para tal fim, codificou a Mecânica Clássica dentro da teoria das C^* -Álgebra abelianas¹. Posteriormente, através do Princípio da Incerteza de Heisenberg, percebe-se que é a C^* -Álgebra que descreve a Mecânica Quântica deve ser não Abelianiana. Dessa forma, os observáveis da Mecânica Quântica têm de ser os operadores auto-adjuntos sobre os espaços de Hilbert, enquanto isso, os estados são vetores normalizados dos espaços de Hilbert. Na segunda seção do trabalho, Floquet *et al.* (2017), expõe um pouco sobre a Análise Funcional, mas especificamente sobre os Espaços de Hilbert, tais como suas propriedades elementares, todas já apresentadas no decorrer do trabalho. Ainda na mesma seção, o autor relata um pouco também sobre as noções da Teoria Espectral, a qual baseia-se na análise do espectro dos operadores lineares. Assim, determinado espectro pode ser cogitado como sendo a generalização do conceito de autovalor, em que é essencial

¹Em análise funcional, uma álgebra abelianiana é uma álgebra de von Neumann de operadores sobre um espaço de Hilbert na qual todos os elementos comutam (DIXMIER, 1969).

no estudo de operadores em espaços de dimensão infinita.

Na seção três, os autores escrevem um pouco sobre a C^* -Álgebra e apresenta os Teoremas de Gelfand e o Teorema de Gelfand-Neumark. Vale ressaltar que as C^* -Álgebras são um tipo particular de Álgebras de Banach, abrangendo uma grande área de estudos dentro da Análise Funcional. É necessário definir uma Álgebra de Banach em como uma Álgebra Normada completa, deste modo, uma C^* -Álgebra é uma Álgebra de Banach com involução. São apresentados dois exemplos de C^* -Álgebras, onde no primeiro exemplo Floquet *et al.* (2017), associa a C^* -Álgebra com funções contínuas num espaço topológico Hausdorff compacto, e o segundo exemplo é sobre a C^* -Álgebra dos operadores lineares sobre um espaço de Hilbert. Em seguida, os autores apresentam uma subseção sobre a C^* -Álgebra Abeliana, em que apresenta o Teorema de Gelfand, que afirma que toda C^* -Álgebra abeliana é isometricamente isomorfa à C^* -Álgebra das funções contínuas sobre um espaço topológico Hausdorff compacto. A partir de vários conceitos, como os conceitos de funcionais multiplicativos e da transformada de Gelfand, pode enunciar o Teorema de Gelfand no que diz, “*Seja A uma C^* -Álgebra abeliana então existe um espaço Hausdorff compacto X tal que A é isometricamente isomorfo a $C(X)$.*” (Floquet *et al.* 2017, p. 7). Por conseguinte, é apresentado um teorema dentro da teoria da C^* -Álgebra, que é a construção GNS que compara a existência de representações sobre o espaço de Hilbert com a existência de estados. A partir da construção GNS, todo estado é definido por uma realização concreta de uma C^* -Álgebra na álgebra dos operadores sobre um espaço de Hilbert, pelo Teorema de Gelfand-Neumark-Segal (Construção GNS), obtemos o seguinte Teorema de Gelfand-Neumark, no que diz, “*Toda C^* -Álgebra é isometricamente isomorfa a uma Álgebra de Operadores sobre um espaço de Hilbert.*” (Floquet *et al.* 2017, p. 8).

A quarta seção relata sobre a Mecânica Quântica e as C^* -Álgebras, que tem um objetivo de considerar a Mecânica Clássica como sendo descrita por uma C^* -Álgebra. Por conseguinte, os autores conectam as C^* -Álgebras Abelianas e a Mecânica Clássica. Assim, busca-se encontrar a relação entre a estrutura abstrata de C^* -Álgebra com a Mecânica Clássica. Como foi apresentado no primeiro exemplo da seção três, a Mecânica Clássica é uma C^* -Álgebra abeliana. Portanto, a partir de todos os conceitos algébricos, é postulado o que são os estados e os observáveis como elementos da C^* -Álgebra abeliana. O primeiro postulado é sobre os Estados Clássicos e o segundo é sobre as Observáveis Clássicas. Consequentemente, Floquet *et al.* (2017), descreve a Mecânica Quântica via C^* -Álgebra. Aplicando a C^* -Álgebra para descrever a Mecânica, é disposto que os conceitos de estado e observável não devem depender se a mecânica é clássica ou quântica. Sendo assim, é apresentado mais dois postulados, o primeiro sobre os Estados Quânticos em que os estados de um sistema quântico, são funcionais lineares positivos normalizados da C^* -Álgebra. Já o segundo postulado é sobre os Observáveis Quânticos no qual diz que os observáveis de um sistema quântico são exatamente os elementos auto-adjuntos da C^* -Álgebra. Por causa do Princípio da Incerteza, a

C*-Álgebra descreve a Mecânica Quântica como não abeliana. Por fim, Floquet *et al.* (2017), fala brevemente sobre os operadores de Weyl e a C*-Álgebra de Weyl, tudo motivado pela construção no caso Quânticos a descrição matemática, via os operadores auto-adjuntos sobre um espaço de Hilbert.

Capítulo 6

Considerações Finais

Para o desenvolvimento do trabalho exposto procurou-se utilizar o conhecimento obtido acerca da Álgebra Linear e da Análise, componentes curriculares estruturadas no curso de Licenciatura em Matemática. Dessa forma, o conhecimento sobre essas áreas de estudo é de caráter indispensável para a conclusão do presente estudo.

Considera-se, portanto, que a Análise Funcional é uma fusão destas duas áreas, tendo um grande realce para os espaços vetoriais de dimensão infinita. Se trata do estudo de espaços de funções e também pode-se dizer que é uma análise em espaços de dimensão infinita. A Análise Funcional é importante por seu papel fundamental em alguns ramos da Matemática como Análise Não-Linear, EDP's, Geometria Diferencial, entre outros. Apresenta também, uma relevância considerável no ramo da física, especificamente em mecânica quântica. Tal dependência da física, enquanto área do conhecimento, ficou evidente na aplicação apresentada na seção precedente. O grande passo em estabelecer essa conexão foi dado, como já citado, com os estudos de John von Neumann.

Assim, é notório que vários resultados envolveram propriedades topológicas e de análise. Resultados esses, utilizados para as aplicações apresentadas neste trabalho, o que os torna importantes ferramentas matemáticas para o desenvolvimento de tais aplicações. É importante salientar que fez-se necessária muita pesquisa de elementos matemáticos que não são comumente vistos no decorrer do curso, para ter uma compreensão mínima do tema.

Por se tratar de um dos mais recentes ramos da matemática, uma das dificuldades encontradas para a elaboração deste trabalho foi a “escassez” de materiais, especialmente em língua portuguesa. Assim, por esse motivo, faz-se necessário o desenvolvimento de pesquisas que abordem tal área de estudo. Diante disso, o presente trabalho que tem por principal objetivo fazer um breve estudo sobre a Análise Funcional a partir de algumas aplicações, realiza uma introdução sobre Análise Funcional, considerando a extensão de tal conteúdo, que possui várias atribuições dentro da matemática e também da física. Considera-se que o estudo de Análise Funcional é significativo

para o contínuo avanço da Matemática, tendo em vista que, é na Análise Funcional que se estuda os espaços vetoriais de dimensão infinitas, onde são encontradas soluções de uma grande variedade de problemas matemáticos.

Ademais, este trabalho proporcionou um conhecimento matemático, até então não obtido com as disciplinas de graduação. Assim, a elaboração deste trabalho me motivou fortemente para que desse continuidade nos estudos num futuro próximo, pois é uma área nova e de uma fundamental importância em várias outras áreas da matemática e até mesmo da física, como mostrado no Capítulo 5.

Conclui-se, portanto, que o objetivo do trabalho, qual seja, o de dar um vislumbre sobre o que se pode esperar quando se avança nos estudos de matemática para além da graduação, foi atingido. Percebe-se que a Análise Funcional se constitui uma área com diversas aplicações, sendo essencial para a obtenção de novos resultados em alguns ramos da Matemática e da Física.

Referências Bibliográficas

- BARBOSA, A. **Um estudo sobre os espaços L^p** . Monografia (TCC) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Caicó, 2019.
- BENTO, A. **Análise Funcional**. Covilhã, 2007. 199 p.
- BOLDRINI, J. **Álgebra Linear**. [S.l.: s.n.], 1980. 230 p.
- BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. **Fundamentos de análise funcional**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 409 p.
- CALLIOLLI, C. A.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. **Álgebra linear e Aplicações**. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 1990. 172 p.
- DIXMIER, J. **Les Algebres d'Operateurs dans l'Espace Hilbertien**. 2. ed. Paris: Gauthiers-Villars, 1969. 367 p.
- FERRA, I. A. **Introdução Teoria das Distribuições e Tópicos de Equações Diferenciais Parciais**. 107 f. Monografia (TCC) — Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2012.
- FLOQUET, S.; JÚNIOR, A. A. d. C.; TRINDADE, M. A.; VIANNA, J. D. M. C^* -álgebras e a descrição da mecânica quântica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, São Paulo, v. 40, n. 3, 2018.
- FYDRYZEWSKI, R. M. **Espaços uniformemente convexos e desigualdades**. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007.
- HINCKEL, F. et al. **Introdução aos espaços vetoriais de dimensão infinita**. Monografia (TCC) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2009.
- JORGENSEN, P.; TIAN, F. **Functional Analysis with Applications**. [S.l.: s.n.], 2014.
- JUNIOR, D. P. P. **Introdução à Análise Funcional**. 2. ed. Niterói: UFF, 2009. 131 p.
- KREYSZIG, E. **Introductory functional analysis with applications**. New York: John Wiley e Sons, 1978. v. 1. 704 p.
- LIMA, E. L. **Elementos de topologia geral**. [S.l.]: LTC, 1976.
- _____. **Espaços Métricos**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013. 299 p.

MACHADO, L. B. **Análise funcional e aplicações**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática Universitária) — Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2012.

MEGGINSON, R. E. **An Introduction to Banach Space Theory**. [S.l.]: Springer, 1998.

OLIVEIRA, C. R. d. **Introdução à Análise Funcional**. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. 257 p.

SANTOS, J. C. **Introdução à Topologia**. Porto, 2011. 192 p.

SILVA, C. M. d. **Pontos Periódicos de Funções Contínuas em Intervalos**. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2018.

VERMERSCH, R. M. **Espaços de Banach que Admitem uma Norma Uniformemente Convexa Equivalente**. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.