



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO
TOCANTINS
CAMPUS PALMAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

LETÍCIA FERREIRA DA COSTA

**A GEOMETRIA FRACTAL COMO RECURSO METODOLÓGICO NO ENSINO DA
MATEMÁTICA**

**Palmas
MARÇO/2021**

LETÍCIA FERREIRA DA COSTA

**A GEOMETRIA FRACTAL COMO RECURSO METODOLÓGICO NO ENSINO DA
MATEMÁTICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciado em Matemática do curso de Graduação em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins - IFTO, Campus Palmas/TO.

Orientador: Prof. Dr. Wallysonn Alves de Souza

**Palmas
MARÇO/2021**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Bibliotecas do Instituto Federal do Tocantins

C838g Costa, Leticia Ferreira da
A Geometria Fractal como recurso metodológico no ensino da
Matemática / Leticia Ferreira da Costa. – Palmas, TO, 2021.
62 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) –
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins,
Campus Palmas, Palmas, TO, 2021.

Orientador: Dr. Wallisson Alves de Sousa

1. Geometria Fractal. 2. Ensino da Matemática. 3. Ensino Médio.
I. Sousa, Wallisson Alves de. II. Título.

CDD 510

A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio, deste documento é autorizada para fins
de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

**Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica do IFTO com os dados fornecidos
pelo(a) autor(a).**



Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins
CAMPUS PALMAS
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

**FOLHA DE APROVAÇÃO DE TRABALHO DE CONCLUSÃO
DE CURSO DE GRADUAÇÃO**

1. **TÍTULO: A GEOMETRIA FRACTAL COMO RECURSO METODOLÓGICO NO ENSINO DA MATEMÁTICA**
2. **AUTORA: LETÍCIA FERREIRA DA COSTA**
3. **ORIENTADOR: Prof. Doutor Wallysonn Alves de Souza**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins, *campus* Palmas, como parte das exigências para a conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovado em 11/03/2021.

Prof. Dr. Wallysonn Alves de Souza
IFTO – Campus Palmas
Presidente/Orientador

Prof. Me. Jamerson Montenegro Lima
IFTO – Campus Palmas
Avaliador 1

Prof. Dr. Magno Márcio de Azevedo
IFTO – Campus Palmas
Avaliador 2



Documento assinado eletronicamente por **Wallysonn Alves de Souza, Servidor**, em 15/03/2021, às 19:47, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Jamerson Montenegro Lima, Servidor**, em 16/03/2021, às 09:46, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Magno Marcio de Azevedo, Servidor**, em 16/03/2021, às 14:29, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.iftto.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1239374** e o código CRC **D91AF246**.

Quadra 310 Sul, Lo 5, s/n, esquina com a Avenida NS 10 - Plano Diretor Sul — CEP 77.021-090
Palmas/TO — (63) 3236-4000
portal.iftto.edu.br — reitoria@iftto.edu.br

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha família e amigos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter estado comigo durante toda essa trajetória me dando força, coragem e capacidade para atingir meus objetivos. Sem Ele eu não teria conseguido. Obrigada meu Pai.

À minha mãe pela sua garra, seu incentivo e sua determinação em me proporcionar o melhor. Sempre me guiando por caminhos valorosos e me ensinando sobre lealdade, honestidade e amor.

À toda minha família por acreditarem no meu potencial e por suas contribuições durante esse processo. Em especial agradeço a minha prima Suzane Lesley pelos conselhos e ensinamentos que foram essenciais para o meu desenvolvimento pessoal.

Ao meu professor orientador, Dr. Wallysonn Alves de Souza, pela paciência e direcionamento neste trabalho. Além disso, agradeço pela confiança, motivação e suas valiosas recomendações.

Aos meus professores da Graduação pelo ensino de qualidade e seu comprometimento com a educação.

À minha querida amiga, Azenati Sousa, pela amizade e companheirismo que me permitiram caminhar com muito amor e felicidade durante essa jornada. Obrigada amiga! Palavras são poucas para descrever o quanto eu sou grata por tudo.

Aos meus amigos pelo incentivo no decorrer dos anos na Graduação. Em especial agradeço a Frank Lustosa, José Carlos, Mirene Silva, Janaína Soares, Arthur Batista e Waltercísio por todo o suporte, risadas e momentos que marcaram minha história. Obrigada amigos! Vocês fizeram anos se parecerem dias, de tão gratificante e felizes que foram.

*“A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu
o universo.”*

Galileu Galilei

RESUMO

Este trabalho de conclusão de curso trata-se de uma pesquisa exploratória e qualitativa, realizada com o intuito de investigar como a geometria fractal tem sido abordada dentro da sala de aula e de como esta pode ser viável no processo de ensino e aprendizagem da matemática. O objetivo inicial do presente estudo, teve como foco estudar sobre os fractais, sua história, definições, características e algumas aplicações, sendo verificado que a geometria fractal se dedica ao estudo de objetos cuja característica mais marcante é a auto similaridade. Diante da aplicabilidade desta geometria no ensino, uma busca foi realizada e, ao serem selecionados seis estudos acadêmicos sobre o assunto, foi possível concluir o quanto a inserção dos fractais para ensinar matemática torna-se viável por estimular a aprendizagem dos alunos e tornar as aulas mais dinâmicas e criativas. Para fins de contribuir para o ensino de progressões geométricas, áreas, perímetro e dimensão no ensino médio utilizando a geometria fractal como recurso motivador, é proposto, ao final, uma sequência didática, já que, das análises realizadas, os resultados dos trabalhos que utilizaram os fractais como recurso motivador foram satisfatórios. Portanto, é um projeto relevante e que pode contribuir para docentes da área que buscam novas metodologias em suas aulas.

Palavras chaves: Geometria fractal; Ensino da matemática; Ensino médio.

Abstract

This course conclusion work is an exploratory and qualitative research, carried out in order to investigate how fractal geometry has been approached within the classroom and how it can be viable in the process of teaching and learning mathematics. The initial objective of this study was to explore fractals, their history, definitions, characteristics and some applications, and it was verified that fractal geometry is dedicated to the study of objects whose most striking characteristic is self-similarity. In view of the applicability of this geometry in teaching, a search was carried out and, by selecting six academic studies on the subject, it was possible to conclude how much the insertion of fractals to teach mathematics becomes viable by stimulating students' learning and making classes more dynamic and creative. In order to contribute and facilitate the teaching of geometric progressions, areas, perimeter and dimension in high school using fractal geometry as a motivating resource, at the end, a didactic sequence is proposed, since from the analyzes carried out, the results of the works that used the fractals as a motivating resource were satisfactory. Therefore, it is a relevant project that can contribute to professors in the field who seek new methodologies in their classes.

Key-words: Fractal Geometry; Math Teaching; High School.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Benoit Mandelbrot (1924-2010).....	15
Figura 2: Auto similaridade na planta renda portuguesa	18
Figura 3: Representação fractal: nuvens.....	19
Figura 4: Representação Fractal: árvores	20
Figura 5: Representação fractal: Rios e afluentes.....	20
Figura 6: Representação fractal: raios.....	21
Figura 7: Conjunto de Julia	21
Figura 8: Conjunto de Mandelbrot	22
Figura 9: Formas Euclidianas	22
Figura 10: Comparando duas dimensões.....	23
Figura 11: segmento de reta, quadrado e cubo.....	24
Figura 12: Ramificações do pulmão.....	27
Figura 13: Exemplo de paisagem fractal.....	28
Figura 14: Georg Cantor (1845-1918).....	29
Figura 15: Conjunto de Cantor.....	30
Figura 16: Waclaw Sierpiński (1882-1969)	31
Figura 17: Triângulo de Sierpinski	32
Figura 18: Tapete de Sierpinski.....	33
Figura 19: Helge Von Koch (1870-1924).....	34
Figura 20: Curva De koch.....	35
Figura 21: Fractal construído pelos alunos	39
Figura 22: Apresentação dos cartões fractais	40
Figura 23: Construção fractal da árvore bifurcada	42
Figura 24: Passos para a atividade 1	49
Figura 25: Triângulo de Sierpinski	53

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Número de peças das figuras.....	24
Quadro 2: Número de peças e a dimensão	25
Quadro 3: Informações da sequência didática	47
Quadro 4: Iterações do Conjunto de Cantor	50
Quadro 5: Iterações do Triângulo de Sierpinski	51
Quadro 6: Iterações da Curva de Koch	51

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	13
2 A GEOMETRIA DA NATUREZA	16
2.1 Aspectos históricos da Geometria Fractal	16
2.2 Benoit Mandelbrot (1924-2010)	18
3 O QUE SÃO FRACTAIS ?	20
3.1 Definição e Características	20
3.2 Algumas aplicações fractais	29
3.3 Fractais Clássicos	31
3.3.1 Conjunto de Cantor	32
3.3.2 Triângulo de Sierpinski	34
3.3.3 Curva de Koch	37
4 METODOLOGIA DA PESQUISA	39
5 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	41
5.1 A Geometria Fractal e suas práticas no ensino da matemática	41
5.2 Viabilidade da Geometria Fractal em sala de aula	46
6 PROPOSTA PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA COM FRACTAIS	49
6.1 Sequência didática para o ensino de P.G e tópicos de geometria	49
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS	58
REFERÊNCIAS	60

1 INTRODUÇÃO

A Geometria Fractal estuda os fractais, que são objetos ou figuras que apresentam a característica de auto similaridade em sua estrutura, ou seja, tomando ou observando uma pequena parte de tal figura, esta será similar ao todo. O estudo desta geometria foi desenvolvida e difundida pelo mundo através do matemático Benoit Mandelbrot, que por volta de 1975 estudou os chamados “monstros matemáticos”, no qual mais tarde foram classificados como fractais clássicos.

Enquanto na geometria de Euclides tem-se as formas planas e espaciais, sendo estas, triângulos, quadrados, cubos, losango e outros, é possível identificar árvores, folhas, plantas, nuvens, galáxias, rios e afluentes, como objetos naturais que apresentam em sua estrutura características fractais. Sendo portanto, a geometria fractal considerada como a geometria da natureza. Além da beleza estética e fascinante dessas figuras, suas diversas aplicações acabam por validar o quanto essa geometria veio para facilitar e inovar em diversos ramos de estudo da Ciência e Tecnologia.

Diante disso, com o intuito de estudar como a geometria fractal pode ser trabalhada nas aulas de Matemática e o quanto esta pode ser viável, foram realizadas pesquisas para esta finalidade, já que, não é de hoje, a informação do quanto, grande parte dos alunos possuem dificuldades nesta disciplina. Pacheco e Andreis argumentam que,

As dificuldades de aprendizagem na Matemática podem acarretar baixos rendimentos e geram preocupações entre os envolvidos. O insucesso de muitos estudantes é um fator que os leva, cada vez mais, a terem certa aversão a essa disciplina, desenvolvendo dificuldades ainda maiores com o passar dos anos escolares (PACHECO, ANDREIS, 2017, p. 106).

Com isso, os professores de matemática precisam sempre buscar novas metodologias e novas abordagens para permitir ao aluno uma aprendizagem significativa e que transcenda os muros da escola. E um dos motivos por que este tema de pesquisa pode contribuir para os docentes, está no fato de se tratar de um conteúdo que pode despertar no aluno a criatividade e o gosto por aprender. Os professores poderão, através dessa pesquisa exploratória salientar aos discentes

como a matemática se faz presente na natureza e no mundo de forma bela apesar de sua complexidade. Poderão fazê-los enxergar o mundo com outros olhos.

Segundo Silva (2015) o tema fractal é de fácil contextualização e bastante flexível dentro da sala de aula, e permite ainda uma abordagem mais suave dos conteúdos. Sendo assim, o estudo dos fractais pode ser de extrema relevância no ensino, já que, trata-se de um tema pouco explorado em sala de aula, mas que, entretanto, possui diversas aplicações e pode ser trabalhado com vários conteúdos.

Em seu trabalho, Suleiman (2019) apresenta algumas possibilidades pedagógicas para trabalhar com fractais na educação básica. O autor argumenta que, a partir do momento que se utiliza a geometria fractal como possibilidade de um ensino contextualizado, moderno e tecnológico, estamos valorizando um conhecimento que ainda não está previsto nos currículos escolares e nem na formação dos futuros docentes.

De acordo com este autor, além das diversas aplicações científicas e tecnológicas da geometria fractal, está presente nestes objetos abstratos uma beleza estética que pode ser vista no cotidiano dos alunos, como por exemplo, na arte, na música, na pintura, na arquitetura e principalmente na natureza. Dessa forma, os fractais podem ser importantes aliados dos professores dentro da sala de aula, visto que, estes estão fortemente presentes no dia a dia dos estudantes e podem ser usados para contextualizar uma série de conteúdos, além de permitir aulas mais elaboradas e inovadoras.

Sabendo destas informações iniciais, buscas foram realizadas com o propósito de responder o questionamento que norteou esse trabalho, **a geometria fractal pode ser utilizada como motivadora no ensino de matemática no ensino médio?**. A partir daí, os objetivos abaixo foram estabelecidos,

- Contribuir para o ensino e aprendizagem de progressões geométricas, dimensão, perímetros e áreas, no ensino médio, utilizando a Geometria Fractal como recurso motivador;
- Estudar e conceituar os fractais clássicos;
- Estudar sobre as práticas da geometria fractal em sala de aula;
- Analisar a viabilidade de utilizar a geometria fractal como estratégia motivadora no ensino de Matemática;

- Propor uma metodologia de ensino, utilizando a geometria fractal, para motivar o ensino de Progressões Geométricas, perímetro, áreas e dimensão fractal.

Assim, o trabalho foi dividido da seguinte forma:

No primeiro capítulo é feito um relato sucinto sobre a história da geometria fractal, desde o momento dos conhecidos “monstros matemáticos” até a consolidação do termo fractal. Além disso, a biografia do principal precursor dessa geometria é valorizada.

Já no segundo capítulo, algumas definições fractais são apontadas, bem como as suas três características, a auto similaridade, a complexidade infinita e a dimensão, são contextualizadas. Ficando evidente algumas de suas aplicações e a caracterização de quatro fractais clássicos, o Conjunto de Cantor, o Triângulo e o Tapete de Sierpinski, e a Curva de Koch, fractais estes, que serão utilizados na realização da proposta de sequência didática ao final.

O terceiro capítulo é utilizado para a apresentação da metodologia da pesquisa e detalhamento dos trabalhos selecionados e analisados no capítulo seguinte. Como mencionado, no quarto capítulo é feito um breve resumo dos trabalhos escolhidos e em seguida, algumas reflexões são denotadas com o intuito de verificar a viabilidade da geometria fractal como recurso metodológico no ensino da matemática.

No quinto capítulo, após as análises sobre as práticas da geometria fractal em sala de aula, é proposto a metodologia de sequência didática para o ensino de progressões geométricas, perímetro, área e dimensão fractal para docentes da área aplicarem como uma sequência de atividades sobre os tópicos. Por fim, as considerações finais são enfatizadas para concluir todo o presente estudo.

2 A GEOMETRIA DA NATUREZA

2.1 Aspectos históricos da Geometria Fractal

A história da geometria fractal não começou juntamente com a história da geometria clássica. Essa geometria clássica se dedica ao estudo de medidas e formas planas ou espaciais. Foi constituída uma ciência na Grécia Antiga, tendo como seus precursores Arquimedes, Descartes, Tales de Mileto, Euclides, entre outros geômetras. Graças a estes estudiosos, hoje em dia temos acesso a um vasto estudo sobre a geometria.

O estudo da geometria é um dos conteúdos mais marcantes presente nos currículos escolares, pois é um assunto fortemente ligado à realidade. Ao nosso redor é possível identificar várias figuras geométricas planas ou espaciais nos prédios, praças, shoppings, escolas, carros, casas, enfim, em uma infinidade de objetos. Cruz (2010), explica que a geometria fractal surgiu com a necessidade que se tinha de descrever fenômenos naturais e objetos que não possuíam uma forma e dimensão como as definidas pela geometria de Euclides.

Sobre o mesmo ponto de vista, Sonza e Leivas (2018, p.1550) apresentam que, “o mundo não se resume a pontos, retas, planos e algumas formas tridimensionais e regulares”. Nuvens, montanhas, litorais, árvores, folhas, casca de árvores, rochas, plantas, entre outros, são objetos que não possuíam uma explicação a partir da geometria que foi se consolidando ao longo dos anos. Barbosa (2005) argumenta que empregar formas usadas na geometria euclidiana, como círculos, cones, triângulos etc., nesses objetos naturais seria extremamente inadequado.

No final do século XIX e início do século XX, matemáticos como George Cantor, Gaston Julia, Helge Von Koch, Pierre Fatou, Waclaw Sierpinski, Giuseppe Peano, entre outros, criaram objetos que mais tarde foram chamados de “monstros matemáticos”, pois ainda não eram conhecida as suas aplicações de forma que estas desafiavam os estudos matemáticos já existentes.

Esses “monstros matemáticos” receberam o nome de *Fractal* pelo matemático Benoit Mandelbrot, por volta de 1975. Segundo Zanotto (2015), a partir dos anos 50, quando Benoit Mandelbrot trabalhava na IBM (Centro de Pesquisa Thomas Watson), conseguiu resolver um problema de ruídos nas linhas telefônicas entre

computadores utilizando um trabalho realizado por George Cantor (Conjunto de Cantor), mostrando que os ruídos se comportavam como uma parte desses conjuntos.

A partir deste momento, Mandelbrot conseguiu aplicar esses objetos desconhecidos e fora do padrão da geometria, em outros trabalhos. Passou então a estudar esses objetos mais a fundo e descobriu que existia uma ordem na desordem, desenvolvendo deste modo, a geometria fractal, que se refere ao estudo desses “monstros matemáticos” no qual, de acordo com Barbosa (2005, p.12), essa geometria “reflete uma natureza de irregularidades, de reentrâncias, saliências e depressões, de fragmentação”. Então, a geometria fractal passou a explicar e fornecer aproximações para as formas da natureza em geral.

Vale ressaltar, ainda que de maneira concisa, que a geometria fractal está ligada à ciência do CAOS. Os fragmentos fascinantes e complexos dessa geometria produzem uma ordem ao Caos. A ciência do CAOS nasceu e se desenvolveu nessas quatro ou cinco décadas. Com essa chegada, passou-se a ver *ordem e padrões*, onde só se via algo irregular, aleatório e por vezes caótico. (BARBOSA, 2005).

Barbosa, afirma ainda que

temas como desordem na atmosfera, turbulência nos fluidos, variação populacional de espécies, oscilações do coração e cérebro, interligações microscópicas de vasos sanguíneos, ramificações alveolares, cotações da bolsa, forma das nuvens, relâmpagos, aglomerações estelares etc. eram estudados buscando-se então ligações entre diferentes tipos de irregularidades; e surpreendentes ordens no caos foram descobertas. (BARBOSA, 2005, p.10)

Antes de aprofundar-se no estudo da definição fractal e suas principais características, conheceremos agora um pouco da história de Mandelbrot, este matemático que foi imensamente importante para o desenvolvimento da geometria fractal.

2.2 Benoit Mandelbrot (1924-2010)

Figura 1: Benoit Mandelbrot (1924-2010)



Fonte: (O'CONNOR; ROBERTSON, 1999)

Benoit Mandelbrot nasceu em Varsóvia, capital da Polônia em 1924, no dia 20 de novembro. Sua família de origem da Lituânia era judaica e estes viveram no período da Segunda Guerra Mundial. Em 1936, quando Benoit tinha 12 anos, Adolf Hitler começou a ameaçar a Europa, e por isso sua família se mudou para Paris, local onde seu tio Szolem Mandelbrot era professor de matemática em uma Universidade. Mandelbrot cresceu ouvindo sobre matemática e foi fortemente influenciado pela mesma, tornando-se bastante interessado, principalmente pela geometria.

Com a ocupação alemã na França por volta de 1940, a família de Mandelbrot mudava-se constantemente de moradia, e por conta disso, sua escolaridade não estava dentro dos parâmetros normais. Anos depois, em 1944 quando a França foi libertada, Benoit Mandelbrot realizou alguns exames de admissão para estudar na Escola Normal ou na Escola Politécnica. Mesmo com seu despreparo foi aprovado nas duas instituições, sendo estas de grande prestígio. Começou pela Escola Normal e depois passou para a Politécnica.

O tio de Benoit, Szolem apoiava um movimento matemático do grupo Bourbaki, que buscava a reconstrução da matemática na França. Visavam uma

matemática pura, rigorosa e formal. Com todas as imposições e ideias do grupo Bourbaki, Mandelbrot não os seguiu.

Em 1948, foi estudar nos Estados Unidos Ciência Aeroespacial e, mais tarde conseguiu um trabalho na IBM, onde passou a trabalhar com problemas de economia. Foi então neste período que Benoit Mandelbrot estudou os “monstros matemáticos”, e difundiu esses estudos, nomeando-os de fractais. Sendo a geometria fractal o estudo dos fractais.

Benoit Mandelbrot ocupou vários cargos acadêmicos, desde professor em Harvard a professor de Fisiologia na Faculdade de Einstein de Medicina. Obteve honras, publicou uma série de trabalhos. Sua obra mais famosa foi publicada em 1977 em Nova Iorque, intitulada: *The Fractal Geometry of Nature*. O matemático morreu em Cambridge, nos Estados Unidos, no dia 14 de outubro de 2010.

3 O QUE SÃO FRACTAIS ?

Neste capítulo será apresentado algumas definições a respeito dos fractais e suas principais características, sendo estas, a auto similaridade, complexidade infinita e a dimensão. Em seguida é indicado algumas aplicações desta geometria e para terminar, são expostos alguns fractais clássicos.

3.1 Definição e Características

É importante, antes de tudo, caracterizar a palavra fractal. Barbosa (2005, p. 9) aborda que “Mandelbrot denominou fractais, baseando-se no latim, do adjetivo *fractus*, cujo verbo *frangere* correspondente significa quebrar, criar fragmentos irregulares, fragmentar”.

Em seu trabalho sobre a geometria fractal para a sala de aula, Barbosa (2005, p.18,19), apresenta alguns fatos referentes à definição de fractal. O autor pontua inicialmente que Mandelbrot utilizou o conceito de dimensão para definir fractal:

- *um fractal é, por definição, um conjunto para o qual a dimensão Hausdorff-Besicovitch excede estritamente a dimensão topológica.*

Essa definição inicial não agradou e recebeu algumas críticas, até mesmo o próprio Mandelbrot não ficou satisfeito. De acordo com J. Feder (1998, apud BARBOSA, 2005, p.18), os fractais podem ser considerados da seguinte maneira:

- *um fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos.*

O último aspecto indicado por K. J. Falconer (1985 e 1990, apud BARBOSA, 2005, p. 18), que recomendou o entendimento de fractal pelas três caracterizações a seguir,

Um conjunto F é fractal se, por exemplo:

- *F possui alguma forma de "auto similaridade" ainda que aproximada ou estatística;*
- *A dimensão fractal, definida de alguma forma, é maior que a sua dimensão topológica;*

- O conjunto F pode ser expresso através de um procedimento recursivo ou iterativo.

Por fim, Barbosa (2005) expõe que os conceitos expressos têm muito a desejar. Contudo, de maneira mais prática, basta considerar a auto similaridade. A auto similaridade ou auto semelhança é uma das propriedades mais marcantes que caracterizam um fractal. De maneira mais sucinta, teremos uma figura auto similar se, ao considerarmos uma pequena parte desta, esta será semelhante a figura completa, como está representado na Figura 2. Observe que inicialmente temos um ramo de uma planta renda portuguesa e, à medida que tiramos um pedaço pequeno, obtemos o ramo inicial em uma escala cada vez menor, sendo esta, uma auto similaridade finita.

Figura 2: Auto similaridade na planta renda portuguesa



Fonte: (FILHO, 2015, p. 50)

Ainda no que diz respeito a esta característica, Nunes (2006) nos apresenta dois tipos de auto similaridade. A auto similaridade exata diz respeito a figuras criadas a partir de processos matemáticos, no qual o conjunto total do objeto no decorrer das iterações formam réplicas perfeitas da própria figura “finalizada”. Como exemplo de objetos que apresentam tal fato, podemos ter o Triângulo de Sierpinski,

Curva de Koch, curva de Peano, entre outros fractais clássicos que serão estudados nas seções seguintes.

Ao se tratar da característica de auto similaridade aproximada, Nunes (2006) destaca que na natureza podemos observar formas fractais com estruturas auto similares, no qual, apesar de não podermos ampliarmos e visualizarmos essas figuras em diferentes escalas, estas devem ser discutidas a partir da geometria fractal. Há ainda quem considere a geometria fractal como geometria da natureza.

O autor Nunes (2006), enfatiza ainda, que muitas formas naturais encaixam-se na auto similaridade aproximada devido ao fato de que partes destas figuras possuem a mesma estrutura que o objeto natural possui em sua plenitude. Como por exemplo representado na Figura 2, anteriormente citada.

Nos estudos realizados por Fernandes (2007) e Filho (2015), são apresentadas a geometria fractal na natureza. Também conhecidos como fractais aleatórios ou fractais naturais. Estes estão por toda a parte no meio natural. Árvores, plantas, nuvens, rios e seus afluentes, montanhas, galáxias e outros apresentam características de auto semelhança com uma estrutura e tamanho limitado. Tais objetos naturais apresentam-se de formas irregulares, retorcidas e ásperas, porém com um padrão em sua estrutura orgânica. Nas figuras 3, 4, 5, 6 observa-se alguns fractais naturais que estão diariamente ao nosso redor.

Figura 3: Representação fractal: nuvens



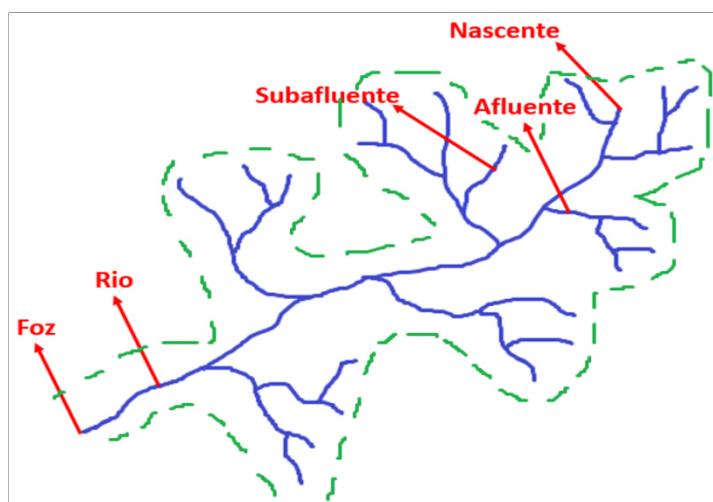
Fonte: Acervo do autor

Figura 4: Representação Fractal: árvores



Fonte: Acervo do autor

Figura 5: Representação fractal: Rios e afluentes



Fonte: (RIOS DE CONHECIMENTO, 2014)

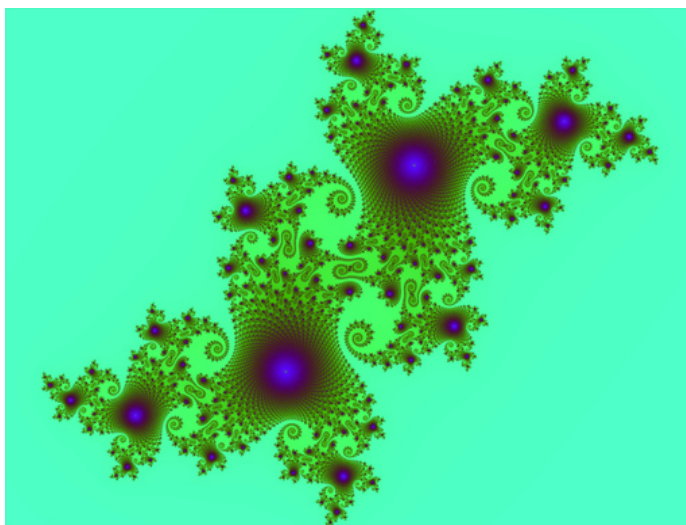
Figura 6: Representação fractal: raios



Fonte: (ROSAL, 2020)

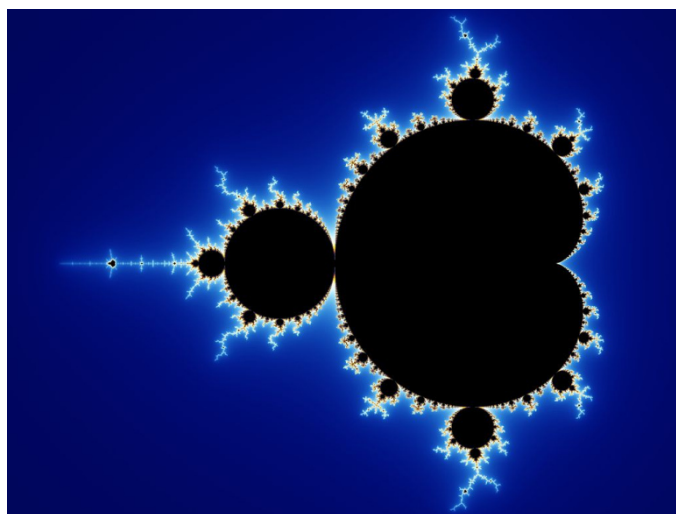
Outra característica fortemente presente nos fractais é a complexidade infinita. Nunes (2006, p.31) aponta que o nome complexidade infinita se dá porque “os fractais são formados por um processo recursivo aplicado indefinidamente. Quanto maior for o número de iterações deste processo, mais detalhes serão apresentados.” Vale salientar, que o processo de iteração é o ato de repetir um procedimento várias vezes. Nas figuras 7 e 8, podemos observar essa complexidade infinita nestes fractais gerados por computador.

Figura 7: Conjunto de Julia



Fonte: (WIKIWAND, 2018)

Figura 8:Conjunto de Mandelbrot

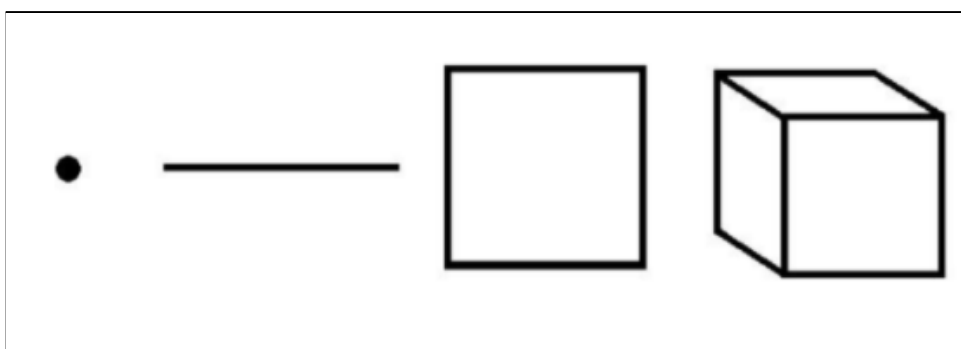


Fonte: (WIKIWAND, 2018)

Por fim, a última propriedade fractal a ser contextualizada é a dimensão. O mundo como conhecemos é representado em grande parte pelas dimensões estabelecidas por Euclides, conforme a Figura 9. Podemos ter:

- ponto, como representação da dimensão zero (0);
- uma reta, com dimensão um (1), já que não possui largura e nem altura, no entanto seu comprimento é infinito;
- um plano, com dimensão (2), pois possui comprimento e altura;
- espaço com dimensão três (3), tendo comprimento, largura e altura.

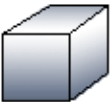
Figura 9:: Formas Euclidianas



Fonte: (SILVA, SOUZA, 2010)

No entanto, como temos estudado até aqui, as formas naturais não se resumem a pontos, retas, planos e espaços tridimensionais. Tais objetos do meio natural são estruturas fractais cheio de irregularidades, no qual sua dimensão não pode ser medida da mesma forma apresentada pela geometria de Euclides. Observe a figura 10 abaixo e se atente para este fato.

Figura 10: Comparando duas dimensões

Dimensão Euclidiana		Dimensão Fractal	
.	(ponto) 0	-----	0.4
—	1	~~~~~	1.4
	2		1.8
	3		2.6

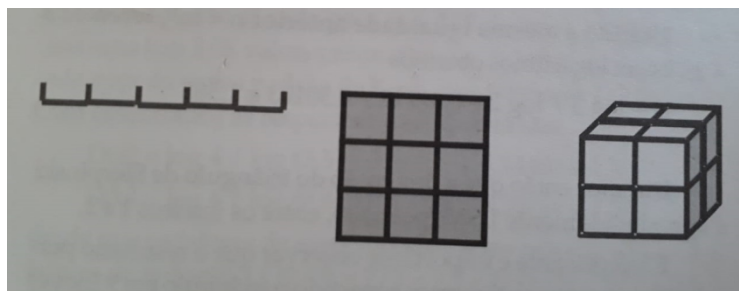
Fonte: (SIQUEIRA, 2005)

Barbosa (2005, p. 66), discorre que a dimensão dos fractais “ não é dada por um número inteiro, mas é uma fração, é um novo tipo de dimensão, que diríamos mais associada a aspereza, espessura, densidade, textura, etc.” Logo, a dimensão fractal mede o grau de irregularidade ou fragmentação do objeto.

A abordagem do cálculo da dimensão fractal será feito a partir de Barbosa (2005). Inicialmente o autor nos induz a pensar de maneira prática e intuitiva, para depois chegar-se à fórmula usualmente utilizada nos casos em que se deseja saber a dimensão de objetos irregulares e fora do padrão da geometria Euclidiana. Lembrando que, “este conceito de dimensão apenas pode ser considerado na análise de objetos que têm auto semelhança exata.” (NUNES, 2006, p. 43)

Observe a figura 11, e se atente que o segmento de reta, quadrado e o cubo, possuem respectivamente 1, 2 e 3 dimensões. Estes objetos foram repartidos de forma que fosse possível considerar a auto similaridade.

Figura 11: segmento de reta, quadrado e cubo



Fonte: (BARBOSA, 2005, p. 67)

No segmento de reta foram feitas divisões formando cinco peças, o quadrado foi dividido formando nove peças quadrangulares, repartindo o lado em 3 partes, por fim, com as divisões feitas no cubo, formou-se oito peças cúbicas, sendo que cada aresta foi dividida em duas. Em resumo, veja o quadro 1 a seguir.

Quadro 1: Número de peças das figuras

Figura	dimensão	quantidade de peças
segmento de reta	1	5
quadrado	2	9
cubo	3	8

Fonte: Autora

Observe na figura 11, que cada pequena peça é auto similar ao todo. Para que cada peça fique igual ao todo devemos utilizar o fator de aumento para ampliá-la e esta voltar ao tamanho original. Logo, para o segmento de reta, quadrado e cubo, será de 5, 3 e 2 respectivamente, como fator de aumento para cada um dos lados. Para cada figura, podemos escrever a quantidade de peças como uma potência tendo o fator de aumento como base, e o expoente sendo a dimensão. Observe o quadro 2.

Quadro 2: Número de peças e a dimensão

Figura	Dimensão	Quantidade de peças
segmento de reta	1	5^1
quadrado	2	3^2
cubo	3	2^3

Fonte: Autora

De modo geral, o número de peças será dado por:

$$n = m^D$$

Sendo,

- n o número de peças,
- m o fator de aumento,
- D a dimensão.

Isolando o D e utilizando a propriedade de logaritmo $\log_a b^k = k \cdot \log_a b$, teremos a seguinte fórmula:

$$\begin{aligned} \log n &= \log m^D \\ \log n &= D \cdot \log m \\ D &= \frac{\log n}{\log m} \end{aligned}$$

Portanto, o cálculo da dimensão será dado pela razão do logaritmo do número de peças pelo logaritmo do fator de aumento. Lembrando que o fator de aumento é dado pelo inverso do fator de redução. Este fator de redução pode ser encontrado ao considerar um segmento de reta, e ao dividi-lo em r partes, esse fator de redução será igual a $\frac{1}{r}$.

Sendo agora fácil observar que, o fator de aumento do segmento de reta é igual a 5, levando em conta que o fator de redução é $\frac{1}{5}$, e ao considerar um dos lados do quadrado que está dividido em 3 partes, o fator de redução será $\frac{1}{3}$.

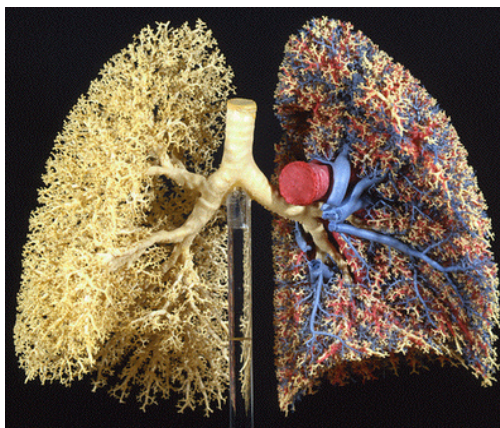
Na subseção 2.3, será feito o cálculo da dimensão do Conjunto de Cantor, Triângulo de Sierpinski e da Curva de Koch. É importante ressaltar, que esse estudo sobre o cálculo da dimensão de fractais não desvaloriza o estudo da dimensão da geometria de Euclides já conhecidos. Este é apenas um novo método para sabermos quão irregular e áspero é um objeto fractal. É importante frisar de igual modo, que existem outros métodos para o cálculo da dimensão de objetos fractais, entretanto, para o presente estudo, apenas este anteriormente descrito foi caracterizado estrategicamente, pensando nas atividades da sequência didática do sexto capítulo e também para nível de informação ao leitor.

3.2 Algumas aplicações fractais

A Geometria Fractal possui diversas aplicações na área das Ciências e Tecnologias, sendo portanto, indiscutível o quanto o surgimento dessa geometria veio para facilitar outras áreas de estudos. Cortês e Antunes (2014) destacam uma série de aplicações e a presença de fractais em alguns ramos, como por exemplo,

- ❖ Economia: fractais são usados no estudo da variação de preços nas ações da bolsa de valores;
- ❖ Astronomia: fractais utilizados para fazer a previsão de trajetórias que os planetas podem realizar;
- ❖ Minerologia: fractais utilizados para medir densidade de minerais e evolução dos terrenos;
- ❖ Geografia: fractais utilizados para medição da costa dos continentes;
- ❖ Ciências médicas e biológicas: fractais são usados como modeladores de algumas estruturas, como ramificações pulmonares (Figura 12), veias e artérias, entre outras.

Figura 12: Ramificações do pulmão



Fonte: (COLÉGIO WEB, 2013)

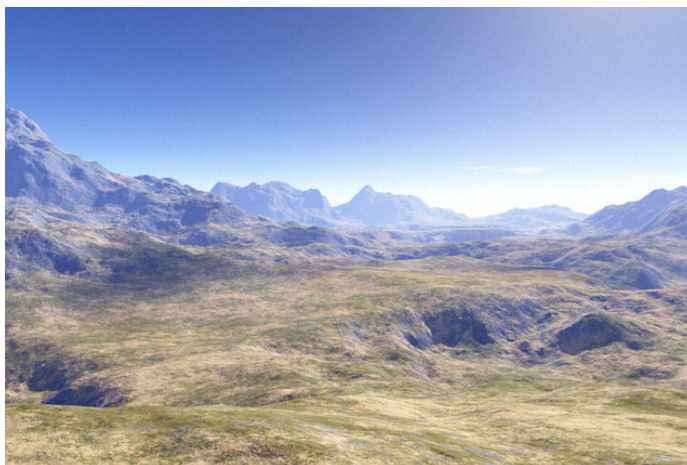
Rabay (2013), enfatiza que na agricultura, para fazer análise de solos, nebulosidade da área, movimento dos rios e estrutura de vários cristais, os fractais atuam como modeladores. A autora ressalta ainda, que estes fractais modeladores podem ser usados para fazer o diagnóstico precoce de alguns tipos de câncer e do Mal de Alzheimer através da análise de imagens.

Sobre o mesmo ponto de vista, Silva (2015) apresenta que a geometria fractal também está presente na ecologia, onde a dimensão fractal pode ser encontrada em sistemas fluviais de rios. E ainda expõe que o coração humano apresenta um fato um tanto interessante, onde o batimento cardíaco saudável não é regular e sim desordenado, e apresenta em sua representação gráfica a característica de auto semelhança em inúmeras escalas de tempo.

É importante expor de maneira resumida, uma das maiores contribuições da geometria fractal para a tecnologia. A criação de cenários naturais e paisagens, como montanhas, rios, plantas e outros foram aprimoradas com auxílio de fractais na computação gráfica. (CORTÊS; ANTUNES, 2014).

Similarmente, Barbosa (2005), reforça que os fractais revolucionaram e modernizaram a reprodução e geração de imagens. Na figura 13, temos um exemplo de uma paisagem natural gerada através de algoritmos de computador.

Figura 13: Exemplo de paisagem fractal



Fonte: (WIKIWAND, 2014)

Por fim, apesar das inúmeras aplicações da geometria fractal diante das poucas apresentadas, vale evidenciar que os fractais estão fortemente presentes nas artes, na música e na arquitetura. A beleza fascinante desses objetos têm chamado cada vez mais a atenção de artistas. Esse senso estético vem sendo utilizado também em aplicações dentro da sala de aula, pela busca por novas metodologias, educadores têm visto como alternativa a utilização destes objetos para dinamizar e suavizar aulas de matemática, já que, os fractais podem ser trabalhados com vários conteúdos e está intimamente ligado ao cotidiano dos alunos.

3.3 Fractais Clássicos

Foi apresentado no capítulo anterior, alguns importantes momentos da história da geometria fractal, dentre eles, como algumas figuras geométricas foram consideradas “monstros matemáticos” por estarem desvinculadas da geometria Euclidiana. Tais “monstros” eram figuras geométricas que inicialmente apresentavam uma desordem, entretanto, mais tarde foram chamados de fractais, atualmente classificados como fractais clássicos por terem sido os precursores desta geometria e por apresentarem as propriedades fractais com exatidão.

Serão caracterizados a seguir, apenas alguns desses objetos fractais. Selecionamos o Conjunto de Cantor, Triângulo e Tapete de Sierpinski e a Curva de Koch.

3.3.1 Conjunto de Cantor

Figura 14: Georg Cantor (1845-1918)



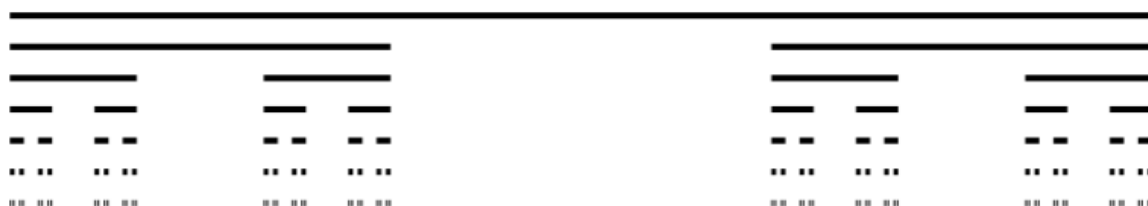
Fonte: (O'CONNOR; ROBERTSON, 1998)

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918), foi o criador do Conjunto de Cantor. Esse matemático, filho de Georg Waldemar Cantor, um comerciante dinamarquês e de uma musicista russa, Maria Anna Bohmque, nasceu em St. Petersburg, Rússia, foi o primeiro a estudar, no final do século XIX, a Teoria dos Conjuntos. Seus estudos a respeito da fundamentação matemática começaram quando Cantor atuou como docente na Universidade de Hale. Devido a suas pesquisas, Cantor foi considerado o fundador dessa teoria. Em 1883, George Cantor publicou o Conjunto de Cantor. Vale ressaltar, que este fractal é criado pelo método de remoção, que baseia-se em remover algumas partes da figura para gerar o fractal. Observe como ocorre a construção desse fractal clássico abaixo.

Construção

1. Considere um segmento de reta;
2. Faça a divisão desse segmento em três partes iguais e em seguida elimine a parte central;
3. Repita o passo 2 em cada um dos segmentos restantes, e assim, sucessivamente.

Figura 15: Conjunto de Cantor



Fonte: (SILVA, SOUZA, 2010, p. 6)

Na subseção 2.1, na parte que trata da dimensão fractal, foi realizado um estudo sobre como calcular a dimensão de alguns objetos fractais que apresentam a característica de auto similaridade exata, sendo essa dimensão relacionada ao grau de irregularidade das formas. Como o Conjunto de Cantor apresenta essa característica, é relevante apontar a sua dimensão fractal.

Conforme Zanotto (2015), analisando o Conjunto de Cantor percebe-se que em cada iteração o segmento é dividido em 3 partes, e depois é feita a retirada a parte central, como a cada nova iteração, dois novos segmentos são obtidos de cada segmento da iteração anterior, então o número de peças será igual a 2 ($n = 2$). E levando em conta que o fator de redução é igual a $\frac{1}{3}$ ($r = \frac{1}{3}$), então o fator de aumento será igual a 3 ($m = 3$). Agora, aplicando na fórmula esses valores obtemos a dimensão fractal do Conjunto de Cantor, que está entre a dimensão zero e a dimensão 1.

$$D = \frac{\log n}{\log m}$$

$$D = \frac{\log 2}{\log 3}$$

$$D \approx 0,63092$$

3.3.2 Triângulo de Sierpinski

Figura 16: Wacław Sierpiński (1882-1969)



Fonte: (O'CONNOR; ROBERTSON, 1997)

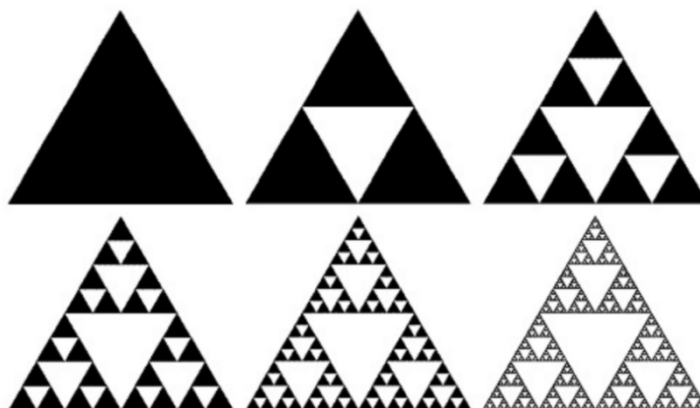
Wacław Sierpinski (1882-1969), foi um matemático polonês nascido em Varsóvia. Estudou na Universidade de Varsóvia e depois de formado atuou como professor de física e matemática em uma escola para meninas, além de lecionar em Lvov e Wariaw. Sierpinski teve uma grande reputação, principalmente nas décadas de 1920 e 1930.

Ao longo de sua trajetória, publicou uma série de trabalhos, sendo grande parte destes, relacionados a teoria dos números e teoria dos conjuntos. Contribuiu de forma significativa para a matemática, dentre estas contribuições, têm-se seus estudos sobre a geometria fractal com as curvas de Sierpinski e o Triângulo de Sierpinski, este último, caracterizado a seguir (Figura 17). Ele é criado pelo método de remoção, assim como o Conjunto de Cantor.

Construção

1. Considere inicialmente um triângulo equilátero;
2. Marque os pontos médios de cada lado desse triângulo, e em seguida ligue esses pontos formando um novo triângulo equilátero no centro do triângulo inicialmente considerado no passo 1;
3. Remova esse triângulo central;
4. Repita os passos 2 e 3 nos triângulos que não foram eliminados
5. Para continuar as iterações, basta repetir o passo 4 sucessivamente.

Figura 17: Triângulo de Sierpinski



Fonte: (ZANOTTO, 2015, p. 33)

Em relação a dimensão desse fractal, basta aplicarmos a fórmula dada anteriormente para medir seu grau de irregularidade. Sabendo que a cada iteração, tem-se em cada triângulo 3 novos triângulos, então o número de peças será igual a 3 ($n = 3$). Observando cada lado do triângulo, percebe-se que estes possuem o lado como metade do anterior, logo o fator de redução será igual a $r = \frac{1}{2}$, diante disso, o fator de aumento será $m = 2$. Portanto,

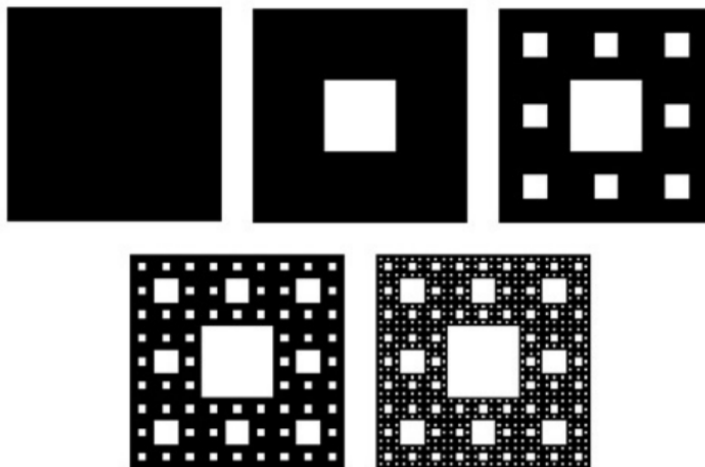
$$D = \frac{\log n}{\log m}$$

$$D = \frac{\log 3}{\log 2}$$

$$D \simeq 1,58496$$

Waclaw Sierpinski (1882-1969), também desenvolveu o Tapete de Sierpinski, um fractal clássico que consiste em tomar um quadrado e dividi-lo em outros nove quadrados congruentes, e em seguida eliminar o quadrado central. Para continuar a iteração basta fazer o mesmo procedimento para os oito quadrados que restaram e assim sucessivamente. Observe, na figura 18, este fractal.

Figura 18: Tapete de Sierpinski



Fonte: (ZANOTTO, 2015, p.50, p. 34)

Sua dimensão será dada, sabendo que o número de peças é 8 ($n = 8$), pois a cada iteração tem-se oito novos quadrados. E o fator de aumento será $m = 3$, já que cada um desses quadrados vai possuir lados sendo a terça parte do anterior, sendo o fator de redução igual a $r = \frac{1}{3}$ (ZANOTTO, 2015). Logo,

$$D = \frac{\log n}{\log m}$$

$$D = \frac{\log 8}{\log 3}$$

$$D \simeq 1,8928$$

3.3.3 Curva de Koch

Figura 19: Helge Von Koch (1870-1924)



Fonte: (O'CONNOR; ROBERTSON, 2000)

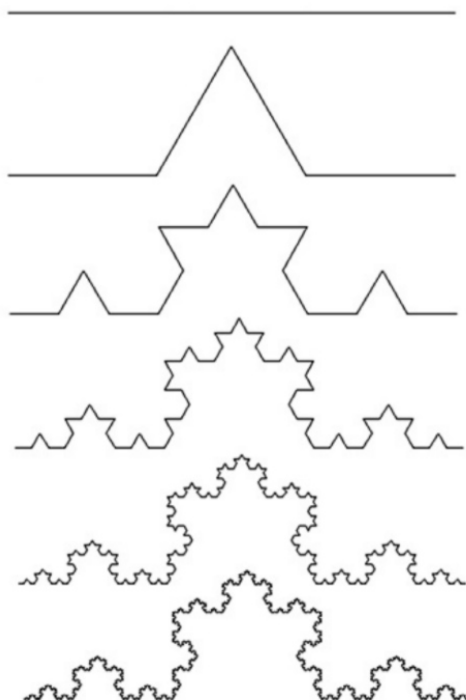
Pouco se sabe a respeito de Niels Fabian Von Koch (1870-1924). Matemático nascido em Estocolmo, na Suécia. Este atuou como professor numa Universidade em Estocolmo. Apresentou alguns trabalhos sobre a teoria dos determinantes de matrizes infinitas, que mais tarde foram significativamente utilizados na Álgebra Linear e aplicados na mecânica quântica.

Em 1904 e 1906 desenvolveu e introduziu a curva de Koch, um fractal que é construído a partir do método de fronteira, que significa basicamente formar iterações por meio de um aumento em uma determinada parte do fractal. (Zanotto, 2015), observe a figura 20.

Construção

1. Considere um segmento de reta;
2. Faça a divisão deste segmento em três partes iguais;
3. Na parte central dessa divisão, introduza dois novos segmentos para formar um triângulo equilátero, e em seguida apague a base desse triângulo formado;
4. Para continuar a iteração, em cada segmento de reta repita os processos 2 e 3, e assim sucessivamente.

Figura 20: Curva De koch



Fonte: (ZANOTTO, 2015, p.31)

Observando a construção desse fractal, percebe-se que em cada iteração, quatro novos segmentos são obtidos. Logo, $n = 4$. Como o fator de redução é igual a $r = \frac{1}{3}$, o fator de aumento será $m = 3$. Aplicando a fórmula de dimensão fractal, obtemos a dimensão da Curva de koch.

$$D = \frac{\log n}{\log m}$$

$$D = \frac{\log 4}{\log 3}$$

$$D \approx 1,26186$$

4 METODOLOGIA DA PESQUISA

O presente trabalho de pesquisa possui como foco uma abordagem qualitativa, pois foi realizado um estudo minucioso para a compreensão da geometria fractal, e ainda teve como finalidade gerar novos conhecimentos. Segundo Godoy a pesquisa qualitativa,

envolve a obtenção de dados descritivos sobre pessoas, lugares e processos interativos, pelo contato direto do pesquisador com a situação estudada, procurando compreender os fenômenos segundo a perspectiva dos sujeitos, ou seja, dos participantes da situação em estudo. (GODOY, 1995, p.58)

Conforme apresentado, este estudo, trata-se de uma pesquisa de caráter bibliográfico, já que, foram realizados levantamentos bibliográficos em outros trabalhos publicados para a obtenção de dados para a pesquisa. Gil (2002, p.45) ressalta que, “a principal vantagem da pesquisa bibliográfica reside no fato de permitir ao investigador a cobertura de uma gama de fenômenos muito mais ampla do que aquela que poderia pesquisar diretamente.” Portanto, tal método, torna-se adequado diante dos objetivos de pesquisa estabelecidos, sendo caracterizado como exploratório.

De acordo com Gil (2008) as pesquisas exploratórias são realizadas com o objetivo de obter uma visão geral do fato em estudo. E ainda afirma, que “o produto final deste processo passa a ser um problema mais esclarecido, passível de investigação mediante procedimentos mais sistematizados” (GIL, 2008, p.27).

Para a realização da pesquisa, buscou-se selecionar trabalhos acadêmicos, artigos e afins, para encontrar alguns trabalhos que tenham uma íntima relação com o estudo em questão.

A pesquisa pautou-se em analisar de forma mais detalhada trabalhos que foram aplicados e discutidos em sala de aula com os alunos, pois a partir destes, buscou-se coletar dados com o propósito de responder o questionamento inicialmente feito em cima deste estudo, a geometria fractal pode ser utilizada como motivadora no ensino de matemática no ensino médio?. Além disso, delimitamos a escolha dos trabalhos a partir dos resumos previamente expostos, e também se este relacionava-se com a “geometria fractal no ensino da matemática.”

Para a pesquisa, foram selecionados 6 trabalhos que atenderam os critérios estabelecidos com a finalidade de atingir os objetivos. O principal objetivo dessa busca é investigar como a geometria fractal tem sido abordada em sala de aula atrelada a outras noções de conhecimentos. Os trabalhos encontrados são os descritos a seguir, no capítulo cinco será feito um resumo de como as atividades foram abordadas.

- *Uma abordagem da Geometria fractal para o ensino médio* por Clayton Eugenio Santos de Paula e Tatiana Miguel Rodrigues de Souza (2017).
- *Aprendendo Matemática através de fractais: Uma experiência no ensino médio* por Vargas *et al* (2014).
- *Os fractais: Geometria de formas irregulares* por Wilton Martins Vieira *et al* (2018).
- *Uma proposta didática para o ensino da geometria fractal em sala de aula na Educação Básica* por Maristel do Nascimento, Sani de Carvalho Rutz da Silva e Nilcéia Aparecida Maciel (2012).
- *Explorando a Geometria Fractal no Ensino médio por meio de uma oficina* por Aline Picoli Sonza e José Carlos Pinto Leivas (2018)
- *Geometria fractal: da natureza para a sala de aula* por José Roberto Ferreira Filho (2015).

A partir de todo o estudo baseado nestes trabalhos, buscou-se analisar a viabilidade da utilização da Geometria Fractal no ensino da Matemática. Por fim, é apresentada uma proposta didática como resultado das reflexões e práticas sobre os fractais em sala de aula.

5 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

5.1 A Geometria Fractal e suas práticas no ensino da matemática

O estudo da geometria está presente nos currículos educacionais e desde os primeiros anos na escola, os alunos são levados a compreender e explorar as formas regulares com o objetivo de abrir horizontes e aprimorar seus raciocínios. Segundo a BNCC, “a geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento.” (BRASIL, 2017, p.271).

Diante disso, Sallum (2005) cita que a introdução da Geometria Fractal no ensino médio é extremamente relevante, pois desperta a curiosidade e permite ao professor trabalhar com diversos conteúdos, como por exemplo, processos iterativos, cálculos de áreas e perímetros, permite ainda escrever fórmulas gerais e criar algoritmos, além de ser um ótimo recurso para o estudo de progressões geométricas e o incentivo da utilização de tabelas em sala de aula.

No que se refere aos fractais na educação, Barbosa (2005, p.13) discute que “algumas áreas da Matemática, como a Geometria, possibilita o surgimento de prazer e gozo que merecem ser explorados pelos educadores”. E ainda ressalta que, “O despertar e desenvolver do senso estético pode muito ser cuidado e aproveitado com o tema *fractais*, quer apreciando o belo irradiante, quer observando a regularidade harmoniosa nas suas próprias irregularidades” (BARBOSA, 2005, p.14).

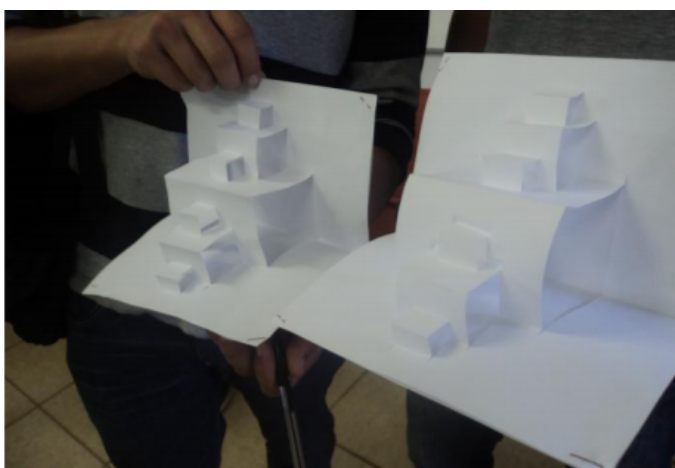
Para corroborar com estas ideias, Barbosa (2005) também expõe de maneira detalhada, formas de trabalhar com a geometria fractal em sala de aula. Segundo ele, fractais podem ser explorados a partir de suas próprias características. Uma dessas formas seria estudar as relações numéricas de seus próprios elementos, por exemplo, perímetros, áreas, volumes, contagem, entre outros. E em seguida o autor afirma que “tais explorações, em geral, são ao nível de aprendizagem de educandos de ensino médio, portanto, podendo ser utilizadas para uma boa fixação de aprendizagem correspondente” (BARBOSA, 2005, p.71). Outra forma apresentada pelo autor de explorar os fractais, seria despertando o senso estético a partir da contemplação das belas formas fractais.

Um exemplo desta geometria trabalhada em sala de aula atrelada a outros conteúdos, foi o trabalho realizado por Vargas *et al* (2014), no qual relatam uma experiência que tiveram ao trabalhar com fractais em uma turma do 3º ano do ensino médio no Instituto Federal Farroupilha- Campus Alegrete no segundo semestre de 2014. O principal objetivo da pesquisa, segundo os autores, foi utilizar a geometria fractal como uma metodologia diferenciada para o ensino de Sequências Numéricas, Progressão Geométrica (P.G) e cálculos de área.

Para a aplicação da oficina, utilizaram dois fractais. Fractal Triminó, que permite trabalhar com sequência numérica e Progressão Geométrica, e o Triângulo de Sierpinski, em que abrange conteúdos de triângulos equiláteros, mediatriz e ponto médio de um segmento.

A oficina foi dividida em oito momentos com a turma. Nesses momentos foram aplicados questionários para os alunos, foi revisado os conteúdos que seriam trabalhados, e utilizaram estas duas figuras fractais para aprimorar o estudos destes temas, foram aplicadas atividades de fixação sobre P.G e área e ao final construíram cartões fractais. Conforme a figura 21, o que deixou os alunos mais animados.

Figura 21: Fractal construído pelos alunos



Fonte: (VARGAS *et al.*, 2014, p. 772)

Levar os alunos a construírem fractais com diversos recursos e materiais didáticos pode também facilitar o aprendizado do aluno como fizeram Sonza e Leivas (2018), em sua pesquisa intitulada: *Explorando a Geometria Fractal no Ensino médio por meio de uma oficina*, em que a partir de construções fractais

exploraram outros conteúdos em uma turma do 3º ensino médio. Dentre as atividades que foram realizadas nesta oficina, cabe destacar, a que os alunos receberam materiais como régua, compasso e transferidor para a construção de fractais com material quadriculado, apesar da dificuldade na construção das formas, os discentes conseguiram visualizar de maneira mais dinâmica as figuras e por fim aplicar nos conteúdos tratados nas atividades.

Conforme abordado por Barbosa (2005), utilizar as próprias características fractais para o estudo e aplicação no ensino em sala de aula pode ser uma ótima alternativa. E foi exatamente o que Paula e Souza (2017), fizeram ao utilizar o conjunto de Cantor, Triângulo de Sierpinski e Curva de Koch para estudar e aprimorar o conteúdo Progressões Geométricas em uma turma do 3º ano do ensino médio. Os autores utilizaram o processo de iteração de cada uma destas formas. Em cada iteração, destacaram o número de segmentos formados em cada uma dessas figuras, formando uma sequência e então estudaram essas progressões com os alunos, que devido esta atividade conseguiram visualizar melhor cada P.G a partir da construção do fractal.

Outro exemplo de estudar os fractais em sala de aula, foi o que Vieira *et al* (2018), relataram após o desenvolvimento de uma oficina que tinha como principal objetivo estudar a geometria fractal com os alunos, mostrando a eles a importância dessa geometria que visa caracterizar objetos irregulares cuja classificação se encontra fora da Geometria Euclidiana. Com um minicurso nomeado “Os fractais” os Licenciandos de Matemática, elaboraram junto ao Programa Institucional de Bolsas e Iniciação à Docência-PIBID, atividades em grupos para os alunos, no qual tiveram que construir Cartões fractais e apresentar em uma Semana da Matemática na instituição destacando as principais características fractais aos ouvintes da semana. Observe a figura 22.

Figura 22: Apresentação dos cartões fractais



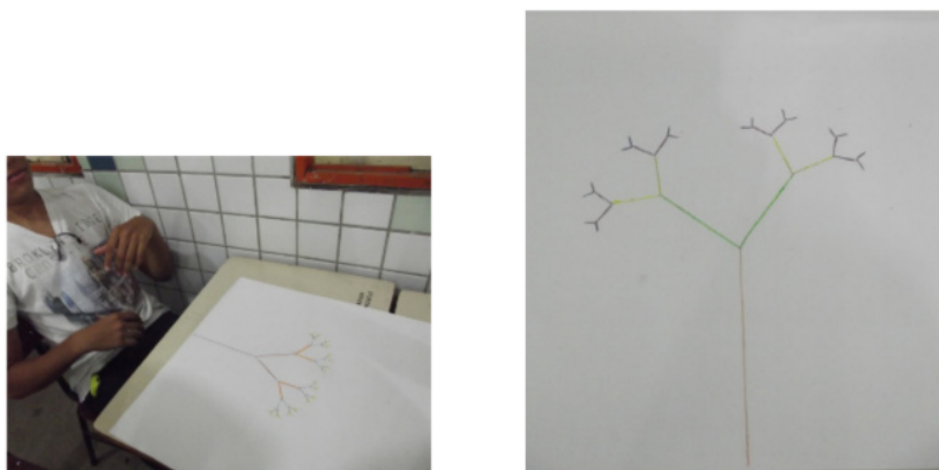
Fonte: (VIEIRA *et al.*, 2018)

Diante das poucas práticas apresentadas até então, percebe-se o quanto ainda precisa ser feito para que a geometria fractal seja inserida nas aulas de Matemática. Pensando nisso foi que Nascimento, Silva, Maciel (2012), desenvolveram um artigo com uma série de discussões retiradas de um trabalho de mestrado realizado com o intuito de gerar algumas reflexões a respeito da inclusão da geometria fractal no ensino básico. Com este objetivo, os autores realizaram uma oficina com alunos no período noturno do 1º ano do ensino médio de uma escola da cidade de Ponta Grossa, a fim de analisar a aprendizagem dos alunos frente a esta geometria. Dentre todas as atividades realizadas, é primordial destacar duas. Em um dado momento, foi apresentado aos alunos a geometria fractal no cotidiano, onde os alunos puderam perceber como a todo momento no nosso dia a dia ficamos diante de estruturas fractais, fazendo com que os alunos pudessem abrir os olhos para um “novo” mundo. A outra atividade foi desenvolvida utilizando recursos tecnológicos. No Laboratório os alunos foram incentivados a explorar fractais a partir do uso de um software livre chamado *Fractal Forge*, neste momento de interação tecnológica, os estudantes relataram que o conceito de fractal e suas características ficaram mais fáceis e visíveis.

Assim como todos os autores citados anteriormente, Filho (2015), do mesmo modo utilizou atividades lúdicas e construção de cartões fractais para chamar a atenção dos alunos para o tema fractais. Este autor, em seu trabalho de Mestrado, desenvolveu três oficinas com alunos do ensino médio com o intuito de trazer esta geometria para a sala de aula e levar os alunos a uma dimensão ainda não conhecida. Dentre as oficinas realizadas, é relevante destacar a que os alunos

tiveram que desenhar um fractal do tipo árvore bifurcada, conforme a figura 23, para o estudo de Sequências e Progressão Geométrica. Apesar dos problemas decorrentes das dificuldades dos alunos no manuseio do transferidor e nos conceitos de razão e proporção, durante a construção da árvore bifurcada, parte da turma conseguiu compreender o padrão de auto similaridade presente na estrutura. Neste momento, Filho (2015), introduziu o tema de sequência numérica relacionada ao número de segmentos e comprimento.

Figura 23: Construção fractal da árvore bifurcada



Fonte: (FILHO, 2015, p.75)

Além dessas propostas didáticas citadas, é importante ressaltar que existem outras que similarmente podem ser aplicadas no ensino unindo a Geometria Fractal a outras áreas de ensino, em especial ao da Matemática. Estas citadas anteriormente, foram as poucas encontradas que atenderam a demanda do nosso tema de estudo, sendo perceptível que a geometria fractal ainda está no começo de sua desenvoltura nas práticas educacionais, já que, apenas nestes últimos anos, educadores têm aos poucos despertado o interesse de trabalhar esta geometria com os alunos como objetivo de dinamizar o processo de ensino aprendizagem.

5.2 Viabilidade da Geometria Fractal em sala de aula

De acordo com os trabalhos apresentados na seção anterior, pode-se apontar algumas reflexões acerca da prática da geometria fractal no ensino de tópicos da matemática. Nessa perspectiva, a seguir, será feita análises e ponderações a partir da visão destes autores.

Mediante suas pesquisas, Sonza e Leivas(2018), salientam que a geometria fractal pode ser um forte aliado ao professor, pois as belas formas contribuem e favorecem o desenvolvimento do ensino da matemática em sala de aula. Com essa afirmação e com o resultado da oficina realizada, conclui-se que o estudo dos fractais a partir de suas formas exuberantes pode instigar a imaginação, bem como chamar a atenção dos alunos para o estudo dos conteúdos nas aulas.

Do mesmo modo, Paula e Souza (2017), argumentam que o ensino da matemática sempre foi um desafio por ser uma disciplina odiada pelos alunos, no qual grande parte destes tem dificuldades de assimilação dos conteúdos, e por isso resolveram aplicar uma abordagem diferenciada a partir da geometria fractal. Para corroborar com esta ideia, Vargas *et al* (2014), diz que métodos diferenciados podem tornar a aula de matemática agradável e estimulante.

Sendo assim, a geometria fractal pode ser um ótimo recurso metodológico para os professores. Esta geometria permite que o educador exponha uma série de conteúdos de maneira mais leve, saindo um pouco do convencional, que se resume a fórmulas e exercícios repetitivos. É importante destacar o que Sonza e Leivas (2018), expôs acerca dos conteúdos que podem ser assimilados através do estudo das formas fractais,

Vários tópicos estudados ao longo do Ensino Médio podem trazer para a sala de aula as noções de fractais, como por exemplo: funções, sequências e progressões aritméticas e geométricas, formas geométricas, perímetro, área e volume, simetria e noções de limites, entre outros. (SONZA, LEIVAS, 2018, p.1550).

É portanto, claro, que a geometria fractal pode ser trabalhada com inúmeros conteúdos e de diversas formas, cabendo ao professor a busca por novas estratégias no ensino da matemática, tentando ao máximo melhorar o desempenho dos alunos frente a compreensão dos assuntos corriqueiramente trabalhados.

Foi perceptível a partir das análises das atividades aplicadas pelos autores, a empolgação dos estudantes ao descobrir esta “nova” geometria que se faz presente

no seu cotidiano. A auto similaridade das formas fractais e também a sua complexidade fascinou e estimulou os alunos a adentrarem nas atividades realizadas pelos pesquisadores, tanto que Vargas *et al* (2014) e Sonza e Leivas (2018) afirmam que além de estimular o raciocínio lógico e a criatividade, esta geometria pode motivar os alunos em sala de aula a aprender matemática devido a sua grande flexibilidade em contextualização com a realidade do aluno e a forte possibilidade de interdisciplinaridade com outras ciências.

Um dos problemas recorrentes nos trabalhos de Filho (2015) e de Nascimento, Silva, Maciel (2012), foi em relação a construção das formas fractais utilizando materiais como, régua, compasso e transferidor. Nos relatos desses autores fica evidente a dificuldade dos alunos no manuseio destes materiais, o que só mostra o quanto esse tipo de atividade não é parte da rotina da sala de aula no estudo de geometria e de outros conteúdos. Outra dificuldade que ficou perceptível, foi na hora que os alunos tiveram que realizar cálculos e generalizações para a construção de tabelas e aplicações da geometria fractal a outros conceitos, pois não conseguiam assimilar conceitos simples como razão, proporção, decimais, frações e outros. Sendo este, um dos problemas mais frequentes nas aulas de matemática, a defasagem no ensino que vai se consolidando ao longo dos anos escolares e vira uma “bola de neve” gerando em muitas das vezes um estresse no professor que precisa revisar conteúdos anteriores, e principalmente no aluno que passa a odiar cada vez mais a disciplina.

Diante desses e de outros problemas no ensino da geometria, o professor deve sempre buscar novas formas de auxiliar os alunos a minimizar estas dificuldades, lembrando sempre, que “a compreensão do conceito é facilitada quando o aluno observa o mesmo conteúdo em diferentes representações.” (NASCIMENTO, SILVA, MACIEL, 2012, p.126).

Muitas ferramentas educacionais podem ser utilizadas para que o educador consiga expor os conteúdos de forma dinâmica e criativa, tornando a aprendizagem significativa, no qual ideias novas são apresentadas e estas se ligam e valorizam os conhecimentos prévios dos discentes. Logo, a geometria fractal é uma dessas ferramentas, já que pode despertar a curiosidade e criatividade dos alunos frente ao seu próprio conhecimento. (VARGAS *et al*, 2014).

O momento de maior euforia nas atividades realizadas, sem dúvida, foi o momento da construção do cartão fractal tridimensional, proposta de atividade de

Filho (2015), Paula e Sousa (2017), Sonza e Leivas (2018), Vargas *et al* (2014) e Vieira *et al* (2018). Estes destacam, que no momento desse exercício, houve participação ativa dos alunos, todos ficaram curiosos e empolgados em construir o cartão fractal. Toda essa euforia se deu por conta da manipulação do papel e da tesoura para a construção do objeto, já que, houve uma aproximação desse tema com os alunos, e a partir das construções, as características dos fractais foram melhor visualizadas.

Diante disso, é visível o quanto trabalhar com dobraduras e recortes pode estimular o ensino da geometria, tornando o aprendizado mais leve, prático e dinâmico. A construção de cartões fractais pode atuar como motivador na integração da geometria fractal a outros temas no ensino da matemática, ficando evidente que “o uso de atividades diversificadas, no ensino de Geometria quando aliado a uma metodologia adequada, possibilita a participação ativa dos alunos na aprendizagem.” (NASCIMENTO, SILVA, MACIEL, 2012, p.130).

Um dos principais objetivos de todas as atividades realizadas por estes autores na seção anterior, foi fazer com que os alunos enxergassem o mundo a sua volta de outra forma e se sentissem motivados e fascinados em aprender matemática através da geometria fractal. Conforme destaca BARNSELEY,

a geometria fractal fará com que você veja as coisas diferentes. É perigoso ler mais. Você arrisca perder a visão infantil de nuvens, florestas, flores galáxias, folhas, penas, rochas, montanhas, torrentes de água, tapetes, tijolos e muito mais. Nunca mais você interpretará estes objetos da mesma forma. (1993, apud FILHO, 2015, p. 68).

Assim sendo, o estudo dos fractais é um abrir dos horizontes para os educandos, no qual poderão enxergar no seu dia a dia estruturas fractais que muitas vezes passavam despercebidas.

Diante de todas as reflexões sobre a geometria fractal no ensino, foi possível analisar, que a aprendizagem significativa da matemática vai muito além de conteúdos repetitivos e resolução de problemas. Novas metodologias podem ser utilizadas pelos docentes para atingir tal objetivo, e pelos trabalhos apresentados sobre as práticas fractais em sala de aula, é perceptível que a utilização da geometria fractal torna-se viável como grande motivadora no ensino de conteúdos matemáticos.

6 PROPOSTA PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA COM FRACTAIS

Este capítulo será destinado a descrever de forma detalhada, uma metodologia que poderá ser utilizada por docentes da área de Matemática, tendo em vista abordar conteúdos, como progressão geométrica (P.G), logaritmo, área, perímetro e dimensão fractal em sala de aula trazendo os fractais como base para o ensino de tais conteúdos, já que, a partir dos estudos sobre a prática da geometria fractal em sala de aula, foi possível perceber sua utilidade motivadora no processo de ensino aprendizagem da Matemática.

6.1 Sequência didática para o ensino de P.G e tópicos de geometria

Para o ensino e aprimoramento do conteúdo de progressões geométricas, logaritmo, área, perímetro e dimensão no ensino médio, é proposto a metodologia de sequência didática, pois entendemos ser mais viável trabalhar este assunto utilizando os fractais como recurso motivador a partir de uma sequência de atividades.

Segundo Zabala (1998, p. 18), sequências didáticas “são um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que tem um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos.” Logo, essas atividades didáticas são organizadas para aprofundar e/ou ensinar conteúdos em vários passos previamente planejados pelo docente a fim de alcançar suas metas de aprendizagem.

As sequências didáticas permitem inserir conteúdos a temas diversos dentro da sala de aula, sendo uma ótima estratégia pedagógica, pois valoriza os conhecimentos preexistentes dos educandos. Com seus objetivos estabelecidos, o professor poderá organizar uma série de procedimentos para lecionar um assunto de uma unidade didática anteriormente definida.

Em seu livro, Zabala (1998), também expõe que a sequência didática é capaz de aperfeiçoar a atuação do professor, pois este ao elaborar essas atividades consegue adquirir um conhecimento mais profundo e assim ter uma visão mais ampla de todo o processo de ensino-aprendizagem.

Além disso, verificou-se que as sequências didáticas dão ao aluno autonomia e também um papel mais ativo em seu processo de aprendizagem. Estas possuem o

papel de desenvolver habilidades nos discentes no decorrer do processo de execução da atividade.

Nos estudos de Zabala (1998) sobre a prática educativa, em especial quando nos apresenta as sequências didáticas, o autor nos leva a refletir sobre essa prática e enfatiza que para termos uma sequência didática autêntica é necessário que o educador faça alguns questionamentos sobre as atividades que serão desenvolvidas, como por exemplo nas propostas a seguir:

1. As atividades permitem determinar os conhecimentos prévios de cada aluno em relação aos novos conteúdos de aprendizagem?
2. Os conteúdos são apresentados de forma que sejam significativos e funcionais para os alunos?
3. Essas atividades representam um desafio alcançável para o aluno?
4. Provocam um conflito cognitivo e promovem a atividade mental do aluno?
5. São motivadoras em relação à aprendizagem de novos conteúdos?

Diante destes questionamentos, buscamos elaborar a seguir, uma sequência didática explorando esses conteúdos, utilizando a Geometria Fractal para um maior entendimento do assunto. A seguir será descrito uma sequência de três atividades que abordam os conteúdos apontados anteriormente. Antes de tudo, é importante apresentar a identificação destas atividades, que tratam das informações iniciais extremamente importantes para a execução de cada exercício.

Identificação das atividades

Quadro 3: Informações da sequência didática

Disciplina: Matemática

Professor:

Turma (série/ano): 1º ano

Tema: Fractais no ensino de alguns tópicos da Matemática

Conteúdos: Progressões geométricas, sequências numéricas, logaritmo, área, perímetro e dimensão fractal.

Tempo de execução: 6h (6 aulas)

Materiais: Projetor de vídeo, folhas de papel, régua, tesoura.

Objetivos:

- Apresentar a geometria fractal aos discentes;
- Estudar progressões geométricas tendo os fractais como motivador de aprendizagem;
- Apresentar aos alunos a dimensão de alguns fractais;
- Revisar área e perímetro a partir do Triângulo de Sierpinski.

Fonte: Autora

Atividade 1- Introdução ao conceito de Fractal

Nesse primeiro momento, o professor irá explicar de forma resumida a geometria fractal utilizando as informações do presente estudo nos capítulos anteriores. Poderá elaborar em slides, um pouco da história, características, e definição dos fractais. Este momento inicial servirá para apresentar aos discentes sobre o novo assunto, já que, muitos nem ao menos ouviram falar sobre ela. Para explicar o significado dos fractais de maneira mais prática e visual, segue abaixo uma proposta de atividade baseada em uma palestra apresentada no Ted Talks por Luiz Bevilacqua no ano de 2014. Observe a figura 24.

- 1º) O professor deve pedir aos alunos da classe que peguem uma folha de papel em branco;
- 2º) Em seguida, deve pedir a todos que amassem essas folhas e forme uma bola de papel;
- 3º) Agora, os alunos deverão desamassar essa folha e dizer para o professor como ela ficou (cheia de imperfeições e amassos);
- 4º) Depois disto, o professor deve pedir aos alunos que recortem um pequeno pedaço da folha, e em seguida poderá fazer a explicação prática sobre fractal a partir de sua característica mais marcante, a auto similaridade. Logo, uma pequena parte é semelhante ao seu todo.

Figura 24: Passos para a atividade 1



Fonte: Autora

Atividade 2- Entendendo P.G e a dimensão Fractal

Essa atividade 2 trata-se de uma adaptação (Paula, Souza, 2017).

Nesta segunda atividade da aula, depois das explicações iniciais, o professor já deverá ter explicado em aulas anteriores sobre os conceitos iniciais de sequência numérica, Progressão Geométrica e segmentos de reta. Deverá mostrar aos alunos de forma visual através do projetor, os três fractais que serão utilizados para consolidar a ideia de progressão geométrica realizando também a explicação sobre como ocorre a construção de cada um. São estes: Conjunto de Cantor, Triângulo de Sierpinski e Curva de Koch.

Passos para esta etapa:

1º) O professor deverá distribuir aos alunos folhas de papel e pedir a eles que façam de maneira intuitiva, com o auxílio de uma régua, os três fractais clássicos citados anteriormente em um verso da folha, lembrando-os de fazerem apenas 3 iterações de cada uma das formas.

2º) No outro verso da folha o professor deverá montar a seguinte tabela a partir do primeiro fractal, o conjunto de Cantor. O professor deverá fazer a explicação ressaltando visualmente os segmentos que são formados em cada iteração, e em seguida mostrar a formação de uma P.G a partir deste fractal.

Quadro 4: Iterações do Conjunto de Cantor

Iterações	Quantidade de Segmentos
0	1
1	2
2	4
3	8
...	...

Fonte: Autora

O professor deverá explicar aos alunos que, ao tomar os números (2,4,8,...) que fazem parte da quantidade de segmentos do Conjunto do Cantor no decorrer das iterações, é perceptível uma sequência de razão 2, que é obtida dividindo cada termo (a partir do segundo) pelo termo anterior. Lembrando aos alunos sobre a fórmula geral de uma progressão geométrica, o docente poderá descobrir a quantidade de segmentos que o conjunto de Cantor terá em **(n)** iterações. No quadro, o professor poderá aplicar a fórmula geral da P.G e descobrir matematicamente o número de segmentos que o conjunto de Cantor terá na quarta iteração.

Segue abaixo tal resolução. Tendo como fórmula geral da P.G : $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, sendo $n = 4$, $a_1 = 2$ e $q = 2$. Fazemos

$$a_4 = 2 \cdot 2^{4-1}$$

$$a_4 = 2 \cdot 8$$

$$a_4 = 16$$

Logo, o conjunto de Cantor terá 16 segmentos na quarta iteração.

3º) Com esses dois últimos fractais, o professor poderá permitir que os alunos construam a tabela de iterações e quantidade de segmentos/triângulos de cada um dos fractais. Tendo abaixo o modelo, com a solução das 3 primeiras iterações.

Quadro 5: Iterações do Triângulo de Sierpinski

Iterações	Quantidade de Triângulos
0	1
1	3
2	9
3	27
...	...

Fonte: Autora

Para isto, temos uma P.G (3, 9, 27, ...) de razão 3.

Quadro 6: Iterações da Curva de Koch

Iterações	Quantidade de Segmentos
0	1
1	4
2	16
3	64
...	...

Fonte: Autora

Uma P.G (4,16,64,...) de razão 4.

Conforme abordado na seção 3.1, na parte que trata da dimensão fractal, o cálculo da dimensão de fractais clássicos é dado a partir da seguinte fórmula:

$$D = \frac{\log n}{\log m}$$

Após a explicação de como se calcula essa dimensão e como se aplica esta fórmula para

o conjunto de Cantor, o professor poderá pedir aos alunos que calcule a dimensão dos outros dois fractais, como consta no questionário a seguir. Lembrando que tal resolução se encontra na seção 3.3.

Para fixação desta atividade, a seguir, tem-se um questionário a ser repassado aos alunos para a validação do conhecimento dos alunos diante da proposta didática.

Questionário

1- Analisando o triângulo de Sierpinski e a Curva de Koch, qual a razão de cada um deles?

Resposta: *Triângulo de Sierpinski com razão 3 e Curva de Koch de razão 4.*

2- Quais são os 4 primeiros termos da PG de cada um dos fractais?

Resposta: *Triângulo de Sierpinski com PG (3,9,27,81,...) e Curva de Koch com PG (4,16,64,256,...).*

3- Caso eu quisesse encontrar a quantidade de segmentos do triângulo de Sierpinski na iteração de número 5, como deveria proceder?

Resposta: *Poderia aplicar a fórmula do termo geral de uma PG, fazendo $n = 5$, $a_1 = 3$ e $q = 3$*

4- Tome uma P.G (2,6,...) qual a razão e qual é o 7º termo desta progressão ?

Resposta: *O sétimo termo dessa PG de razão 3 seria $a_7 = 1458$ de razão 3.*

5- Caso eu quisesse encontrar a quantidade de segmentos da Curva de Koch na iteração de número 5, como deveria proceder?

Resposta: *Poderia aplicar a fórmula do termo geral de uma PG, fazendo $n = 5$, $a_1 = 4$ e $q = 4$*

6- Qual a dimensão dos fractais, Triângulo de Sierpinski e Curva de Koch ?

Resposta: *Triângulo de Sierpinski: $D \simeq 1,58496$ e Curva de Koch: $D \simeq 1,26186$*

7- Conseguiram visualizar melhor o conceito de uma Progressão Geométrica a partir dos fractais? Justifique. **Resposta Pessoal**

☐ sim

☐ não

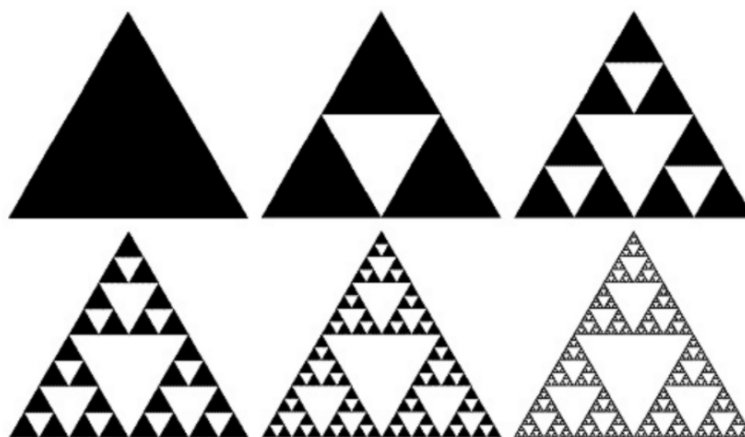
☐ um pouco

Atividade 3- Revisando a área e perímetro no Triângulo de Sierpinski

Esta atividade é um exercício adaptado de Silva (2015), no qual tem como foco levar o professor a revisar o assunto de área e perímetro a partir do triângulo de Sierpinski.

Será necessário nessa atividade que o professor imprima a foto a seguir e entregue a cada aluno individualmente, para que a partir da observação, os alunos possam responder ao questionário sobre as iterações do triângulo de Sierpinski.

Figura 25: Triângulo de Sierpinski



Fonte: (ZANOTTO, 2015, p. 33)

Questionário

1) Qual a classificação, quanto aos lados, dos triângulos (pretos) no decorrer da construção desse fractal ?

Resposta: *são triângulos equiláteros, ou seja, têm as mesmas medidas dos lados*

2) Sabendo da informação da questão anterior, e se caso o primeiro triângulo tenha 16 cm de lado, determine a área e o perímetro de cada triângulo nas três primeiras iterações.

Resposta:

Sabendo das informações abaixo, fica fácil responder essa questão. O professor deverá revisar esses conceitos antes e durante a resolução deste questionário. É importante também que o professor lembre ao aluno que o primeiro triângulo possui 16 cm de lado, e a cada iteração esse lado é dividido pela metade. Logo na primeira iteração, a medida do

lado de cada triângulo valerá 8 cm, e na segunda 4 cm e na terceira 2 cm, e assim sucessivamente.

Área do triângulo equilátero: $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$

Perímetro do triângulo equilátero: $p = 3l$

sendo, l , a medida do lado.

Portanto,

Nível 0: $A = 64\sqrt{3}cm$ e $P = 48 cm$

Nível 1: $A = 16\sqrt{3}cm$ e $P = 24 cm$

Nível 2: $A = 4\sqrt{3}cm$ e $P = 12 cm$

Nível 3: $A = \sqrt{3}cm$ e $P = 6 cm$

3) Qual o padrão você observou no decorrer das iterações na construção do Triângulo de Sierpinski ?

Resposta Pessoal

Finalização da sequência didática:

Ao final da sequência didática o professor irá se perguntar se os objetivos foram atingidos a partir da participação ativa dos alunos durante as aulas e também a partir das respostas dos questionários.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho buscou gerar conhecimentos através do levantamento de informações realizadas a respeito da Geometria Fractal, tema este, que nestes últimos tempos tem chamado atenção de pesquisadores e educadores. Tida por muitos como a geometria da natureza, já que está eminentemente presente no meio natural.

Inicialmente foi feito um levantamento a respeito de sua história, definição e principais características. Sendo difundida e concretizada pelo mundo através dos estudos de Benoit Mandelbrot, essa geometria estuda os fractais, objetos mais conhecidos através da auto similaridade.

Foi apresentado também um pouco sobre os fractais clássicos e sobre as aplicações fractais, ficando evidente o quanto o descobrimento dessa geometria veio para contribuir a vários ramos da ciência e tecnologias. No nosso dia a dia estamos sempre diante de estruturas fractais, como por exemplo, galhos secos de árvores, nuvens, galáxias, folhas, enfim, é a forma pura e bela da matemática expressa em formas do meio ambiente.

Diante disso, o objetivo de estudar essa geometria foi alcançado, e a partir daí, buscou-se estudar como essa geometria tem sido abordada em sala de aula, já que, nas pesquisas iniciais, ficou claro o quanto esse tema é de fácil contextualização e flexível se atrelada a outras noções de conhecimentos no ensino, sem contar no estímulo de raciocínio que as formas fractais intrigantes podem gerar nos alunos. Além dos assuntos que foram citados e trabalhados na sequência didática, a geometria fractal pode ser inserida nas aulas de matemáticas, como um recurso metodológico, para ensinar razão e proporção, porcentagem, semelhanças, probabilidades, frações e outras infinitudes de conteúdos.

As pesquisas foram extremamente relevantes e o propósito de analisar como a geometria fractal tem sido inserida por educadores nas escolas foi satisfatório. Além de favorecer no desenvolvimento da disciplina de matemática e servir como um “quebra-gelo” no ensino de conteúdos difíceis, esta geometria, ao ser inserida na sala de aula mostrou ser estimulante aos discentes e lhes chamou bastante a atenção por conta de suas formas complexas e fascinantes.

Ao compreender e estudar a geometria fractal, o aluno terá uma interação maior com o mundo a sua volta. O que antes se via apenas árvores secas do cerrado, o aluno já entenderá se tratar de um fractal natural, ou seja, a geometria fractal fará com que os alunos vejam os seres e objetos do mundo a sua volta de outra forma. Sendo esta, uma das maiores contribuições do estudo dos fractais para com os educandos, abrir seus horizontes para um novo mundo a partir da geometria fractal.

No que se refere a pergunta norteadora, **a geometria fractal pode ser utilizada como motivadora no ensino de matemática no ensino médio?**, verificou-se que sim, a geometria fractal pode motivar os alunos a aprender matemática. De todos os trabalhos selecionados e analisados, a geometria fractal foi tida como excelente recurso metodológico para estimular e assegurar a aprendizagem significativa de conteúdos na disciplina de matemática. Após esse resultado, a viabilidade de utilizar a geometria fractal como estratégia motivadora no ensino foi verificada a partir das reflexões destes trabalhos e, ao final, foi proposto um sequência didática para o desenvolvimento de uma metodologia de ensino utilizando os fractais como recurso metodológico. Portanto, todos os objetivos estabelecidos foram atingidos.

Por fim, ficou evidente que a geometria fractal em sala de aula ainda está no início de sua jornada. Aos poucos, professores têm utilizado e despertado o interesse por esta “nova” geometria que já se mostrou bastante eficaz no processo de ensino aprendizagem. Para terminar, espera-se que este trabalho inspire outros educadores apaixonados pela matemática e que nunca se cansam de descobrir novas abordagens no ensino dessa imensa área de estudo. Sendo indispensável, que a proposta de sequência didática seja aplicada em sala de aula para o avanço da pesquisa de futuros trabalhos sobre a geometria fractal.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrimos a Geometria Fractal para a sala de aula**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2005.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Brasília: MEC. 2017. Disponível em: < <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/a-base> >. Acesso em: 13 dez. 2020.

Colégio Web. **Fractais: Elementos matemáticos explicam o fenômeno**. 20 nov. 2013. Disponível em: < <https://www.colegioweb.com.br/matematica/fractais.html> >. Acesso em: 24 nov. 2020.

CÔRTEZ, Ivane. ANTUNES, Gladson. Geometria fractal no ensino médio: teoria e prática. **Revista Eletrônica da sociedade brasileira de Matemática: Professor de Matemática online**. v.2, n.1, p. 26-41, Janeiro, 2014. Disponível em: < <https://doi.org/10.21711/2319023x2014/pmo23> >. Acesso em: 03 nov. 2020.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto e Aplicações**. 2 ed. São Paulo: Ática, 2013.

FERNANDES, Jaqueline Aparecida. **Fractais: uma nova visão da matemática**. 2007. 46 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática)- Centro Universitário de Lavras, Minas Gerais, 2007.

FILHO, José Roberto Ferreira. **Geometria Fractal: da natureza para a sala de aula**. 2015. 80 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, Sergipe, 2015.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4.ed.-São Paulo: Atlas, 2002.

GIL, Antonio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed.-São Paulo: Atlas, 2008.

GODOY, Arilda Schmidt. Introdução a pesquisas qualitativas e suas possibilidades. **Revista de Administração de Empresas**, São Paulo; v. 35, n. 2, p. 57-63, Mar./Abr. 1995.

NASCIMENTO, Maristel do. SILVA, Sani de Carvalho Rutz. MACIEL, Nilcéia Aparecida. Uma proposta didática para o ensino de geometria fractal em sala de aula na educação básica. **Revista VIDYA**, v. 32, n. 2, p.113-132, jul./dez., 2012 - Santa Maria, 2012.

NUNES, Raquel Sofia Rebelo. **Geometria fractal e aplicações**. 2006. 78 f. Dissertação (Mestre em Ensino da Matemática) - Faculdade de Ciências da Universidade de Porto, Porto, 2006.

OLIVEIRA, Naysa Crystine Nogueira. Geometria. **Mundo educação**. Disponível em: < <https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/geometria-1.htm> >. Acesso em: 09 de set. 2020.

PAULA, C. E. S. de; SOUZA, T. M. R. de. Uma abordagem da geometria fractal para o ensino médio. C.Q.D-**Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 10, p. 135-148, dez. 2017. Edição Ermac. Disponível em: < <https://www.fc.unesp.br/#!/departamentos/matematica/revista-cqd/> >. Acesso em: 07 nov. 2020.

PACHECO, Marina Buzin; ANDREIS, Greice da Silva Lorenzzetti. Causas das dificuldades de aprendizagem em Matemática: percepção de professores e estudantes do 3º ano do Ensino Médio. **Revista Principia**, João Pessoa, n.38, p. 105-119, 2018.

RABAY, Yara Silvia Freire. **Estudo e aplicações da geometria fractal**. 2013. 103 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.

RIOS DE CONHECIMENTO. **Rios e redes hidrográficas**. Disponível em: < <https://riosdeconhecimento.wordpress.com/rioseredeshidrograficas/> >. Acesso em 23 de out. 2020.

ROBERTSON, Edmund. O'CONNOR, John. **MacTutor**, 1999. The MacTutor History of Mathematics archive. Disponível em: < <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Mandelbrot/> >. Acesso em: 15 dez. 2020.

ROBERTSON, Edmund. O'CONNOR, John. **MacTutor**, 1998. The MacTutor History of Mathematics archive. Disponível em: < <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cantor/> >. Acesso em: 15 dez. 2020.

ROBERTSON, Edmund. O'CONNOR, John. **MacTutor**, 1997. The MacTutor History of Mathematics archive. Disponível em: < <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Sierpinski/> >. Acesso em: 15 dez. 2020

ROBERTSON, Edmund. O'CONNOR, John. **MacTutor**, 2000. The MacTutor History of Mathematics archive. Disponível em: < <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Koch/> >. Acesso em: 15 de dez. 2020.

ROSAL, Elias. Pesquisadores do Inpe desvendam porque os raios se ramificam e piscam. **Jornal O Sollo.com**. 09 dez. 2020. Disponível em: < <https://osollo.com.br/pesquisadores-do-inpe-desvendam-por-que-os-raios-se-ramificam-e-piscam/> >. Acesso em: 25 jan. 2021.

SALLUM, Élvia Mureb. Fractais no ensino médio. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, v. 57, 2005. Disponível em: <<https://www.rpm.org.br/cdrpm/57/1.htm>>. Acesso em: 18 jun. 2020.

SILVA, Miriem Martins da; SOUZA, Wallysonn Alves de. Dimensão Fractal. **Revista Eletrônica de Matemática**, 2010. Disponível em: <<https://www.rpm.org.br/cdrpm/57/1.htm>>. Acesso em: 15 dez. 2020.

SILVA, Kauê Matsumoto. **Fractais e algumas aplicações ao ensino**. 2015. 81 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em licenciatura em Matemática)-Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, São Paulo, 2015.

SIQUEIRA, R. Desenvolvido por um grupo de pesquisadores, **Fractarte**. 18 de Abr. 2005. Disponível em: <<http://www.insite.com.br/fractarte/artigos.php>>. Acesso em: 22 dez. 2020.

SONZA, A. P. LEIVAS, J. C. P. Explorando a Geometria Fractal no Ensino Médio por meio de uma Oficina Pedagógica. **Revista Thema**, v.15, n. 4, p. 1549-1561, 2018. Disponível em: < <http://periodicos.ifsul.edu.br/index.php/thema/article/view/1122>>. Acesso em: 15 de nov. de 2020.

SULEIMAN, Anal Rahif. Fractais: Possibilidades Pedagógicas na educação básica. **Ensino da Matemática em Debate**, São Paulo, v. 6, n. 1, p. 61-83, 2019.

TEDx Talks. **Fractais- natureza, arte e ciência**, Luiz Bevilacqua. 2014. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=qNdLYTf6gCo>>. Acesso em 14 out. 2020.

VARGAS, Andressa Franco *et al.* Aprendendo matemática através de fractais: Uma experiência no ensino médio. In: Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul, 20., 2014, Bagé-RS. **Anais...** Bagé: UNIPAMPA, 2014. p. 766-774.

VIEIRA, W. M. SANTOS, B. F. BORGES, T. R. LOVATO, A. T. Os fractais: Geometria de formas irregulares. **Ciclo revista** (ISSN 2526-8082). v. 3 n.1, 2018. Disponível em: < <https://ifgoiano.edu.br/periodicos/index.php/ciclo/article/view/748>>. Acesso em: 11 nov. 2020.

Wikiwand. **Imagens geradas por computador**, 2014. Disponível em: < https://www.wikiwand.com/pt/Imagens_geradas_por_computador>. Acesso em: 22 out. 2020.

Wikiwand. **Fractal**, 2018. Disponível em: < <https://www.wikiwand.com/pt/Fractal>>. Acesso em: 23 out. 2020

ZABALA, Antoni. **A prática educativa**: como ensinar. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

ZANOTTO, Ricardo Anselmo. **Estudo da Geometria Fractal clássica**. 2015. 67 f. Dissertação (Mestre em Matemática)-Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, Jataí, 2015.