



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO
TOCANTINS**

CAMPUS PALMAS

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

LISANDRA MARIA MALAQUIAS DE SOUSA

**UM ESTUDO SOBRE AS FORMAS DA TERRA E SUAS RELAÇÕES COM A
TOPOLOGIA**

PALMAS - TO

2021

LISANDRA MARIA MALAQUIAS DE SOUSA

UM ESTUDO SOBRE AS FORMAS DA TERRA E SUAS RELAÇÕES COM A TOPOLOGIA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do *campus* Palmas do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins, como requisito parcial à obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Orientador: Dr. Wallysonn Alves de Souza

PALMAS - TO

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Bibliotecas do Instituto Federal do Tocantins

S725e Sousa, Lisandra Maria Malaquias de
 Um estudo sobre as formas da Terra e suas relações com a topologia /
Lisandra Maria Malaquias de Sousa. – Palmas, TO, 2021.
 33 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) –
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins, Campus
Palmas, Palmas, TO, 2021.

Orientador: Dr. Wallysonn Alves de Souza

1. Topologia. 2. Geometria terrestre. 3. Geodésia. I. Souza, Wallysonn
Alves de. II. Título.

CDD 510

A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio, deste documento é autorizada para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica do IFTO com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).



Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins
CAMPUS PALMAS
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

**FOLHA DE APROVAÇÃO DE TRABALHO DE CONCLUSÃO
DE CURSO DE GRADUAÇÃO**

1. **TÍTULO: UM ESTUDO SOBRE A FORMA DA TERRA E SUAS RELAÇÕES COM A TOPOLOGIA**
2. **AUTORA: LISANDRA MARIA MALAQUIAS DE SOUSA**
3. **ORIENTADOR: Prof. Doutor Wallysonn Alves de Souza**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins, *campus* Palmas, como parte das exigências para a conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovado em 02/12/2021.

Prof. Mr. Wallysonn Alves de Souza
IFTO – Campus Palmas
Presidente/Orientador

Prof. Me. Edson Luiz Kraemer
IFTO – Campus Palmas
Avaliador 1

Prof. Me. Magno Márcio de Azevedo
IFTO – Campus Palmas
Avaliador 2

Documento assinado eletronicamente por **Wallysonn Alves de Souza, Servidor,**



em 16/12/2021, às 22:10, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Edson Luiz Kraemer, Servidor**, em 17/12/2021, às 14:05, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Magno Marcio de Azevedo, Servidor**, em 17/12/2021, às 19:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.iftto.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1462563** e o código CRC **EB4DF376**.

Quadra 310 Sul, Lo 5, s/n, esquina com a Avenida NS 10 - Plano Diretor Sul — CEP 77.021-090
Palmas/TO — (63) 3236-4000
portal.iftto.edu.br — reitoria@iftto.edu.br

Dedico este trabalho à minha família, em especial em memória de alguns dos melhores seres do Universo, Dalila, Amora e Flora.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer inicialmente à todos que de alguma forma contribuíram para este momento, conscientes ou não. Agradeço em especial à minha família pelo apoio de sempre. Às minhas amigas mais antigas que ainda tenho o prazer de compartilhar experiências, Clara e Déborah, obrigada por ainda me aturarem. Aos amigos do Ensino Médio que levo pro resto da vida, Eduarda, Capi, Dani, Chagas, Gustavo e Iran, agradeço por ainda estarem presentes.

Aos colegas que agora chamo de amigos e que o curso de matemática me proporcionou, Arthur e Jodã, obrigada pela companhia nessa jornada caótica. Aos meus queridos amigos da matemática, Dyana, Wellington e Mirene, vocês me inspiraram e motivaram mais que imaginam. Aos queridos amigos que o IFTO de alguma forma me proporcionou Helen, Davis, Vini, Rodrigo, Daniel, Amanda e João, que fizeram parte dessa jornada e espero carregá-los nas próximas também.

Agradeço aos professores do curso de Agrimensura, em especial o Professor Luiz Antônio. Sou grata à todos os professores que tive no curso de Licenciatura em Matemática também, vocês foram inspiradores.

Ao Professor Magno e Professor Kraemer, agradeço pela parceria ao longo da graduação, em especial ao segundo por me emprestar o livro que me inspirou para escrever esse trabalho. Agradeço também à Professora Denise pela dedicação com os alunos. E agradeço ao Professor Wallysonn que aceitou me orientar.

Agradeço por último mas não menos importante aos autores e artistas que fizeram parte de tantos momentos e que de alguma forma me ajudaram a viajar para outros lugares quando a Terra, independente de sua forma, não era propícia.

RESUMO

Desde a antiguidade muitas especulações foram feitas a respeito da forma da Terra. Seria ela um disco, uma esfera, ou ainda, um toro? Aristóteles foi o primeiro a apresentar argumentos para a esfericidade da Terra, como o contorno circular da sombra da Terra projetada na Lua durante os eclipses lunares e mudança no aspecto do céu conforme a latitude do observador. Hoje sabe-se que a forma verdadeira da Terra é o Geóide. Ainda assim, o modelo esférico também é utilizado para representar a superfície terrestre. A esfera de Gauss é adotada como superfície de referência pela NBR 141166 por exemplo. Mas qual é a diferença entre essas formas para a matemática? Mais especificamente, o que a Topologia diz sobre esse assunto? Em Geodésia a forma esférica é considerada para a Terra em geral quando se deseja efetuar algum cálculo aproximado, ou quando as distâncias entre pontos geodésicos são relativamente pequenos. Esta pesquisa fez um levantamento sobre as formas homeomorfas à esfera, além da diferença entre o Geóide e a Esfera, por exemplo, em aplicações na Geodésia.

Palavras-chave: Topologia, Geometria terrestre, Geodésia, Homeomorfismo

ABSTRACT

Since antiquity much speculation has been made about the shape of the Earth. Would it be a disc, a sphere, or even a toro? Aristotle was the first to present arguments for the earth's sphericity, such as the circular outline of the Earth's shadow projected on the Moon during lunar eclipses and a change in the appearance of the sky according to the observer's latitude. Today it is known that the true form of the Earth is the Geoid. Still, the spherical model is also used to represent the earth's surface. The Gauss sphere is used as a reference surface by NBR 141166 for example. But what is the difference between these forms for mathematics? More specifically, what does Topology say about this subject? In Geodesy the spherical form is considered for the Earth usually when one wishes to do some approximate calculation, or when the distances between geodesic points are relatively small. This research surveyed the homeomorphic forms to the sphere, beyond the difference between the Geoid and the Sphere, for example, in applications in Geodesy.

Keywords: Topology, Earth geometry, Geodesy, Homeomorphism

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Toro	10
Figura 2 – <i>The Blue Marble</i>	13
Figura 3 – Plano Topográfico	16
Figura 4 – Elipsóide de Revolução	17
Figura 5 – Representação esquemática da superfície terrestre, geóide, elipsóide e esfera	18
Figura 6 – Superfícies de referências	19
Figura 7 – Rosca e caneca	20
Figura 8 – Toro	21
Figura 9 – Superfície externa	22
Figura 10 – Faixa de Möbius	22
Figura 11 – Recorte e colagem	25
Figura 12 – Toro de dois furos	26
Figura 13 – Corte de um toro de dois furos	26
Figura 14 – Toro de três furos	27
Figura 15 – Soma conexa	27
Figura 16 – Soma conexa do toro e bitoro	28
Figura 17 – Laços no toro e na esfera	29

SUMÁRIO

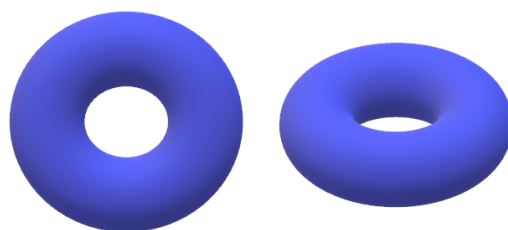
1	INTRODUÇÃO	10
2	METODOLOGIA	12
3	UM POUCO DE HISTÓRIA	13
4	GEODÉSIA	15
5	TOPOLOGIA	20
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	31
	REFERÊNCIAS	32

1 INTRODUÇÃO

Atualmente somos capazes de obter imagens do planeta Terra por meio de satélites e perceber que nosso planeta se assemelha a uma esfera, mas há alguns anos não era possível ter essa visualização sem mapeamentos terrestres. A precisão desses mapeamentos foi, e ainda é, diretamente influenciada pela superfície terrestre. Com os mapeamentos foi possível ter ideias sobre a forma terrestre. Imagine um mapa do mundo, para obter uma forma, nosso primeiro pensamento é em conectar as regiões que aparecem repetidas, em geral nas extremidades. Imagine que o material do qual o mapa é feito é maleável, de modo que ao manuseá-lo é possível distorcer partes de forma que o objeto permaneça liso. Conectando a parte superior com a inferior é obtido um cilindro e, lembrando que o material do mapa permite não ocasionar rugosidades no objeto, ao conectar as laterais temos o que parece um anel ou uma rosquinha, essa forma é chamada de *toro*.

Considere então que a Terra é um toro, como na Figura 1. Alguém vivendo no interior do anel poderia ver a parte da superfície logo na frente. E se o mundo fosse tão grande que isso não teria chance de ocorrer? Se o anel fosse de tal diâmetro que a visualização a olho nu do outro lado do anel fosse impossível, quem estivesse observando poderia acreditar viver em uma superfície aberta.

Figura 1 – Toro



Fonte: Próprio autor

Ao observar o céu não há formas toroidais vagando por aí, então por que com a Terra seria diferente? O sol e a Lua parecem discos quando observados mas são esféricos. E se não fosse possível observar outros objetos celestes para comparar? Os seres humanos ficariam a mercê de sua imaginação. Até o momento foram citadas duas formas, a esfera e o toro, mas qual outra forma poderia ser possível para a nossa *little blue marble*¹?

Ao considerar a esfera como a forma da Terra estamos na verdade dizendo que a esfera,

¹ *The blue marble* é o título da famosa fotografia da Terra tirada pela tripulação da missão Apollo 17 no ano de 1972. Em tradução livre seria algo como bolinha de gude azul.

como um objeto matemático, é uma boa representação para o planeta. Não há a inclusão do material interior nessas classificações, o magma e as rochas, por exemplo, que existem sob a superfície não são considerados. No decorrer deste trabalho o conceito de dimensão será abordado com mais detalhes e rigor, mas, para registro, ao falar de esfera estaremos nos referindo à esfera bidimensional.

Quando falamos sobre a forma não há preocupação quanto as características como tamanho ou distância mas com as propriedades que são mantidas quando o objeto é submetido a pequenas deformações, como esticar. Tais propriedades pertencem ao domínio da *Topologia*. A topologia estuda as propriedades de superfícies de modo que é possível classificá-las como *homeomorfas* (topologicamente idênticas) ou não.

A resolução do problema das sete pontes de Königsberg por Leonard Euler é tida como um dos primeiros estudos topológicos. A topologia é um pré-requisito para muitas áreas da matemática moderna e várias pesquisas têm surgido sobre ela. Com sua amplitude e importância, a topologia está sendo aplicada em outras áreas, como a biologia, em estudos sobre DNA, e a cosmologia, em estudos sobre a forma do Universo.

Pensando nesses diversos usos da topologia, esse trabalho abordou essa área de forma que o conteúdo a ser estudado seja acessível para leitores de todos os níveis e com uma abordagem interdisciplinar com a geodésia. Além disso, o tema busca atrair acadêmicos do curso de licenciatura por ser um assunto geralmente não estudado no curso.

Para atingir este objetivo, este trabalho foi dividido da seguinte forma: no capítulo 2 é explicada a metodologia empregada; o capítulo 3 é direcionado para explicar o processo histórico da determinação da forma da Terra; o capítulo 4 e 5 são destinados à área da geodésia e topologia, respectivamente; e por último, no capítulo 6 são feitas as considerações finais ligando os conceitos e definições dos capítulos anteriores.

2 METODOLOGIA

A pesquisa utilizada nesse trabalho pode ser classificada da seguinte forma:

De acordo com o que Silva e Menezes (2005) dizem, a pesquisa básica objetiva gerar conhecimentos novos úteis para o avanço da ciência sem aplicação prática prevista. Dessa forma, esta pesquisa teve uma abordagem básica quanto à sua natureza, pois a finalidade desta foi de gerar conhecimento.

Quanto aos objetivos, eles podem ser classificados como exploratórios pois, de acordo com Gil (1991), a pesquisa exploratória visa proporcionar maior familiaridade com o problema com vistas a torná-lo explícito ou construir hipóteses. Envolve levantamento bibliográfico; análise de exemplos que estimulem a compreensão. Essa abordagem foi utilizada ao estudar os conceitos de topologia, relacionados com a forma da Terra, e geodésia.

Quanto à abordagem metodológica, esta pesquisa foi qualitativa. Segundo Silva e Menezes (2005), a interpretação dos fenômenos e a atribuição de significados são básicas no processo de pesquisa qualitativa. Ao explicar o motivo pelo qual a esfera redonda foi adotada para a forma da Terra, por exemplo, foi utilizada a abordagem qualitativa.

No que se refere aos procedimentos, neste trabalho foram utilizadas pesquisas bibliográficas cujos objetivos foram fundamentar o estudo teoricamente, buscando para além disso, informações atualizadas e importantes que nortearam os rumos da pesquisa, colocando-a em contato com o que já foi escrito e discutido sobre o tema em questão.

Segundo Gil (2008), “a principal vantagem da pesquisa bibliográfica reside no fato de permitir ao investigador a cobertura de uma gama de fenômenos muito mais ampla do que aquela que poderia pesquisar diretamente”. Ademais, a pesquisa bibliográfica, de acordo com Lakatos e Marconi (2003), “propicia o exame de um tema sob um novo enfoque ou abordagem, chegando a conclusões inovadoras”.

3 UM POUCO DE HISTÓRIA

A forma da Terra passou por diversas teorias até chegar à forma esférica. Hoje temos a capacidade de obter imagens do planeta através de satélites e de fato ver sua forma. A Figura 2 é uma imagem muito famosa e emblemática, foi tirada pela tripulação da missão Apollo 17 em 1972.

Figura 2 – *The Blue Marble*



Fonte: (JONES, 2017)

Mas quando isso ainda não era possível, os estudiosos do assunto na época ficavam a mercê de suposições e, através de alguns apontamentos, chegavam a conclusões.

Algumas suposições como um disco flutuando no ar ou um tronco flutuante na água, ou ainda um disco flutuando sobre águas de um oceano infinito foram consideradas para a forma da Terra. De acordo com Aguiar (2020), Pitágoras é apontado como um dos primeiros filósofos a apresentar a ideia de esfericidade para a Terra. Apesar de não apresentar argumentos, Platão ensinava seus alunos que a Terra era esférica.

Aristóteles foi um dos primeiros, que se tem registro, a apresentar argumentos válidos para a esfericidade da Terra. Entre os argumentos encontra-se a sombra curva da Terra na superfície da Lua durante um eclipse lunar e o fato de que o aspecto do céu muda conforme o observador se encontra em diferentes latitudes (SILVEIRA, 2017).

Mesmo após Erastóstenes (276 - 194 a.C) calcular com grande precisão o raio da Terra (fato muito marcante considerando as ferramentas da época), muitos ainda duvidavam da esfericidade da Terra. De acordo com Brito (2017), foi somente após o navegador português Fernão

de Magalhães realizar sua famosa viagem em torno da Terra que a ideia começou a ser aceita.

No século XVII, na obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, Isaac Newton demonstrou que a Terra não era uma esfera perfeita como achávamos. Como a Terra é de fato ligeiramente achatada nos polos e alargada no Equador, a forma da Terra que mais se aproxima da real é o elipsóide de revolução (USUI, 2014).

O achatamento terrestre, no entanto, é muito pequeno. As medidas atuais levam a uma diferença de 21km entre o raio equatorial e o raio polar. Tal diferença representa apenas uma parte em 300, ou 0,3%, do raio equatorial da Terra (SILVEIRA, 2017). Sendo esse valor tão pequeno em comparação com a extensão terrestre, é possível, com a finalidade de aplicação prática, desprezar esse achatamento e adotar a esfera como modelo de representação da superfície terrestre. O achatamento é quase imperceptível ao olhar a Figura 2.

Todos tiveram algo a falar sobre a forma da Terra, até mesmo o grande navegador Cristóvão Colombo deu seu pitaco dizendo que, para ele, a forma da Terra era como uma pera. Mas quando houve a comprovação de que a Terra era esférica? Para que isso ocorresse as regiões do globo tiveram de ser devidamente mapeadas.

Os dois séculos que se seguiram a Colombo foram um período de produção de atlas cada vez mais generalizados da Terra, que foram os livros mais apreciados e procurados de todos os tempo (O'SHEA, 2009).

Mesmo após a expedição de Fernão de Magalhães ao redor do mundo, não estava muito claro para todos se a Terra era mesmo esférica. Como o mapeamento ainda não estava completo havia partes que eram desconhecidas e ninguém sabia onde um lugar ia dar se seguisse naquela direção. Vendo um mapa simples do globo sabemos onde começa e onde termina um território, o alcance dos oceanos, sabemos que os pontos na extremidade superior representam a mesma coisa, o polo norte, e os da extremidade sul, o polo sul.

Mas naquela época seria compreensível se alguém interpretasse de forma diferente da que ocorre hoje. Por exemplo, alguém poderia entender que se seguisse a direção norte e fosse sempre no mesmo caminho acabaria não voltando pois ninguém sabia até onde ia a extensão territorial daquele lugar.

4 GEODÉSIA

Como visto, a forma da Terra passou por diversas suposições, umas bem diferentes e outras quase perto da realidade. A Geodésia é uma área da ciência que se encarrega de estudar a forma real da Terra e suas dimensões e consequências, no sentido de importância para qual o estudo está relacionado.

Atualmente é possível a utilização de satélites para o trabalho geodésico, que antes era realizado por meio de métodos de triangulação do terreno². Grande parte da aplicação dos estudos geodésicos está relacionada à demarcação de terrenos. Apesar de sabermos que o modelo esférico pode ser utilizado para algumas aplicações, é necessária a realização de estudos constantes para a construção de mapas cada vez mais acurados.

De acordo com Zanetti (2007), o problema básico da Geodésia pode ser definido como “determinar a figura e o campo da gravidade externa da Terra e de outros corpos celestes em função do tempo, a partir de observação sobre e exteriormente às superfícies desses corpos”.

Há modelos da superfície terrestre que são utilizados de acordo com o seu propósito. Por exemplo, a *esfera de adaptação de Gauss* que, segundo Zanetti (2007), é adotada como superfície de referência pela Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), mais especificamente a NBR 14166.

Saber que a Terra é aproximadamente esférica não é suficiente em alguns casos. O planejamento e execução de projetos pela sociedade torna a informação georreferenciada de suma importância.

Georreferenciada significa que todas as informações representadas que dizem respeito à Terra (geo) estão atreladas a um sistema coordenado (referenciado) que sirva como referência para diferentes informações garantindo a concordância de suas posições. (ZANETTI, 2007).

A posição de um ponto em um espaço, bi ou tridimensional, é dada por um conjunto ordenado de números reais denominados coordenadas. Os sistemas de referência espacial são necessários para a construção de mapas detalhados e outras aplicações, e para isso é imprescindível o conhecimento da forma da Terra.

A geodésia pode ser dividida em três grandes campos. A **geodésia geométrica** realiza operações geométricas sobre a superfície terrestre (medidas angulares e de distâncias) associadas

² A triangulação, também chamada de decomposição em triângulos, é um método utilizado em pequenas áreas para o levantamento topográfico planimétrico.

a poucas determinações astronômicas. A **geodésia física** realiza medidas gravimétricas que conduzem ao conhecimento detalhado do campo da gravidade. E a **geodésia celeste** utiliza técnicas especiais de posicionamento, como satélites artificiais.

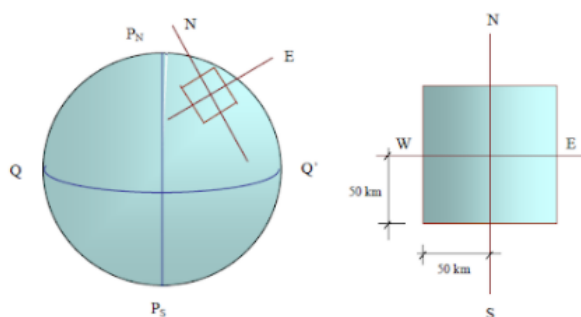
A Geodésia Física preocupa-se com o estudo da gravidade e suas aplicações geodésicas, pois o geodesta sempre está envolvido com três superfícies: **superfície física da Terra** é a superfície onde são efetuadas as operações geodésicas; **superfície de referência** é a superfície do modelo geométrico adotado - onde são efetuados os cálculos geodésicos (usualmente o elipsóide de revolução); **geóide** é uma superfície equipotencial do campo da gravidade, em uma primeira aproximação é aquela que mais se aproxima ao nível médio dos mares não perturbados (ARANA, 2009).

Uma observação necessária a ser feita é que entende-se por superfície equipotencial àquela que em todos os seus pontos possui o mesmo potencial; a superfície equipotencial do campo da gravidade possui a propriedade de *em todos os seus pontos ser perpendicular à direção da vertical*.

A superfície terrestre pode trazer muitas dificuldades ao fazer cálculos matemáticos sobre ela, então torna-se mais prático a utilização de um modelo representativo da superfície da Terra. O plano topográfico, o elipsóide de revolução, a esfera e o geóide são as superfícies de referência utilizadas em levantamentos, por exemplo. A seguir essas superfícies são definidas de modo mais completo, todas de acordo com Zanetti (2007).

Um exemplo de como o plano topográfico, representado na Figura 3, pode ser definido é a NBR 14166, a Rede de Referência Cadastral Municipal - Procedimento (ABNT, 1998) que define o plano topográfico por “superfície definida pelas tangentes, no ponto de origem do Sistema Topográfico, ao meridiano deste ponto e à geodésica³ normal a este meridiano”.

Figura 3 – Plano Topográfico



Fonte: (ZANETTI, 2007)

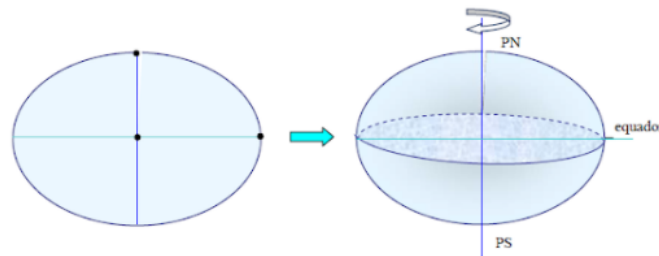
³ Do ponto de vista prático, a geodésica é a curva com menos comprimento que une dois pontos. Por exemplo, no plano é um segmento de reta e na esfera é um arco. Sobre a superfície esférica a geodésica é um arco de circunferência máxima.

A Topografia adota a hipótese do plano topográfico como superfície de referência, onde não são consideradas as influências de erros sistemáticos⁴ devidos à curvatura da Terra e ao desvio da vertical. Por conta dos erros consequentes destas simplificações adotadas, o plano topográfico tem suas dimensões limitadas.

Outra superfície de referência utilizada é o Elipsóide de Revolução. Ao demonstrar que a Terra não era uma esfera perfeita Isaac Newton propôs o elipsóide de revolução como figura geométrica da Terra por ser a forma que mais se aproximava da real.

O elipsóide de revolução pode ser gerado pela rotação de uma elipse sobre um de seus eixos. Ele é perfeitamente definido por dois parâmetros, o semi-eixo maior e o semi-eixo menor, a e b , respectivamente. O parâmetro b é muitas vezes tratado pela geodésia como o achatamento f . A Figura 4 representa a rotação sofrida por uma elipse sobre um de seus eixos, tendo como resultado um elipsóide de revolução.

Figura 4 – Elipsóide de Revolução



Fonte: (ZANETTI, 2007)

Há vários tipos de elipsóide de revolução utilizados em diferentes locais para trabalhos geodésicos. Esses elipsóide não tem o propósito de representar a Terra como um todo, mas se ajustar a determinada região.

A esfera também é utilizada para representar a superfície terrestre e, uma esfera em particular é a Esfera de Adaptação de Gauss, adotada pela NBR 14166 - Rede de Referência Cadastral Municipal. Por meio do Teorema de Gauss é possível fazer a transformação de elipsóide para esfera. Nessa transformação as linhas geodésicas passam a ser círculos máximos e, dentro de uma aproximação admissível para determinadas aplicações, é possível transformar um elemento da superfície do elipsóide em um elemento da esfera.

Por último, mas não menos importante, temos o Geóide. O geóide se torna uma forma im-

⁴ O erro sistemático afeta a precisão, fazendo com que os valores experimentais sejam maiores ou menores que os resultados reais. Um resultado ou valor real é entendido como aquele que foi exaustivamente verificado por muitos analistas e laboratórios, estabelecendo-se como um padrão de comparação.

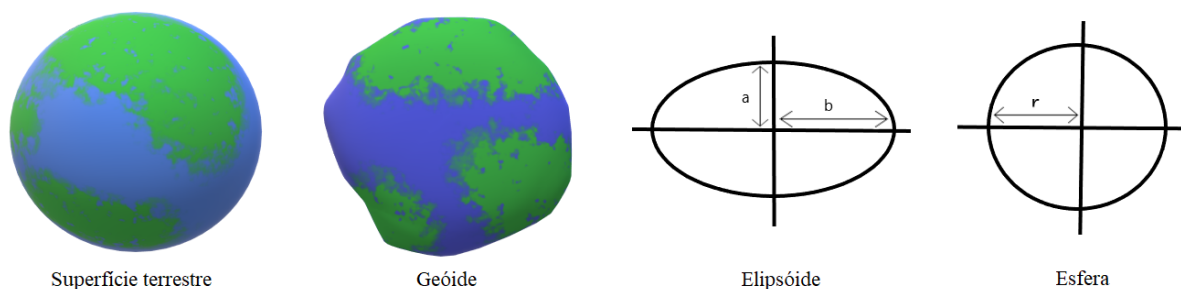
portante pois, entre outras razões, a altitude ortométrica, que é utilizada em obras de engenharia, é definida a partir do geóide. De acordo com Arana (2009), Gauss definiu o geóide como uma superfície matemática da Terra, sendo de suma importância para a geodésia e, conseqüentemente, para o posicionamento. O campo da gravidade é um campo vetorial ou seja, possui magnitude (valor absoluto) e direção. A gravidade média da superfície terrestre é de aproximadamente $9,8 \text{ m/s}^2$, ou ainda, 980 Gal^5 .

As superfícies equipotenciais, as superfícies de nível, são caracterizadas por apresentarem o mesmo potencial em todos os seus pontos. O campo da gravidade providencia um caso particular para esse tipo de superfície que são conhecidas como *Geópes*. O geóide é o geópe fundamental.

Arana (2009) comenta que com o GPS (*Global Positioning System*, que em português significa Sistema de Posicionamento Global), o geóide faz-se importantíssimo no posicionamento vertical.

Por conta das dificuldades encontradas, como o conhecimento limitado do campo gravitacional e o complexo equacionamento matemático do geóide, sua utilização como superfície de referência geométrica é dificultada.

Figura 5 – Representação esquemática da superfície terrestre, geóide, elipsóide e esfera



Fonte: Próprio autor

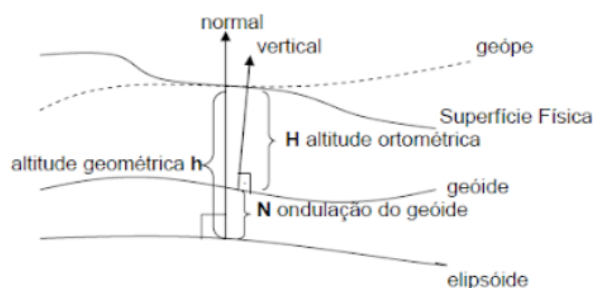
Para que a diferença das superfícies de referência fique mais nítida, a Figura 5 representa esquematicamente a superfície terrestre, o geóide, o elipsóide e a esfera. Note como elas são diferentes e que o elipsóide e a esfera utilizam de parâmetros diferentes.

Na Figura 6 estão retratadas o geópe, a superfície física, o geóide e o elipsóide, bem como a altitude ortométrica e geométrica. Note a diferença entre essas superfícies, em um momento a superfície física está mais alta e em outro ela fica mais baixa que o geópe. Isso acontece pois

⁵ Unidade de medida da magnitude onde $1 \text{ Gal} = 1 \text{ cm/s}^2$. O nome Gal foi dado em homenagem a Galileu Galilei

a superfície física da Terra é composta por diversos tipos de elevações e depressões em sua extensão.

Figura 6 – Superfícies de referências



Fonte: (ARANA, 2009) (p. 1)

De acordo com Arana (2009), a altitude geométrica h representada na Figura 6 é a distância, contada ao longo da normal, do elipsóide de referência ao ponto. A posição de um ponto P da superfície terrestre pode ser representada, juntamente com a latitude e longitude, pela altitude geométrica. Já a altitude ortométrica H é a distância entre um ponto da superfície terrestre e o geóide e é medida ao longo da vertical. A ondulação do geóide, ou ainda altitude geoidal, é a distância, contada ao longo da normal, do elipsóide de referência ao geóide.

Então, utilizando de outras palavras, a ondulação do geóide passa por diferentes valores por consequência da formação de sua superfície. Enquanto o elipsóide é mais suave, o geóide possui mais ondulações. Além disso, a altitude ortométrica e geométrica também passam por mudanças de valores uma vez que ambas são medidas considerando a superfície física, o que é resultado das imperfeições da superfície do nosso planeta.

5 TOPOLOGIA

A topologia possui dois segmentos principais, a topologia algébrica e a diferencial. A topologia algébrica é baseada na utilização da álgebra para estudar os problemas da topologia. O outro campo, a topologia diferencial, estuda a geometria de espaços e formas utilizando técnicas de cálculo diferencial, cálculo integral, álgebra linear e multilinear. Esse campo tem sua origem no estudo da geometria esférica e está relacionado à astronomia e a geodésia.

Há matemáticos que associam o surgimento da Topologia, como uma área da matemática, à publicação de *Analysis Situs* de Henri Poincaré e publicado em 1895. Mesmo que algumas ideias sobre topologia já fizessem parte do meio acadêmico, esse artigo foi o primeiro cuja dedicação foi inteiramente à Topologia.

De acordo com Muller e Baier (2014), “o termo topologia é introduzido por meio da publicação de um livro intitulado *Vorstudien zur Topologie*, publicado por um discípulo de Gauss, Johann Benedict Listing, em 1847”.

Mas o que é topologia? Segundo Krefta (2009) “a topologia é considerada como um ramo da Matemática que se dedica a estudar propriedades topológicas das figuras”. Tais propriedades, ou características, são invariantes por deformações contínuas. Estas deformações recebem o nome de *homeomorfismo*, sendo este um conceito central em topologia, pois por meio dele é realizada a classificação de objetos do ponto de vista topológico (KREFTA, 2009).

Objetos topológicos podem ser transformados sendo dobrados, torcidos, esticados. Propriedades topológicas são aquelas que se conservam após deformações que não provocam rasgaduras (MULLER; BAIER, 2014).

Também chamada de *geometria de borracha*, a topologia está ligada às propriedades qualitativas no sentido de buscar relações entre os objetos de acordo com a invariância que eles apresentam mesmo após sofrerem certas deformações.

Figura 7 – Rosca e caneca



Fonte: Próprio autor

Um dos exemplos mais comuns, e de fácil compreensão, utilizados para a visualização do que seria o homeomorfismo é a relação entre uma xícara e um *donut* (rosquinha que tem um

buraco no meio). Essa transição do toro para a xícara está representada na Figura 7. Mesmo sendo o mesmo o objeto para um topólogo, não é comum presenciarmos alguém bebendo café em uma rosquinha ou comer uma xícara de porcelana.

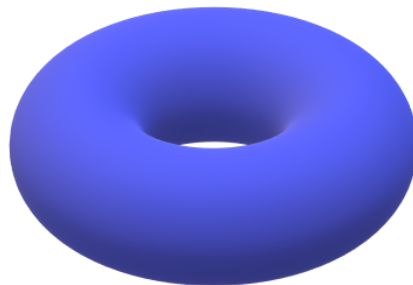
Para muitos a visualização de um conceito, principalmente matemático, se torna mais simples de entender quando envolvem-se imagens ilustrativas. Para Muller e Baier (2014) “o aspecto visual da topologia possibilita o entendimento dos conceitos elementares dessa fascinante área da matemática, mesmo para aqueles que só cursaram o ensino fundamental”.

Há alguns termos essenciais para esse tópico que necessitam de certo rigor ao serem definidos para que não ocorram erros de interpretação. Iniciaremos definindo o que é uma variedade bidimensional.

Uma *variedade bidimensional* ou *superfície* é um objeto matemático cujas área podem ser representadas todas em algum mapa sobre uma folha de papel. A palavra *bidimensional* se refere ao fato de, em qualquer ponto sobre esse objeto, os pontos próximos poderem ser expressos em termos de duas dimensões independentes (O’SHEA, 2009).

Então, de modo geral, uma superfície é representada em um atlas, pois esse é uma coleção de mapas que abrange toda a superfície de modo que todo ponto da superfície esteja representado em pelo menos um dos mapas. Note que todos os modelos de referência para a Terra foram definidos anteriormente como superfícies de referência. A explicação para a utilização da palavra *superfície* está no fato de que todos modelos mencionados podem ter suas regiões representadas em mapas. Portanto, partindo do que O’Shea (2009) disse, podemos classificar esses modelos como variedades bidimensionais. Outro exemplo de variedade bidimensional é o *toro*, esse objeto é representado pela Figura 8.

Figura 8 – Toro



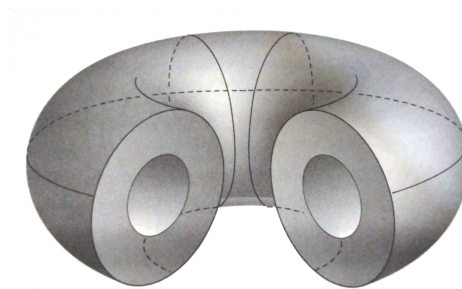
Fonte: Próprio autor

Outra definição para superfície que podemos adotar é de Sampaio (2012), que diz “[...] uma superfície é um ‘ambiente’ geométrico bidimensional, no sentido de que ‘habitantes’ fictícios de uma superfície se movem com apenas dois graus de liberdade.” Esse movimento se refere à

propriedade de um ponto, contido na superfície, ser capaz de mover-se para *frente*, *trás*, *direita* e *esquerda*. Esses movimentos não incluem para *cima* ou *baixo*, pois para isso o ponto deve deixar a superfície sendo possíveis no entanto em um ambiente tridimensional.

As variedades bidimensionais são objetos matemáticos idealizados a partir da realidade física. Ao dizer que a Terra é uma esfera não há consideração pelos materiais que existem sob a superfície, apenas a superfície externa, elas não têm espessura. Na Figura 9 tem-se um toro cortado, note que ele é oco.

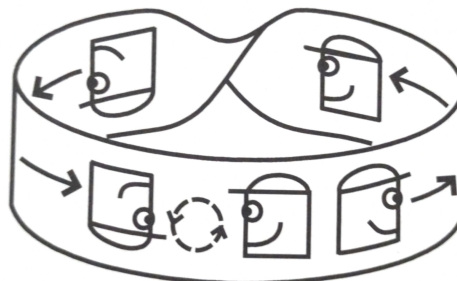
Figura 9 – Superfície externa



Fonte: (O'SHEA, 2009)

Apesar de alguns matemático utilizarem a palavra superfície como sinônimo de variedade bidimensional, nem toda variedade bidimensional é a superfície de algum sólido. E também não é sempre possível distinguir esquerda e direita em uma variedade. Mas podendo fazer essa distinção, a variedade bidimensional em questão poderá ser representada como superfície de algum sólido e o contrário também é verdade. Para esse tipo de variedade bidimensional é dado o nome de *orientáveis*. Como exemplo de variedade orientável temos a esfera.

Figura 10 – Faixa de Möbius



Fonte: (SAMPALIO, 2012)

A Figura 10 mostra uma faixa de Möbius, que é uma variedade não orientável. A faixa de Möbius é obtida ao colar duas extremidades de uma faixa retangular de papel, por exemplo, após um lado ter sido torcido em 180° . É uma variedade bidimensional com bordo. Não é possível

definir direita ou esquerda sobre essa variedade pois, quando se parte com os lados direitos e esquerdo definidos, e voltasse ao ponto de partida, os dois lados se invertem. Isso acontece pois essa variedade tem apenas um lado, quando se parte de um ponto qualquer de um lado e completasse a volta para o mesmo ponto de partida, retorna-se ao lado oposto.

Sobre o “habitante” da faixa de Möbius Sampaio (2012) diz que após o Quadrado dar um passeio ao longo dela, ao retornar para a sua posição inicial, dando um giro de 180° em torno de si mesmo, o melhor que consegue é se colocar “de pé”, resultando nele olhando para a direção oposta à que ele olhava quando partiu. E por causa disso, o caminho percorrido pelo Quadrado é dito *caminho que inverte orientação*.

Outra definição que se faz necessária é a de dimensão. De acordo com Krefta (2009), “no contexto das geometrias o conceito de dimensão pode ser explicado como o número de direções independentes necessárias para representar todos os pontos próximos de um ponto dado num determinado objeto”.

Para O’Shea (2009) “dimensão se refere ao número de direções independentes observadas por alguém que viva sobre a variedade, e não ao número de dimensões necessárias para conter o objeto”. Logo, nosso planeta é uma variedade bidimensional, assim como seus modelos de referência, pois são necessárias duas direções independentes para representá-lo, por exemplo latitude e longitude. E o Universo é tridimensional.

Vale ressaltar que algumas variedades bidimensionais têm *bordo* e outras não. De acordo com O’Shea (2009), “o bordo de uma variedade bidimensional é a sua extremidade, ou coleção de extremidades, vista da perspectiva de alguém sobre a variedade”. Por exemplo, imagine um disco limitado por um círculo que está inserido em um plano infinito, o círculo que limita o disco é o bordo do disco, enquanto o plano não tem bordo. Se uma variedade tem bordo, ele é de uma dimensão inferior à ela, por exemplo, se uma variedade bidimensional tem bordo, ele é unidimensional.

Para dizer que uma variedade bidimensional é *finita* ou *compacta* deve haver um número finito de mapas que seja suficiente para cobrir o espaço. Por exemplo, o plano euclidiano (ou espaço bidimensional) é uma variedade bidimensional infinita pois não há como mapear toda a sua extensão. A esfera é um exemplo de variedade bidimensional finita pois não se pode movimentar-se eternamente nela, em algum momento você voltará ao ponto de partida. É comum pensar que para uma variedade ser finita deve haver bordo, e isso não é necessariamente verdade. Veja, mesmo que uma variedade não possua bordo ela pode ser finita, desde que seja possível

fazer a representação dela em um número finitos de mapas.

O termo *superfície fechada* pode ser utilizado como sinônimo de *superfície compacta* pois as superfícies fechadas são uma reunião de um número finito de triângulos. De acordo com Sampaio (2012) quando a superfície não é fechada e nem apresenta bordo, ela é chamada de *superfície aberta*. O plano, por exemplo, é uma superfície aberta e fechada ao mesmo tempo. É um caso degenerado, ou seja, é um caso limite no qual uma classe de objeto altera sua natureza para aproximar-se muito a um objeto de outra classe, normalmente, mais simples.

Como o objetivo desse trabalho é mostrar como dois objetos, duas variedades, podem ser a mesma, é necessário estabelecer quais características devem ser conservadas após o objeto sofrer algumas deformações.

Dizemos que duas superfícies são idênticas topologicamente se os pontos de uma podem ser colocados numa correspondência um a um com os pontos da outra, de forma que a pontos próximos correspondam pontos próximos (essas correspondências são chamadas de contínuas). Duas variedades topologicamente idênticas são também chamadas de homeomorfas, e a correspondências que as define como idênticas é chamada de homeomorfismo (O'SHEA, 2009).

Uma *topologia* de um conjunto X é uma família T de subconjuntos de X com as seguintes propriedades: $\emptyset$ e X pertencem a T ; a união de elementos de qualquer família de T pertence a T ; a intersecção de elementos de qualquer subfamília finita de X pertence a T . Assim, um conjunto X munido de uma topologia T é dito *espaço topológico*. De modo mais formal o homeomorfismo pode ser definido como segue:

Definição. *Sejam X e Y espaços topológicos. Seja $f: X \rightarrow Y$ uma bijeção. A aplicação f é um homeomorfismo, se f e f^{-1} forem contínuas em X e Y respectivamente.*

A condição de que f^{-1} seja contínua, quer dizer que para cada conjunto aberto U de X , a imagem inversa de U pela aplicação f^{-1} é a mesma imagem de U pela aplicação f . Então, outra maneira de definir homeomorfismo, é dizer que é correspondência bijetora $f: X \rightarrow Y$ tal que $f(U)$ é um subconjunto aberto se, e somente se, U é um subconjunto aberto em X . Homeomorfismo é, assim, correspondência bijetora não somente entre X e Y , mas também entre os subconjuntos abertos de X e Y .

A topologia, como dito anteriormente, não trabalha com propriedades métricas, ela está mais interessada nas propriedades topológicas. De acordo com Sampaio (2012) há quatro deformações que não afetam a topologia de uma superfície:

1. Esticar ou inflar a superfície ou partes dela;
2. Encolher a superfície ou partes dela;

3. Entortar a superfície ou partes dela;
4. Cortar a superfície segundo uma linha suave nela demarcada e, posteriormente, colar novamente, uma na outra, as bordas geradas por esse recorte, resgatando a superfície original com a linha demarcada. A este procedimento é dado o nome de *recorte e colagem*.

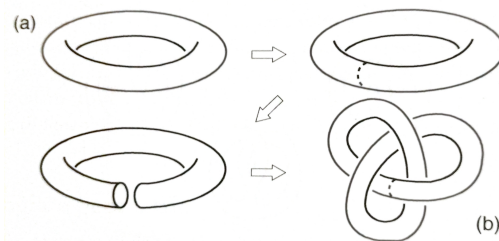
Duas superfícies são ditas *isotópicas* se uma é obtida a partir da outra por uma combinação finita das deformações 1, 2 e 3, de alguma ou de todas. Se a combinação é feita utilizando, alguma ou todas, as deformações 1, 2, 3 e 4, as superfícies são ditas *homeomorfas*. Portanto, superfícies isotópicas são homeomorfas, mas nem todas as superfícies homeomorfas são isotópicas.

Define-se então a *topologia de uma superfície* como o conjunto de aspectos geométricos dessa superfície que não se alteram quando à ela aplicamos qualquer uma dessas quatro *deformações*. Quando duas superfícies têm a mesma topologia, dizemos que elas são *topologicamente equivalentes* ou, como dizem os topólogos, *superfícies homeomorfas* (SAMPAIO, 2012).

Aspectos que se alteram em consequência das deformações, como ângulos, área e distâncias, constituem o que é chamado de *geometria da superfície*. Uma lista das deformações que alteram a topologia de uma superfície, que resultam em superfície não-homeomorfas à original segue:

1. Cortar a superfície, segundo uma curva nela demarcada, e não tornar a colar, um no outro, os bordos gerados pelo recorte;
2. Realizar colagens de modo arbitrário, fazendo com que dois ou mais pontos, originalmente separados, tornem-se um só ponto da superfície;
3. Escolher a superfície ou algumas de suas regiões, de modo que pontos originalmente separados se aglutinem num só ponto.

Figura 11 – Recorte e colagem



Fonte: (SAMPAIO, 2012)

A Figura 11 mostra como ocorre a transformação de recorte e colagem aplicada a uma superfície. Note que a superfície resultante b é homeomorfa à superfície original a, mais especifi-

camente o toro é homeomorfo ao *toro em nó*. No entanto, no espaço euclidiano tridimensional, elas não são isotópicas.

Com esses termos definidos e bem estabelecidos podemos voltar para a nossa indagação anterior a respeito da forma da Terra. Todos os pontos de nosso planeta estão mapeados de modo que todo ponto aparece pelo menos em um mapa, e como há um número finito de mapas, a Terra não é infinita.

Os mapas possibilitam a construção de formas. É possível relacionar um ponto que pertence a um mapa com o seu correspondente em outro mapa. Sabemos que podemos formar uma esfera e um toro até o momento, mas quantas variedades bidimensionais são possíveis de serem formadas?

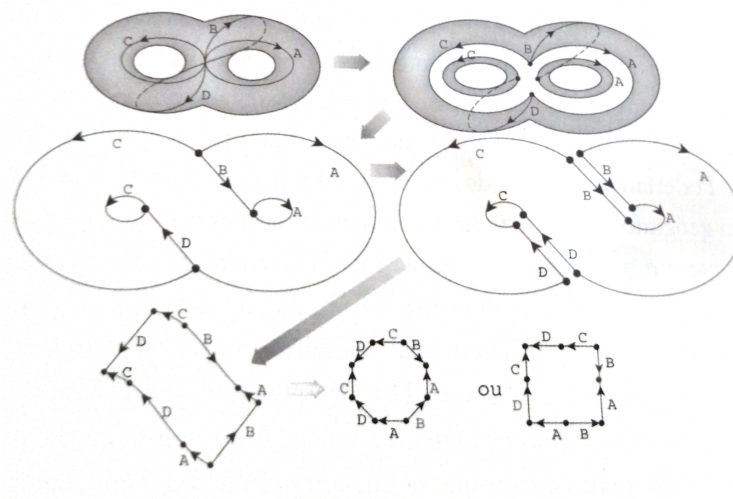
Figura 12 – Toro de dois furos



Fonte: (O'SHEA, 2009)

Para se ter noção da situação em que nos encontramos, vamos analisar o toro de dois furos, representado na Figura 12. O toro de dois furos é finito, logo há uma quantidade limitada de mapas que determinam suas regiões. Ao tentar colar os mapas, no entanto, os furos não serão percebidos pois não há uma quebra no mapeamento, todos os pontos estão ligados.

Figura 13 – Corte de um toro de dois furos



Fonte: (O'SHEA, 2009)

Os mapas desse toro de dois furos podem, de fato, serem colados de modo a gerar apenas um grande mapa, basta cortar o mundo de acordo com quatro curvas, que começam no mesmo ponto, e suas respectivas direções. A Figura 13 ilustra esse fato.

De acordo com esse método de colagem de mapas, podemos concluir que da mesma forma que poderíamos estar habitando um toro de dois furos podemos habitar um de três furos, representado na Figura 14. O sistema de montagem de mapas segue a mesma lógica que a representada, assim podemos considerar um toro de quatro furos, cinco, e assim por diante.

Figura 14 – Toro de três furos

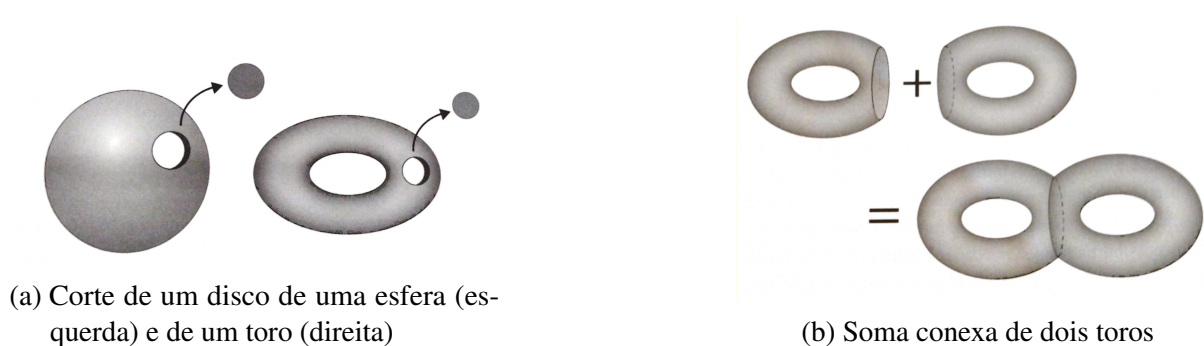


Fonte: (O'SHEA, 2009)

Podemos também criar variedades bidimensionais a partir da soma de outras variedades. Tomemos duas variedades bidimensionais com um corte no formato de um disco em cada. Note que o bordo do disco é um círculo. Podemos colar as variedades ligando cada ponto da abertura criada pelo corte de uma variedade ou da outra, criando assim uma nova variedade bidimensional sem bordo. Essa variedade criada é chamada de *soma conexa* das duas variedades anteriores.

Na Figura 15 está ilustrada a esfera e um toro com cortes no formato de um disco (a) e a soma conexa de dois toros (b), essa soma forma o que é chamado de *bitoro*, ou como havíamos chamado antes, toro de dois furos.

Figura 15 – Soma conexa

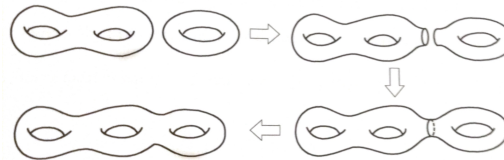


Fonte: (O'SHEA, 2009)

Da mesma forma que foi gerado o bitoro podemos formar outras superfícies. Por exemplo, a soma conexa de um toro com um bitoro, que gera um toro com três furos, também chamado de

toro de genus 3. A formação do toro de três furos a partir do bitoro e do toro está ilustrada na Figura 16. Em superfícies orientadas o *genus* é o número de alças ou furos que uma variedade possui.

Figura 16 – Soma conexa do toro e bitoro



Fonte: (SAMPAIO, 2012)

Dessa forma é possível a criação de diversas variedades bidimensionais finitas que não têm bordo e são orientáveis, que são dadas pela soma conexa de toros e a esfera. Alguém com acesso aos mapas das regiões do nosso planeta mas que não saiba a forma do mundo seria capaz de descobrir qual variedade bidimensional representa a Terra?

Tentar reunir os mapas pode ser uma solução, mas uma que não garante que apenas uma resposta seja correta. Há de ser considerado o que os matemáticos chamam de *caminhos fechados* ou *laços*, que são caminhos que começam e terminam no mesmo ponto. É como se fosse um rastro deixado por alguém ao viajar pela superfície.

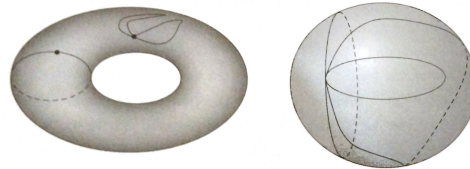
Há relações entre laços que são chamadas de *homologias*, elas permitem a classificação deles e torná-los propriedades numéricas. As variedades topológicas são diferenciadas pelo comportamento de seus laços. Não iremos nos alongar nesse assunto mas é necessário a explicação de um exemplo.

Apesar de ser dito anteriormente que poderíamos não perceber a diferença entre viver em um toro e viver em uma esfera devido a algumas condições, há uma forma de diferenciá-los. Imagine que você está viajando e resolve deixar a ponta de uma linha presa no ponto inicial de sua viagem. Após o retorno ao início de sua viagem você resolve recolher a linha. Ao dizer “recolher a linha” fica subentendido que você está segurando ambas as extremidades da linha e puxando a extensão deixada na viagem. Pode ocorrer da linha ficar travada em algum ponto, isso pode significar que a variedade apresenta algum problema nesse ponto.

Se a variedade for uma esfera ou um plano, a linha pode ser recolhida sem dificuldade. O diâmetro da linha, no caso da esfera, vai ficando cada vez menor, o laço fica mais curto sobre a superfície. Em um toro, se a viagem for feita contornando um furo, não será possível recolher a linha, o laço não poderá ser menor que o diâmetro do toro.

Note na Figura 17 que o laço à esquerda sobre o toro não pode ser contraído a um ponto, desde que não deixe a superfície, mas os outros podem. Todos os laços sobre a esfera podem se contrair a um ponto.

Figura 17 – Laços no toro e na esfera



Fonte: (O'SHEA, 2009)

Uma variedade é dita *simplesmente conexa* se todos os laços podem ser contraídos em um único ponto. De acordo com o Teorema de classificação de superfícies bidimensionais, a esfera é a única variedade bidimensional simplesmente conexa. Apesar da dificuldade, um geógrafo pode conseguir determinar se a variedade representada pelos mapas é simplesmente conexa, logo ele é capaz de determinar se o mundo é uma esfera.

Há ainda uma propriedade que Sampaio (2012) apresenta que é importante mencionar. A propriedade é a de que toda superfície fechada orientável, ou seja, toda superfície fechada em que é possível fazer a distinção entre direita e esquerda, é uma esfera, um toro ou uma soma conexa de dois ou mais toros. Ou seja, uma superfície, sendo ela fechada orientável, é homeomorfa à uma esfera, um toro ou uma soma conexa de dois ou mais toros. Isso significa que sua representação pode ser dada por uma esfera ou um toro de n furos. Note que essas superfícies não são homeomorfas entre si, isso se deve ao número de furos que cada superfície apresenta.

De acordo com O'Shea (2009), da mesma forma que os mundos são modelados pelas variedades bidimensionais, as variedades tridimensionais são modelos para o universo. Uma variedade tridimensional particular é a *esfera tridimensional*, ela não tem bordo, é finita, e todo laço se contrai em um ponto. A conjectura de Poincaré diz que essa variedade é a única variedade tridimensional simplesmente conexa finita. De outra forma, o Clay Mathematics Institute (Instituto de

Matemática Clay - CMI) diz:

Se esticarmos um elástico ao redor da superfície de uma maçã, então podemos reduzi-lo até um ponto movendo-o lentamente, sem rasgá-lo e sem permitir que ele deixe a superfície. Por outro lado, se imaginarmos que o mesmo elástico foi de alguma forma estendido na direção apropriada em torno de uma rosquinha, então não há como reduzi-lo a um ponto sem quebrar nem o elástico ou a rosquinha. Dizemos que a superfície da maçã está "simplesmente conectada", mas que a superfície da rosquinha não é. Poincaré, há quase cem anos, sabia que uma esfera bidimensional é essencialmente caracterizada por essa propriedade de conectividade simples, e fez a pergunta correspondente para a esfera tridimensional.

Quase um século se passou entre a formulação da conjectura por Henri Poincaré e sua solução por Grigoriy Perelman. O que essa conjectura diz é que a superfície tridimensional de uma esfera é o único espaço fechado de dimensão 3 onde todos os contornos ou caminhos podem ser encolhidos até chegarem a um simples ponto. Assim como outros assuntos estudados, o que foi mencionado sobre topologia até o momento pode não significar muita coisa neste momento e nem fazer muito sentido, mas talvez no futuro a conjectura de Poincaré seja a maior aquisição do conhecimento humano.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A justificativa para a escolha da temática é a relevância do tema para a área da matemática, além de não ser um tema muito trabalhado no curso de licenciatura. A área da geodésia foi pensada para a implementação de certa interdisciplinaridade. Ao longo do trabalho foi comentado como ocorreu o processo histórico e os principais nomes quando tratamos da forma da Terra. A geodésia é uma área um tanto diferente mas que tem muita matemática.

Tanto se falou sobre a superfície da Terra e, de acordo com o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), define-se a forma da Terra como geóide, que tem uma superfície irregular e, portanto, não corresponde a uma esfera. Como o geóide é uma superfície de características físicas complexas, os cartógrafos buscaram a figura geométrica matematicamente definida que mais se aproximasse dele, possibilitando assim a realização de cálculos relacionados a medições sobre a superfície terrestre (por exemplo, medições de coordenadas de pontos, distâncias, ângulos, áreas, etc.).

De acordo com as definições tratadas ao longo do texto, as superfícies de referência como o elipsóide de revolução, a esfera e o geóide são tidas como superfícies compactas sem bordo orientável. Então, a partir disso podemos considerar que de acordo com o Teorema da Classificação de superfícies, essas superfícies de referência utilizadas nos estudos geodésicos são homeomorfas a uma esfera ou a uma soma conexa de toros. Assim, essas superfícies são iguais da mesma forma que uma xícara e uma rosquinha são.

Com base no que foi visto até o momento, podemos concluir que, apesar das diferentes aplicações utilizadas para cada superfície de referência da Terra, quando elas são trabalhadas como objetos topológicos, elas são classificadas como a mesma variedade por consequência da propriedade mencionada anteriormente. Entende-se que o objetivo foi atingido uma vez que foi realizado um estudo sobre as formas da Terra e suas relações com a topologia foram devidamente abordadas.

Para quem se interessar pelo conteúdo de topologia abordado aqui, fica de recomendação o livro “Uma Introdução à Topologia Geométrica: passeios de Euler, superfícies, e o teorema das quatro cores” de Sampaio (2012). Nesse livro o autor aborda com mais rigor os temas tratados aqui e também pode ser encontrada a demonstração do Teorema de classificação de superfícies bidimensionais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGUIAR, Claudinei Rodrigues de. **A Terra e sua forma: uma breve história**. Percurso - NEMO. Maringá, v. 12, n.1, p. 179- 183, 2020.

ARANA, José Milton. **Introdução à Geodésia Física**. Presidente Prudente: Universidade Estadual Paulista, 2009.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS – ABNT. **NBR 14166**: Rede de Referência Cadastral Municipal - Procedimento. Rio de Janeiro: ABNT, 1998.

BRITO, Gilmar Alves. **A geometria do globo terrestre**: uma proposta de trabalho interdisciplinar entre matemática e geografia. 2017. 84 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Piauí. Teresina, 2017.

CLAY MATHEMATICS INSTITUTE - CMI. **Conjectura de Poincaré**. Disponível em: <<http://www.claymath.org/millennium-problems/poincar%C3%A9-conjecture>>. Acesso em: 14 de dez. de 2021.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo: Atlas, 1991.

GIL, Antonio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6 ed. São Paulo: Atlas, 2008.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA - IBGE. **A forma da Terra**. Disponível em: <<https://atlas escolar.ibge.gov.br/conceitos-gerais/o-que-e-cartografia/forma-da-terra.html>>. Acesso em: 16 de jun. de 2021.

KREFTA, S. T. **Aspectos Históricos da Conjectura de Poincaré**. Sinop, 42 p., 2009. Tese (Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura em Matemática) - Universidade do Estado de Mato Grosso (UNEMAT).

LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Marina de Andrade. **Fundamentos de Metodologia Científica**. 5 ed. São Paulo: Atlas, 2003.

MÜLLER, Jonathan Gil; BAIER, Tânia. **Topologia**: Fatos Históricos e Curiosidades. Ponta Grossa, 2014. IV Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia.

JONES, Eric M.. **Apollo 17 Image Library**, 2017. Disponível em: <<https://history.nasa.gov/alsj/a17/images17.html#MagNN/>>. Acesso em: 17 de nov. de 2021.

O'SHEA, Donal. **A solução de Poincaré**. Rio de Janeiro: Editora Record, 2009.

SAMPAIO, João Carlos Vieira. **Uma introdução à topologia geométrica**: passeios de Euler, superfícies, e o teorema das quatro cores. São Carlos: EdUFSCar, 2012.

SILVA, Edna Lúcia da, MENEZES, Estera Muszkat. **Metodologia da pesquisa e elaboração de dissertação**. 4. ed. Florianópolis: UFSC, 2005.

SILVEIRA, F. L. da. **Sobre a forma da Terra**. Física na Escola, v. 15, n. 2, 2017.

TRIGUEIRO, Rodrigo de Menezes. **Metodologia científica**. Londrina: Editora e Distribuidora Educacional S.A, 2014.

TULER, Marcelo; SARAIVA, Sérgio. **Fundamentos de geodésia e cartografia**. Porto Alegre: Bookman, 2016.

USUI, Tetsuo. **O globo terrestre e a esfera celeste**: uma abordagem interdisciplinar de Matemática, Geografia e Astronomia. 2014. 173 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal Rural de Pernambuco. Recife, 2014.

ZANETTI, Maria Aparecida Zehnpfennig. **Geodésia**. Curitiba: 2007.