



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL
E TECNOLÓGICA INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E
TECNOLOGIA DO TOCANTINS
CAMPUS PALMAS
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

AZENATI SOUZA DE JESUS

UM BREVE ESTUDO SOBRE A EQUAÇÃO DO CALOR

**PALMAS, TO
2021**

AZENATI SOUZA DE JESUS

UM BREVE ESTUDO SOBRE A EQUAÇÃO DO CALOR

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Tocantins - Campus *Palmas*, como exigência à obtenção do grau de graduação em Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Msc. Edson Luiz Kraemer

PALMAS,TO

2021

AZENATI SOUZA DE JESUS

UM BREVE ESTUDO SOBRE A EQUAÇÃO DO CALOR

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Tocantins - Campus *Palmas*, como exigência à obtenção do grau de graduação em Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Msc. Edson Luiz Kraemer

Trabalho **Aprovado**. Palmas, 08 de Março de 2021:

Msc. Edson Luiz Kraemer

Orientador - IFTO

Msc. Francisco Romero Araújo Nogueira

Convidado - IFTO

Dr. Carlos Eduardo da Silva Santos

Convidado - IFTO

PALMAS, TO

2021

S719b Souza de Jesus, Azenati

Um breve estudo sobre a equação do calor / Azenati Souza de Jesus. –
Palmas, TO, 2021.

60 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) –
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins, Campus
Palmas, Palmas, TO, 2021.

Orientador: Me. Edson Luiz Kraemer

1. Equação Unidimensional do Calor. 2. Equação Diferencial Parcial. 3.
Lei de Fourier. I. Luiz Kraemer, Edson. II. Título.

CDD 510

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) - Bibliotecas do Instituto Federal do Tocantins

DEDICATÓRIA

Aos meus amados pais, Lenice e Adão, e a minha querida irmã, Lídia. Obrigada por todo o suporte durante minha carreira estudantil. Amo vocês.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus, por tudo. Sem o seu cuidado jamais conseguiria ir tão longe.

Meu sincero agradecimento ao Prof. Msc. Edson Luiz Kraemer, por ser sempre instigador em suas aulas, pela excelente orientação e paciência durante todo esse trabalho.

Agradeço a minha querida amiga, Leticia Ferreira, por toda companhia, ajuda e palavras de motivações. Te amo.

À todos que fazem parte do IFTO - Campus Palmas pelo excelente suporte ao estudante.

Aos professores do curso de Licenciatura em Matemática por todos os ensinamentos. Sem o que aprendi com vocês não teria chegado aqui.

Agradeço a minha família, em especial, meu irmãos, por sempre serem tão bons e pacientes comigo. Amo cada um de vocês.

Ao Arthur, por ter me ajudado com Latex, muito obrigado por esclarecer minhas dúvidas à respeito do programa.

Ao Mateus por ter me ajudado inúmeras vezes corrigir ou adicionar algo sobre as configurações do Latex. Muito obrigada.

Agradeço a Mirene, por todas as companhias e conversas durante nossas viagens de *bus*.

Agradeço a todas as pessoas que, de forma direta ou indireta, me ajudaram à concluir este trabalho.

RESUMO

A Equação do Calor é uma Equação Diferencial Parcial (EDP) e sua teoria foi proposta pela primeira vez por Jean Baptiste Joseph Fourier em 1822, no seu trabalho intitulado como *Théorie Analytique de la Chaleur*¹, que teve como objetivo modelar como o calor se difunde através de uma determinada área. O objetivo central deste trabalho é apresentar um breve estudo sobre a equação unidimensional do calor e como é possível chegar nela usando a Lei de Fourier e também analisar as suas três principais condições de fronteira e, como pode-se chegar nas suas resoluções usando o método de separação de variáveis. Propõe-se, assim, apresentar e estudar a equação e algumas de suas aplicações não somente nas áreas de Matemática e Física, mas também no ramo agrícola, biologia e economia. Sob essa óptica, é notório perceber a importância da Equação do Calor.

Palavras-chaves: Equação Unidimensional do Calor; Equação Diferencial Parcial (EDP); Lei de Fourier; Condições de fronteira.

¹O trabalho de Fourier intitulado em português como *Teoria Analítica do Calor*, pode ser encontrado gratuitamente em inglês através do seguinte link: <https://www.cambridge.org/core/books/theorie-analytique-de-la-chaaleur/6A2F7B17FC2BCBDA255300D171C95B34>.

ABSTRACT

The Heat Equation is a Equation Partial Differential (EPD) and its theory was first proposed by Jean Baptiste Joseph Fourier in 1822, in his work entitled *Theorie Analytique de la Chaleur*, which aimed to model how heat diffuses through a given area. The main objective of this work is to present a brief study on the one-dimensional heat equation and how it is possible to arrive at it using Fourier's Law and also to analyze its three main boundary conditions and, how it can be reached in its resolutions using the method of separation of variables. It is proposed, therefore, to present and study the equation and some of its applications not only in the areas Mathematics and Physics, but also in the agricultural field, biology and economics. From this perspective, it is notorious to realize the importance of the Heat Equation.

Key-words: One-Dimensional Heat Equation; Partial Diferential Equation (PDE); Fourier's Law; Boundary conditions.

Sumário

Introdução	11
1 CONCEITOS PRELIMINARES	13
1.1 Equações Diferenciais Parciais	13
1.1.1 Ordem e Linearidade de uma Equação Diferencial parcial	14
1.1.2 Equações Diferenciais Parciais de Segunda Ordem	15
1.2 Funções Ortogonais	17
1.2.1 Produto Interno em Espaços de Funções	17
1.2.2 Funções Ortogonais	18
1.2.3 Conjuntos Ortogonais	18
1.3 Séries de Fourier	19
1.4 Alguns Conceitos da Termodinâmica	23
1.4.1 Equação Fundamental da Calorimetria	24
1.4.2 Transferência de Calor	24
2 EQUAÇÃO DO CALOR	26
2.1 Equação do Calor na Barra Finita	27
2.2 O Problema Fundamental da Condução do Calor	30
2.3 Condições Iniciais e de Contorno	30
3 RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO UNIDIMENSIONAL DO CALOR	33
3.1 Condições de Contorno Tipo Dirichlet	33
3.2 Condições de Contorno Tipo Neumann	37
3.3 Condições de Contorno Tipo Mista: Dirichlet-Neumann (Ou Condição de Robin) . .	42
4 APLICAÇÕES DA EQUAÇÃO DO CALOR	48
4.1 O Movimento Browniano (MB)	48
4.1.1 O movimento browniano e a equação do calor	49
4.1.2 Como Albert Einstein relacionou o movimento browniano com a equação do calor	49
4.1.3 A prova da existência do movimento browniano por Albert Einstein	49
4.1.4 Aplicações do Movimento Browniano	51
4.2 Variações de Temperatura do Solo via Equação do Calor	51

4.2.1	A importância dos estudos relacionados a temperatura	52
4.2.2	Como a Equação do calor se relaciona com a Variação de Temperatura do Solo	52
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	54
	Referências Bibliográficas	56
A	Script do Octave Para Gráfico de $u(x,t)$ com Condição de Dirichlet	58
B	Script do Octave Para Gráfico de $u(x,t)$ com Condição de Neumann	59
C	Script do Octave Para Gráfico de $u(x,t)$ com Condição de Robin	60

INTRODUÇÃO

A Equação do Calor tem sido objeto de estudo de vários pesquisadores e em diversas áreas. Na estatística, a equação do calor é utilizada no estudo do Movimento Browniano (MB) (KOZDRON, 2008). Na química, a equação de difusão é uma versão mais geral da equação do calor, relacionada principalmente com o estudo de processos de difusão química. A equação do calor também é usada no estudo de variações de temperatura no solo (LIMA; ARAÚJO, 2019), sendo de grande importância no ramo agrícola. E uma de suas grandes contribuições foi quando em 1982 Richard Hamilton iniciou um estudo do Fluxo de Ricci (HAMILTON, 1982), que é considerada uma generalização não linear da equação do calor e, devido a esse estudo feito por Hamilton o G. Parelman conseguiu utilizá-los para provar a Conjectura de Poincaré, que foi um dos problemas do milênio, ao provar um resultado ainda mais geral, a Conjectura de geometrização de Thurston.

A Conjectura de Poincaré é uns dos mais famosos problemas da Matemática. Ela afirma que todo espaço tridimensional fechado sem buracos tem uma forma esférica (VIANA,). A mesma foi formulada no início do século XX, pelo matemático francês Henri Poincaré, e permaneceu durante cem anos sem solução até que em 2003 Gregori Parelman publicou vários artigos científicos com a solução. A conjectura durante o século XX motivou vários estudos e avanços na Geometria e na Topologia (CONJECTURA... ,).

Ainda outro exemplo, ao qual voltaremos no final deste trabalho, de aplicação da equação do calor, temos o Movimento Browniano que foi comprovado utilizando os estudos do Joseph Fourier sobre Teoria Analítica do Calor. O MB é aplicado em diversas áreas e umas das mais notáveis é no ramo da estatística onde ele é utilizado para descrever movimentos de curto e médio prazo imprevisíveis dos ativos no mercado financeiro (CASTRO, 2018). O Diretor-geral do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Marcelo Viana, em uma palestra sobre a Universalidade da Matemática no Instituto Nacional de Tecnologia (INT) em 2018 evidenciou que o movimento browniano e a dinâmica dos preços das ações seguiam o mesmo modelo matemático, onde essa relação entre os dois se dá “pela colisão dos átomos com partículas maiores ou pela ação dos pequenos investidores no conjunto dos preços das ações” e como resultado desses pequenos impactos temos o movimento oscilatório, onde ambos são explicados pela equação do calor.

A história da equação do calor, o fato de que quando menos se espera ela “se apresenta” como modelo matemático base para outros avanços, ou meramente como coadjuvante para explicar outros fenômenos realça sua importância e justifica o interesse acadêmico pelo estudo da mesma. Mesmo um estudo introdutório já é justificado pelo exposto acima.

O trabalho foi proposto para dar continuidade aos estudos de Equações Diferenciais Ordinárias

(EDO) uma disciplina do IFTO - *Campus Palmas* ofertada no 6º período do Curso de Licenciatura em Matemática, tendo como o objetivo principal deduzir a Equação do Calor e sua resolução com três diferentes tipos de condições pré-estabelecidas, que devem ser satisfeitas pela solução da equação. O processo de resolução envolve o método de separação de variáveis que consiste em desmembrar a equação diferencial parcial em equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordem cuja resolução foi tema de estudos na disciplina mencionada no início deste parágrafo. Esse processo de construção do novo conhecimento com base no que aprendemos na graduação chamou-se atenção como uma aplicação mais profunda dos conhecimentos adquiridos em sala de aula.

O método de pesquisa utilizado foi a pesquisa ou estudo exploratório que é um procedimento metodológico que tem como objetivo possibilitar uma familiaridade maior com o tema, já que o objeto de estudo, a equação do calor, era pouco conhecido pelo autor e por isso se fez a necessidade de se empenhar em pesquisas bibliográficas à respeito do assunto com objetivo de aumentar o que já era sabido sobre a Equação do calor.

O presente trabalho foi dividido em cinco capítulos. No primeiro capítulo, além da definição formal de Equação Diferencial Parcial, são apresentados alguns conceitos matemáticos e físicos necessários para a dedução da equação do calor, bem como para a obtenção de uma solução da mesma equação. A dedução da equação do calor, usando a Lei de resfriamento de Fourier, é apresentada no capítulo dois. No terceiro capítulo, é apresentado o processo de obtenção de uma solução da Equação Unidimensional do Calor com condições de fronteira homogênea. No capítulo quatro são apresentadas dois exemplos que evidenciam a importância da equação do calor. O primeiro descreve como a equação do calor fez parte do trabalho de Albert Einstein sobre o movimento browniano (KOZDRON, 2008). Através dos estudos desse movimento Jean Perrin conseguiu obter excelentes resultados experimentais que foi capaz de tirar as dúvidas da comunidade de física, sobre a existência dos átomos e moléculas. No segundo exemplo é abordado o fato de como a equação do calor é importante no ramo agrícola (LIMA; ARAÚJO, 2019), em estudos sobre temperatura do solo e sua importância prática em processos de germinação de semente. E por fim, no capítulo cinco, são apresentadas as considerações finais.

Capítulo 1

CONCEITOS PRELIMINARES

A Equação Diferencial Parcial (EDP) descreve a relação entre uma função desconhecida e suas derivadas parciais. As EDPs tem bastante relevância nas áreas de Matemática, Física e engenharias, sendo que grande parte de sua aplicabilidade se encontra nas duas últimas áreas citadas. Evidenciando sua aplicabilidade Silva (2020) apresenta em seu trabalho algumas aplicações das EDPs na área de Engenharia, abordando a Equação do Calor, Dinâmica das Populações e Engenharia Estrutural. Me-deiros (MEDEIROS, 2016) também aborda em seu trabalho a importância das equações diferenciais nos dias de hoje, destacando as várias áreas em que as mesmas podem ser aplicadas.

É por essa multiplicidade de aplicações que o estudo de equações diferenciais se faz tão importante. Ela representa a dualidade do rigor matemático, com todas as suas definições e conceitos e a sua prática, com o estabelecimento de modelos que tendem a se aproximar do real. Assim, além de fazerem parte de alguns cursos de ciências exatas, elas servem como ferramenta de estudo em outras áreas buscando análise das suas próprias experiências (MEDEIROS, 2016, pg.16).

Antes de passar à abordagem da equação do calor, vamos conceituar e classificar o que vem a ser uma equação diferencial parcial do ponto de vista geral. Isso será feito neste capítulo, a partir da próxima seção. Para este propósito, tomaremos como base os textos contidos em (ZILL, 2001), (NAGLE, 2012) e (IÓRIO, 2005).

1.1 Equações Diferenciais Parciais

Dada uma função $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, forma geral de uma EDP para uma função de $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, com $n \in \mathbb{N}$ é a função F , definida no espaço $\mathbb{R}^{2n}$ dimensional como segue:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}) = 0 \quad (1.1)$$

em que $x_1, x_2, \dots, x_n$ são as variáveis independentes, u é a função desconhecida e u_{x_i} representa a derivada parcial da função u em relação a cada uma das n variáveis independentes, isto é,

$$u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Para exemplificar, são apresentadas algumas das equações diferenciais parciais clássicas da Física Matemática. Essas estão entre as mais estudadas da história da ciências devido às suas aplicações nos mais variados ramos de conhecimento. São elas,

- Equação unidimensional do calor : $u_t = \alpha^2 u_{xx}$
- Equação bidimensional do calor : $u_t = \alpha^2 (u_{xx} + u_{yy})$
- Equação unidimensional da onda : $u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}$
- Equação bidimensional da onda : $u_{tt} = \alpha^2 (u_{xx} + u_{yy})$
- Equação bidimensional de Laplace : $u_{xx} + u_{yy} = 0$
- Equação tridimensional de Laplace: $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$

1.1.1 Ordem e Linearidade de uma Equação Diferencial parcial

A **ordem** de uma EDP é definida pela a derivada mais alta da equação. Se a derivada mais alta tiver ordem k , logo a equação terá ordem k . Como, por exemplo, a equação $u_{tt} - u_{xx} = f(x, t)$ é uma equação de segunda ordem, enquanto $u_t + u_{xxxx} = 0$ é uma equação de quarta ordem.

Antes de definir a linearidade de uma EDP é importante saber que a parte da equação que contém as derivadas de maior ordem é chamada de **parte principal**. Por exemplo, na equação (1.2), as partes principais são,

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Agora pode-se dizer que a EDP (1.1) é **linear** se F é linear em relação u e a todas as suas derivadas parciais. Caso contrário, a EDP é dita **não-linear**. A *equação de Poisson*,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = h(x, y),$$

é um exemplo de uma equação **linear** de segunda ordem que está associada a fenômenos físicos estacionários. Temos também que a própria, *equação do calor*, é um exemplo de uma EDP linear. A equação $xu_{xx} + yu_{yy} + u^2 = 0$ é dita **não-linear**. Dentre as equações *não lineares*, as que possuem a parte principal *linear* são chamadas **semi-lineares**. Abaixo são apresentados alguns exemplos de EDPs lineares e semi-lineares que foram obtidos no livro (IÓRIO, 2005), omitiremos aqui os exemplos de EDPs não lineares.

Exemplo 1.1.1. A equação

$$xu_x - yu_y = \sin(xu)$$

é uma EDP linear de primeira ordem.

Exemplo 1.1.2. A equação KdV (Korteweg e deVries)

$$u_t = u_{xxx} + uu_x$$

é semi-linear de terceira ordem.

Exemplo 1.1.3. A equação bidimensional da onda, que é uma das equações clássicas,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

é linear e de segunda ordem.

1.1.2 Equações Diferenciais Parciais de Segunda Ordem

A partir de agora vamos nos ater ao caso da EDP de segunda ordem lineares. Para o propósito deste trabalho, são suficientes os conceitos dessa classe de equações diferenciais parciais.

O caso mais geral da equação diferencial parcial linear de segunda ordem em duas variáveis independentes é dada pela seguinte equação:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G \quad (1.2)$$

onde os coeficientes A , B e C são funções de x e y e nesse caso vamos assumir que esses coeficientes não serão simultaneamente nulos, devido ao fato que estamos tratando de uma EDP de segunda ordem. E os coeficientes D , E e F também são assumidos como funções de x e y . Quando $G(x, y) = 0$ a equação se diz **homogênea** e em caso contrário, é **não-homogênea**.

A classificação das EDPs de segunda ordem depende da parte principal da equação, onde se encontra os termos de segunda ordem. Então reescreveremos a equação (1.2) da seguinte forma:

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \phi \left(x, y, u \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1.3)$$

a equação (1.3) também pode ser escrita da seguinte forma:

$$A(x, y)u_{xx} + B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} = \phi(x, y, u, u_x, u_y)$$

Existe fundamentalmente três tipos de EDPs de segunda ordem: **Elípticas**, **Parabólicas** e **Hiperbólicas**. Do ponto de vista físico elas representam respectivamente o estado estacionário ou processo de equilíbrio, os processos de difusão e a propagação da onda. Conforme os exemplos 1.1.4, 1.1.5 e 1.1.6

Exemplo 1.1.4. *A equação de Laplace*

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

é elíptica.

Exemplo 1.1.5. *A equação unidimensional do calor*

$$u_t - u_{xx} = 0$$

é parabólica.

Exemplo 1.1.6. *A equação da onda*

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

é hiperbólica.

Matematicamente, a classificação das EDPs de segunda ordem é baseada na redução da equação (1.3) pela transformação de coordenadas para a forma canônica ou normal. Para classificar a EDP de segunda ordem (1.3) no ponto (x_0, y_0) dependemos do sinal do discriminante (Δ) que é definido da seguinte forma:

$$\Delta(x_0, y_0) \equiv \begin{vmatrix} B & 2A \\ 2C & B \end{vmatrix} = B(x_0, y_0)^2 - 4A(x_0, y_0)C(x_0, y_0)$$

Se $\Delta(x_0, y_0) > 0$ a equação é hiperbólica, $\Delta(x_0, y_0) = 0$ a equação é parabólica e $\Delta(x_0, y_0) < 0$ a equação é elíptica. A terminologia **Elíptica, Parabólica e Hiperbólica** escolhida para classificar as EDPs reflete a relação entre a forma do discriminante, $B^2 - 4AC$, para as EDPs e o discriminante, $B^2 - 4AC$, que classifica as seções cônicas, que é dada por:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

O tipo de curva representada pela seção cônica depende do sinal do discriminante $\Delta \equiv B^2 - 4AC$. Pois, se $\Delta > 0$ a curva é um hipérbole, $\Delta = 0$ a curva é uma parábola e com $\Delta < 0$ a curva é uma elipse. Para ilustrar esses conceitos, e o processo de classificação, segue-se o exemplo 1.1.7.

Exemplo 1.1.7. *Classifique as equações abaixo:*

$$a) 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial x^2} \quad b) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad c) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Solução: a) Vamos escrever a equação da seguinte forma:

$$3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x^2} = 0$$

Podemos identificar os valores dos coeficientes $A = 3$, $B = 0$ e $C = 0$. Como $B^2 - 4AC = 0$, temos que a equação é parabólica.

b) Com $A = 1$, $B = 0$ e $C = 1$, temos que $B^2 - 4AC = -4 < 0$. Logo, a equação é elíptica.

c) Vamos escrever a equação da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Os valores de $A = 1$, $B = 0$ e $C = -1$, temos que $B^2 - 4AC = 4 > 0$. Logo, a equação é hiperbólica.

Agora que sabe-se um pouco mais sobre as Equações Diferenciais Parciais será iniciado na próxima seção alguns conceitos importantes para facilitar a resolução da Equação do Calor.

1.2 Funções Ortogonais

Com vistas à construção da solução da EDP do calor, é necessário estabelecer critérios matemáticos para decidir quando duas funções, em um espaço de funções, são ortogonais. Essa informação é crucial. É devido à ortogonalidade que é possível determinar a forma final da solução de uma EDP. Antes de falar de ortogonalidade de funções porém, precisamos estabelecer as bases para a introdução deste conceito.

Consideremos X um espaço vetorial com produto interno. Com isso assumimos que em X estão definidos uma norma, isto é, uma maneira de medir a distância entre seus elementos e, um produto interno. Este último é a ferramenta necessária para verificar a ortogonalidade entre dois elementos do espaço em questão.

Note que não se está falando de dimensão do espaço X . Esta pode, a rigor, ser infinita. Este é de fato o caso aqui. A solução de uma equação diferencial parcial, quando existe, se for uma função (ou uma aproximação de uma função) deve ser procurada em um espaço de funções. Tais espaços são objetos de estudo da disciplina de Análise Funcional. Esta é uma disciplina de um curso de pós graduação *Stricto Sensu* em matemática pura ou aplicada. Por esta razão, a contextualização dos conceitos será mínima, cumprindo apenas o objetivo de atribuir um sentido aos termos matemáticos utilizados ¹. Não será por isso, no entanto, que o objetivo do trabalho será prejudicado.

1.2.1 Produto Interno em Espaços de Funções

Seja X o espaço de todas as funções integráveis, no sentido da teoria de integração de Lebesgue², em um intervalo $[a, b]$. Todas as funções contínuas em um intervalo $[a, b]$ são Lebesgue integráveis em $[a, b]$ e, sua integral de Lebesgue coincide com a integral de Riemann.

A Definição 1.2.1 estabelece a ferramenta necessária para seguirmos adiante com o desenvolvimento do objetivo do trabalho.

¹Um excelente texto para quem deseja iniciar um estudo completo da disciplina de análise funcional é o livro *Introductory Functional Analysis with Applications* de Erwin Kreyszig

²Há bons livros sobre medida e integração, publicados pelo IMPA, que tratam da teoria de integração de Lebesgue. Um clássico sobre o tema é o livro de Valter Rudin intitulado *Principles of Mathematical Analysis*

Definição 1.2.1. *Sejam funções $f_1 \in X$ e $f_2 \in X$. O produto interno de $f_1 \in X$ com $f_2 \in X$, denotado $\langle f_1, f_2 \rangle$ é definido por*

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx$$

De fato, é possível, provar que para quaisquer duas funções em X , valem as seguintes propriedades:

1. $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$ (propriedade comutativa)
2. $\langle kf, g \rangle = \langle f, kg \rangle = k \langle f, g \rangle$, para todo k escalar real (ou complexo)
3. $\langle f, f \rangle$ é não negativo e $\langle f, f \rangle = 0$ se, e somente se, $f \equiv 0$ em $[a, b]$.
4. $\langle f, g + h \rangle = \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle$ (propriedade distributiva)

1.2.2 Funções Ortogonais

Na Seção 1.2.1 foi definido o produto interno em um espaço de funções. A seguinte definição estabelece um critério de ortogonalidade entre dois elementos (funções) f e g do espaço X . A definição é seguida por um exemplo ilustrativo.

Definição 1.2.2. *Duas funções f_1 e f_2 são ortogonais em um intervalo $[a, b]$ se*

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx = 0$$

Exemplo 1.2.1. *Mostre que as funções $f_1(x) = x^2$ e $f_2(x) = x^3$ são ortogonais se considerado X o conjunto das funções integráveis no intervalo $[-1, 1]$.*

Resolução: Usando a definição 1.2.2, temos:

$$\begin{aligned} \langle f_1, f_2 \rangle &= \int_{-1}^1 f_1(x) f_2(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 x^2 \cdot x^3 dx \\ &= \left. \frac{1}{6} x^6 \right|_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{6} [1 - (-1)^6] = 0 \end{aligned}$$

Então conseguimos mostrar que as funções são ortogonais.

1.2.3 Conjuntos Ortogonais

A definição de funções ortogonais remete naturalmente ao conceito de conjuntos ortogonais. Tal conjunto é definido como o conjunto onde o produto interno entre quaisquer dois elementos distintos é zero. Daqui para frente, quando dito funções ortogonais num intervalo, estará subentendido que se está sendo referido o espaço X das funções Lebesgue integráveis daquele intervalo.

Definição 1.2.3. Um conjunto de funções com valores reais $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots\}$ é denominado um conjunto **ortogonal** em um intervalo $[a, b]$ se

$$\langle \varphi_m, \varphi_n \rangle = \int_a^b \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = 0 \quad m \neq n$$

Exemplo 1.2.2. Mostre que o conjunto $\{1, \cos x, \cos 2x, \dots\}$ é ortogonal no intervalo de $[-\pi, \pi]$.

Resolução: Chamando $\varphi_0(x) = 1$ e $\varphi_n(x) = \cos nx$, temos que mostrar que

$$1. \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_0(x) \varphi_n(x) dx = 0 \text{ com } n \neq 0.$$

$$2. \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = 0 \text{ com } m \neq n.$$

Para o primeiro caso, temos

$$\begin{aligned} \langle \varphi_0, \varphi_n \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_0(x) \varphi_n(x) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx \\ &= \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{n} [\sin n - \sin(-n\pi)] = 0 \end{aligned}$$

e para o segundo caso,

$$\begin{aligned} \langle \varphi_m, \varphi_n \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] dx \\ &= \frac{1}{n} \left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \end{aligned}$$

1.3 Séries de Fourier

Nesta seção vamos introduzir um conceito central para a obtenção da solução da EDP unidimensional do calor. Seja o seguinte conjunto de funções ortogonais no intervalo $[-p, p]$

$$\left\{ 1, \cos \frac{\pi}{p}x, \cos \frac{2\pi}{p}x, \dots, \sin \frac{2\pi}{p}x, \sin \frac{3\pi}{p}x, \dots \right\}$$

Vamos supor que uma função f seja definida no intervalo $[-p, p]$ e que pode ser escrita na seguinte série trigonométrica

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{p} x + b_n \sin \frac{n\pi}{p} x \right) \quad (1.4)$$

que é conhecida como a *série de Fourier*. A escolha de $\varphi_0 = 1/2$ na Equação (1.4) foi de forma intencional para que todas as funções tivessem a mesma norma. Agora integrando ambos os lados da Equação (1.4) de $[-p, p]$ para determinarmos os coeficientes, temos

$$\int_{-p}^p f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-p}^p dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-p}^p \cos \frac{n\pi}{p} x dx + b_n \int_{-p}^p \sin \frac{n\pi}{p} x dx \right) \quad (1.5)$$

Como em cada função $\cos(n\pi x/p)$, $\sin(n\pi x/p)$, $n > 1$, é ortogonal a 1 no intervalo, então o membro direito da equação (1.5) se reduz a um único termo, ou seja,

$$\int_{-p}^p f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-p}^p dx = \frac{a_0}{2} x \Big|_{-p}^p = pa_0.$$

Resolvendo a integral em relação a_0 , temos

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) dx. \quad (1.6)$$

Multiplicando a (1.6) por $\cos(m\pi x/p)$ e integrando conseguiremos encontrar a_n .

$$\begin{aligned} \int_{-p}^p f(x) \cos \frac{m\pi}{p} x dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-p}^p \cos \frac{m\pi}{p} x dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-p}^p \cos \frac{m\pi}{p} x \cos \frac{n\pi}{p} x dx + b_n \int_{-p}^p \cos \frac{m\pi}{p} x \sin \frac{n\pi}{p} x dx \right) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Devido a ortogonalidade das funções, temos

$$\begin{aligned} \int_{-p}^p \cos \frac{m\pi}{p} x dx &= 0, \quad m > 0 \\ \int_{-p}^p \cos \frac{m\pi}{p} x \cos \frac{n\pi}{p} x dx &\begin{cases} = 0, & m \neq n \\ = p, & m = n \end{cases} \\ \int_{-p}^p \cos \frac{m\pi}{p} x \sin \frac{n\pi}{p} x dx &= 0 \end{aligned}$$

E a equação (1.7) se reduz a

$$\int_{-p}^p f(x) \cos \frac{n\pi}{p} x dx = a_n p$$

E, temos que a_n

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos \frac{n\pi}{p} x dx.$$

E de forma semelhante podemos multiplicar por $\sin(m\pi x/p)$ a equação (1.4) e integrar para encon-

trarmos b_n . E o resultado será

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sin \frac{n\pi}{p} x dx.$$

a_n e b_n são chamados de *coeficientes de Fourier*.

O exemplo a seguir ajudará a ilustrar como esse processo ocorre, quando se calcula a série de Fourier para uma função de uma variável que possui uma descontinuidade em $x = 0$. De fato, na teoria das séries de Fourier é essencial, para a existência da expansão de uma função na série que a representa, a hipótese da integrabilidade (no sentido de Lebesgue) da função para a qual se está calculando a série. Além disso, a convergência da série é garantida quando os coeficientes a_n e b_n são os coeficientes de Fourier acima. De fato, esses coeficientes, além de garantirem a convergência, fazem com que esta seja a mais rápida dentre todas as possíveis expansões da função em séries de Fourier³. Por fim, cabe mencionar que, nos pontos onde a função f é descontínua, a série de Fourier converge para a média dos limites laterais à esquerda, e à direita de f , quando no domínio, se tende para o ponto de descontinuidade.

Exemplo 1.3.1. *Desenvolva a seguinte função em série de Fourier.*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \pi - x, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Resolução: O primeiro passo é encontrarmos o termo a_0 . Com $p = \pi$, temos que

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} (\pi - x) dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\pi x - \frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Agora vamos descobrir o coeficiente a_n

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos nx dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[(\pi - x) \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx dx \right] \\ &= -\frac{1}{n\pi} \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} \end{aligned}$$

³Maiores detalhes podem ser consultados na obra de Kreyszig já mencionada.

$$= \frac{-\cos n\pi + 1}{n^2\pi} = \frac{1 - (-1)^n}{n^2\pi}.$$

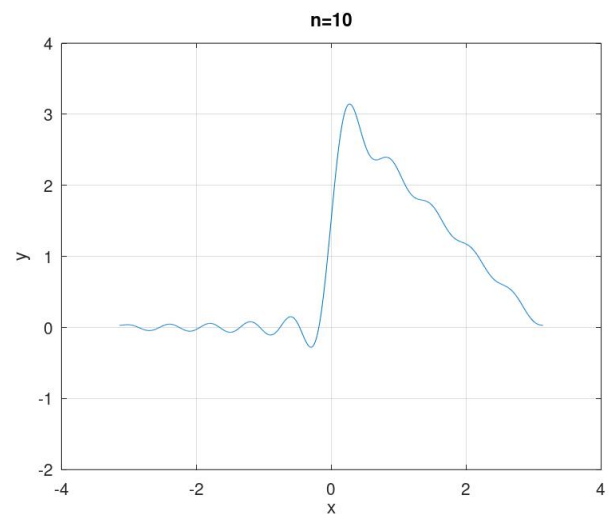
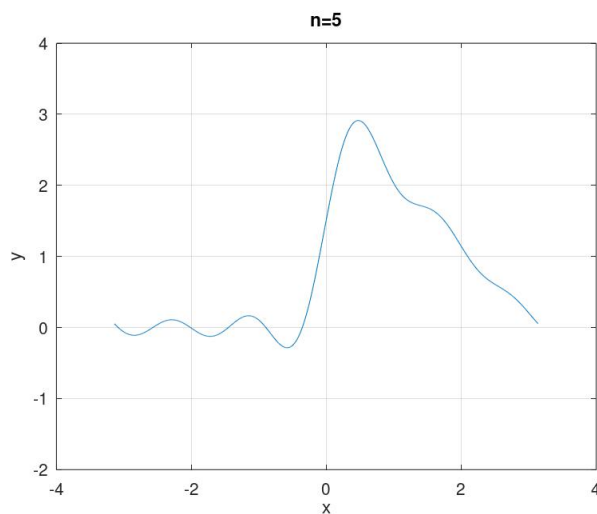
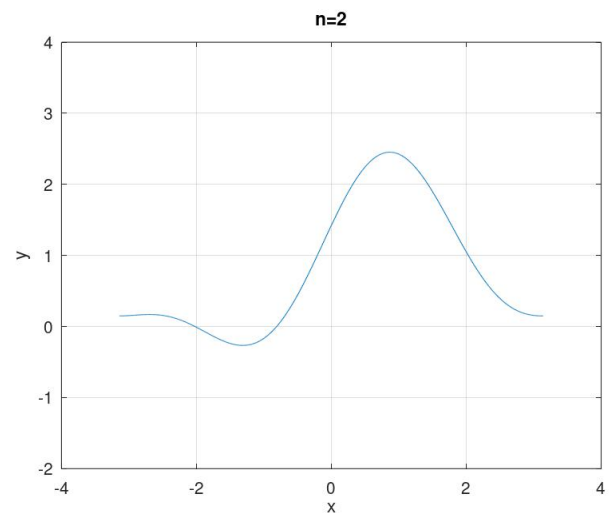
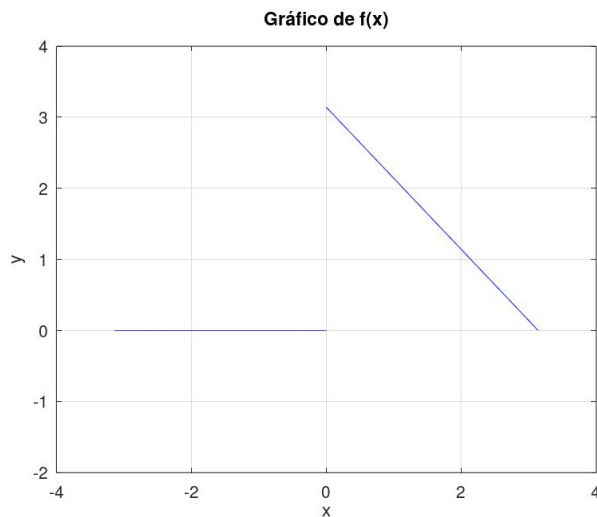
e de forma semelhante encontramos o coeficiente b_n

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\pi - x) \sin nx \, dx \\ &= \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Logo, nossa função $f(x)$ após ser desenvolvida pela série de Fourier fica da seguinte forma

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1 - (-1)^n}{n^2\pi} \cos nx + \frac{1}{n} \sin nx \right\}$$

Abaixo, temos o gráfico da função $f(x)$ e como ela se comporta para valores de n aleatórios que escolhemos.



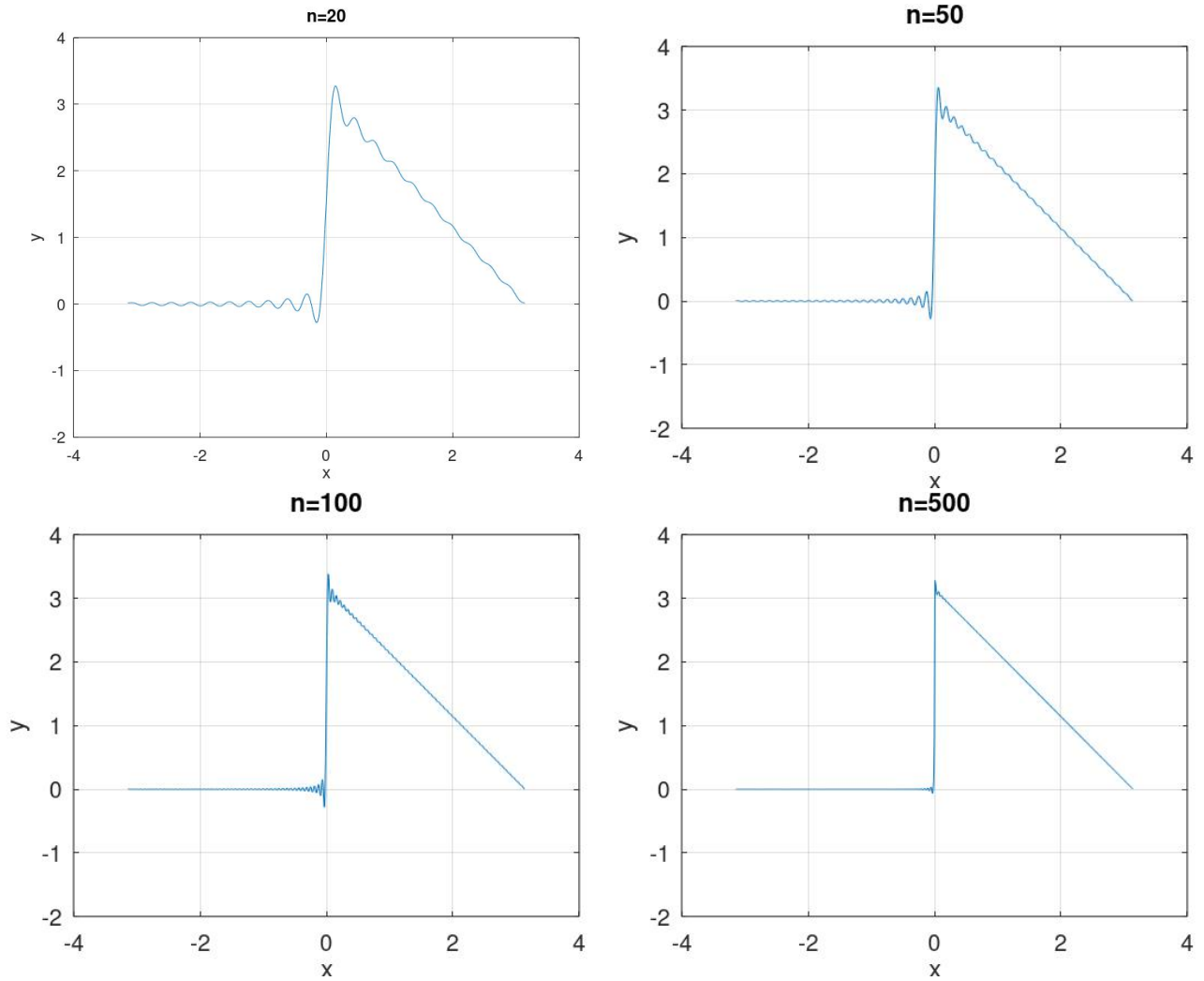


Figura 1.2: Gráfico da $f(x)$ para valores n escolhido. Fonte: Próprio autor.

O comportamento da série quando se calculam as somas parciais para os diversos valores de n . Nota-se um detalhe interessante próximo ao ponto de descontinuidade $x = 0$. Mesmo com $n = 100$, próximo de zero a convergência é mais lenta, o que não ocorre próximo de $-\pi$ e π , uma vez que a função, se estendida de modo periódico a função, seria contínua nesses pontos. Mesmo com 500 termos é possível perceber uma certa dificuldade de convergência próximo de $x = 0$, visivelmente menor, mas ainda ocorrendo. Passando ao infinito, o que é computacionalmente impossível, se teria que, para $x = 0$ a soma convergiria para $\frac{\pi}{2}$.

1.4 Alguns Conceitos da Termodinâmica

Até a seção anterior foram apresentados os conceitos matemáticos necessários para a dedução e resolução da equação do calor. Porém, alguns conceitos físicos são necessários para completar o arcabouço teórico necessário à tarefa pretendida. Eles são apresentados nesta e na próxima seção. Uma explanação mais completa pode ser obtida em (INCROPERA et al., 2008) e (DAVID; RESNICK; WALKER, 2006).

1.4.1 Equação Fundamental da Calorimetria

A equação fundamental da calorimetria é definida a partir da **capacidade térmica** e do **calor específico**, que são duas grandezas físicas muito importante na *Termologia*⁴. De acordo com Halliday *et al* (DAVID; RESNICK; WALKER, 2006) podemos definir a capacidade térmica C de um objeto como uma constante de proporcionalidade entre o calor que o objeto recebe ou cede e a variação de temperatura Δ_t dele, isto é,

$$Q = C\Delta_t. \quad (1.8)$$

Já o calor específico é uma característica que cada material tem e pode ser definido como a quantidade de calor necessária para alterar a temperatura de um determinada substância. E a partir da equação (1.8) podemos definir a equação fundamental da calorimetria, como

$$Q = m.c.\Delta_t$$

onde,

Q : é quantidade de calor;

m : é a massa da substância;

c : é o calor específico

Δ_t : é a variação de temperatura.

1.4.2 Transferência de Calor

A transferência de calor tem uma relevância significativa em todos os dispositivos de conservação e produção de energia e possui um vasto campo de aplicação. Nesta seção veremos como cada tipo de transferência de calor ocorre e alguns exemplos. Dizemos que toda vez que existir uma diferença de temperatura em um ou mais meios, necessariamente haverá transferência de calor. Incropera (INCROPERA et al., 2008) a definiu como,

Definição 1.4.1. *A transferência de calor é a energia térmica em trânsito devido a uma diferença de temperaturas no espaço.*

Essencialmente há três mecanismos para a transferência de calor: condução, convecção e radiação. A seguir estudaremos cada caso.

A Transferência de calor por meio da **condução** acontece ao nível molecular. E a mesma pode ser vista “como a transferência de energia das partículas mais energéticas para as menos energéticas de uma substância.” (INCROPERA et al., 2008). As partículas mais energéticas são aquelas que se encontram em locais com uma temperatura maior e as partículas menos energéticas se encontram a uma temperatura menor. Temos diversos exemplos de transferência de calor por condução, listaremos alguns,

- Aquecimento de uma xícara de chá ou café;

⁴Termologia é a parte da física responsável por estudar o calor.

- Aquecimento do cabo de metal de uma panela;
- Aquecimento da roupa pelo ferro elétrico;

De acordo com Incropera (INCROPERA et al., 2008) é possível quantificar os processos de transferência de calor em termos de equações de taxas apropriadas, com essas equações conseguimos calcular a quantidade de energia que é transferida por unidade de tempo, e no caso da condução, temos que essa equação da taxa é conhecida como a lei de Fourier que estudaremos posteriormente no capítulo 3.

A **convecção** tem um papel muito importante em diversos processos naturais. Os pássaros usam correntes de convecção de ar quente para ficarem mais tempo no ar, a própria convecção atmosférica é bastante importante na formação de padrões climáticos globais, os oceanos utilizam a convecção para grandes transferências de energia. Essa transferência acontece:

[...] quando um fluido, como ar ou água, entra em contato com um objeto cuja temperatura é maior que a do fluido. A temperatura da parte do fluido que está em contato com o objeto quente aumenta e (na maioria dos casos) essa parte do fluido se expande, ficando menos densa. Como esse fluido expandido é mais leve do que o fluido que o cerca, mais frio, a força do empuxo o faz subir. O fluido mais frio escoar para tomar o lugar do fluido mais quente que sobe, e o processo pode continuar indefinidamente. (DAVID; RESNICK; WALKER, 2006, pg. 201)

Citamos alguns exemplos de convecção natural onde o fluido é induzido por forças de empuxo, e suas principais causas são devido as diferenças de densidades causadas por variações de temperatura no fluido. Há também a convecção forçada que é causada por meios externos, como exemplos temos os condicionadores e os refrigeradores.

A **radiação** térmica consiste no transporte de energia por meio de ondas eletromagnéticas e acontece de forma mais eficiente no vácuo. Ao contrário da condução e da convecção a radiação não necessita de um meio material para que ocorra a transferência de energia. Como, exemplo temos que uma pequena parte da energia emitida pelo Sol é transferida por meio da radiação até a Terra.

Capítulo 2

EQUAÇÃO DO CALOR

A equação do calor é uma equação diferencial parcial **parabólica** (equações em que a variável temporal é fortemente considerada) que descreve a distribuição do calor em um determinado tempo e representa a difusão do calor em sólidos, a partir do coeficiente da difusividade térmica, do calor específico do material da barra, da densidade e também da temperatura. Neste capítulo será feito a dedução da equação do calor e o livro do (BOYCE; DIPRIMA, 2015) será utilizado para tal dedução. Mas antes, para uma melhor compreensão deste trabalho, é muito importante entender-se a diferença entre calor e temperatura.

Calor e temperatura, são conceitos comumente confundidos, pois é muito natural se comunicar no dia a dia com algumas expressões com os conceitos trocados, como por exemplo, “*hoje está calor*”, onde o sentido da palavra calor se refere a temperatura elevada. É importante notar que a sensação de frio e calor, que sentimos, está associada com a diferença de temperatura entre nosso corpo e o meio externo, ou um objeto. Porém, sentimos a sensação de frio ou calor porque há uma troca de calor entre nosso corpo e o meio externo. Quando nosso corpo cede calor temos a sensação de frio ou quente que são sensações de temperatura e não de calor. Young e Freedman também aponta a importância de entender a diferença entre esses dois conceitos,

A temperatura depende do estado físico de um material, indicando, por meio de uma descrição quantitativa, se o material está quente ou frio. Na física, o termo “calor” sempre se refere a uma transferência de energia de um corpo ou sistema para outro em virtude de uma diferença de temperatura entre eles, nunca a quantidade de energia contida em um sistema particular. Podemos alterar a temperatura de um corpo fornecendo ou retirando calor dele, ou retirando ou fornecendo outras formas de energia, como a mecânica. Quando dividimos um corpo em duas metades, cada metade possui a mesma temperatura do corpo inteiro; porém, para aumentar a temperatura de cada metade até um mesmo valor final, devemos fornecer a metade da energia que seria fornecida ao corpo inteiro (YOUNG; FREEDMAN, 2016, pg. 190)

Assim, estabelecida de forma clara a diferença entre os conceitos de calor e temperatura, importantes para a compreensão da equação do calor, passaremos à dedução da equação.

2.1 Equação do Calor na Barra Finita

Considere uma barra de comprimento L , cuja seção transversal tem área A . Suponha que a superfície lateral da barra esteja isolada termicamente, como na Figura 2.1., de modo que não haja transferência de calor com o meio externo pelas laterais da barra, ou seja, só é admitida troca de calor por meio de suas extremidades. O fluxo de calor é longitudinal e isso ocorre por conta da uniformidade do material e do seu isolamento térmico lateral.

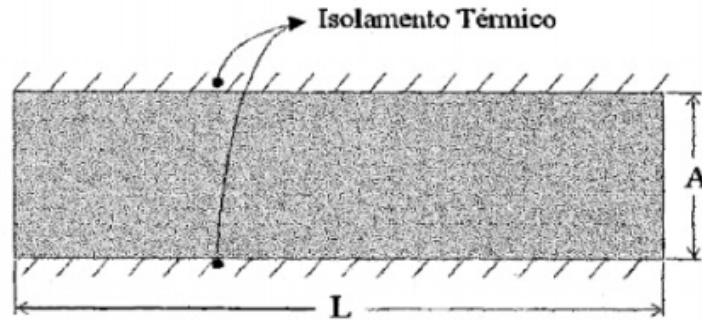


Figura 2.1: Barra isolada termicamente. Fonte: Melissa Holetz (2001).

Para o estudo da condução de calor nessa barra, será utilizado a Lei do Resfriamento de Fourier. Uma representação do significado prática dessa lei, para o presente caso em estudo, é ilustrado por meio da Figura 2.2.

Dada duas placas P_1 e P_2 , ambas com áreas iguais a A , mantidas em temperaturas constantes T_1 e T_2 , respectivamente. Sendo que a placa P_1 é paralela a placa P_2 com uma distância Δx entre elas. Desse modo, haverá transferência de calor da placa mais quente para a mais fria. E a quantidade de

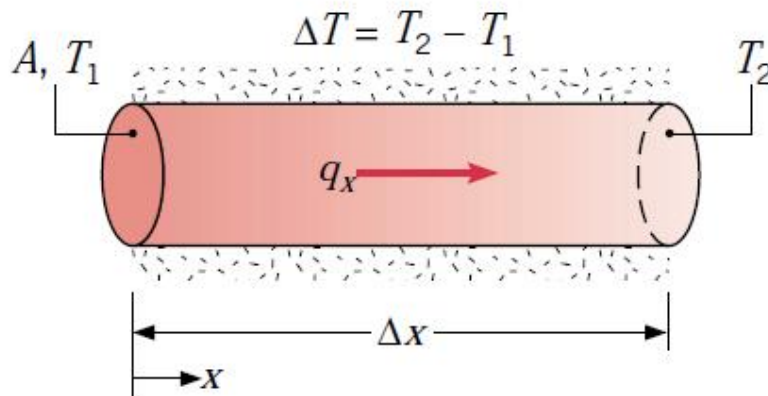


Figura 2.2: Lei de Fourier. Fonte: Diego Assunção Rosa (2018).

calor que é transmitida de uma placa a outra será:

$$Q = \frac{kA|T_1 - T_2|}{\Delta x}$$

onde $k > 0$ é a condutividade térmica do material existente entre as placas.

Considerando agora uma barra retilínea, cuja seção seja uniforme e reta e a barra seja constituída de uma material homogêneo e que seja orientada para que seu eixo coincida com o eixo x , como pode ser observado na Figura 2.3. Os pontos de encontro no eixo x da barra é $x = 0$ e $x = L$.

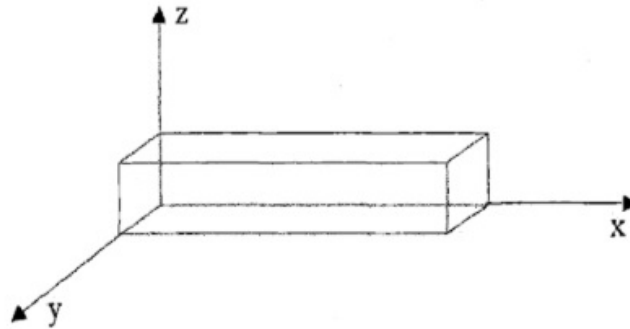


Figura 2.3: Barra com seção uniforme. Fonte: Google imagens.

Admitindo que a superfície lateral da barra esteja isolada de tal modo que não haja troca de calor por meio dela. Considerando que a temperatura u da barra dependa apenas da posição de x e do tempo t , sendo que a mesma pode ser representada por $u(x, t)$, na qual a temperatura é constante em toda a sua superfície.

A equação diferencial da barra expressa um equilíbrio físico fundamental: A taxa de calor que entra em qualquer parte da barra é igual a taxa de absorção naquela parte da barra (BOYCE; DIPRIMA, 2015). As taxas são chamadas de termo de fluxo (taxa de calor) e termo de absorção (taxa de absorção).

Para calcular o termo de fluxo admite que uma parte da barra entre $x = x_0$ e $x = x_0 + \Delta_x$ que x_0 é arbitrário e Δ_x é pequeno. As temperaturas nessas condições variam com o tempo e para recorrer a Lei de Fourier é necessário que a temperatura seja constante, logo para resolver o problema, é fundamental fixar t em $\frac{kA|T_1 - T_2|}{\Delta_x}$, fazendo $T_1 = u(x, t)$ e $T_2 = u(x + \Delta_x, t)$ e calculando seu limite quando $\Delta_x \rightarrow 0$, tem-se a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} Q &= \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \frac{kA|u(x, t) - u(x + \Delta_x, t)|}{\Delta_x} \\ &= kA \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \frac{|u(x, t) - u(x + \Delta_x, t)|}{\Delta_x} \\ &= kA|u_x(x, t)| \end{aligned}$$

Definindo o fluxo de calor na direção positiva do eixo x como uma função $q(x, t)$ dada por:

$$q(x, t) = -kA|u_x(x, t)|$$

De maneira semelhante, a taxa na qual o calor passa da esquerda para direita através da seção na reta $(x + \Delta_x)$ é dada por:

$$q(x + \Delta_x, t) = -kA|u_x(x + \Delta_x, t)|$$

Logo, a taxa líquida na qual o calor flui para o segmento da barra entre x e $x + \Delta_x$ é dada por:

$$\begin{aligned} Q &= q(x, t) - q(x + \Delta_x, t) \\ &= -kAu_x(x, t) + kAu_x(x + \Delta_x, t) \\ &= kA[u_x(x + \Delta_x, t) - u_x(x, t)] \end{aligned}$$

E a quantidade de calor que entra neste elemento de volume da barra no intervalo de tempo t_0 e $t_0 + \Delta_t$ é:

$$Q\Delta_t = kA[u_x(x + \Delta_x, t) - u_x(x, t)\Delta_x]$$

Calculando, o *termo de absorção*, a variação média da temperatura Δ_u , no intervalo de tempo Δ_t é proporcional à quantidade de calor que entrou no elemento de volume da barra e inversamente proporcional à massa Δ_m do elemento, logo:

$$\Delta_u = \frac{1}{c} \frac{Q\Delta_t}{\Delta_m} = \frac{Q\Delta_t}{c(\rho V)} = \frac{Q\Delta_t}{c(\rho Ad)}$$

onde c é o calor específico do material da barra e ρ é a densidade da substância. Sabendo que a variação de temperatura no elemento da barra é a variação real do ponto intermediário $(x + \theta d)$ e variando de 0 a 1, então pode-se escrever:

$$\Delta_u = \frac{Q\Delta_t}{c\rho Ad}$$

ou,

$$\frac{Q\Delta_t}{c\rho Ad} = u(x + \theta d, t + \Delta_t) - u(x + \theta d, t)$$

ou ainda,

$$Q\Delta_t = [u(x + \theta d, t + \Delta_t) - u(x + \theta d, t)]c\rho Ad$$

Para equilibrar os termos do fluxo e da absorção, é preciso igualar as duas expressões. E obtém-se o seguinte:

$$\begin{aligned} [u(x + \theta d, t + \Delta_t) - u(x + \theta d, t)]c\rho Ad &= kA[u_x(x + \Delta_x, t) - u_x(x, t)] \\ &= \frac{[u(x + \theta d, t + \Delta_t) - u(x + \theta d, t)]}{\Delta_t} \\ &= \frac{k}{c\rho} \frac{[u_x(x + \Delta_x, t) - u_x(x, t)]}{d} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Quando o limite de $\Delta_t \rightarrow 0$, na Equação 2.1, tem-se que $\Delta_x \rightarrow 0$ e, e obtém-se a Equação 2.2, que é uma equação diferencial parcial de segunda ordem na variável x , linear e homogênea.

$$u_t = Ku_{xx}. \quad (2.2)$$

Na Equação 2.2 a constante $K = \frac{k}{c\rho}$ representa a difusibilidade térmica. Na expressão para K tem-se que k é a condutividade térmica do material, c é o calor específico do material da barra e, ρ é

a densidade da substância.

A Equação 2.2 é a expressão matemática da lei da física que descreve a variação de temperatura em uma barra de comprimento L que é isolada termicamente em suas laterais. Essa é a chamada **Equação Unidimensional do Calor**.

2.2 O Problema Fundamental da Condução do Calor

O principal problema que há na condução do calor é encontrar $u(x, t)$ que satisfaça a equação (2.2) para $x \in [0, L]$ com $t > 0$, a condição inicial e as condições de contorno (BOYCE; DIPRIMA, 2015). Ou seja, uma solução para o problema de valor inicial e de contorno que segue:

$$\begin{cases} u_t - Ku_{xx} = 0 & x \in [0, L] \quad t \geq 0 \\ \text{Condições iniciais} \\ \text{Condições de Fronteira.} \end{cases}$$

No próximo capítulo será estudado como é possível resolver o principal problema da condução do calor. Mas antes, vamos abordar de modo breve, um pouco sobre a condição inicial e, posteriormente, sobre as condições de fronteira.

2.3 Condições Iniciais e de Contorno

No início desse capítulo viu-se que a equação do calor depende do tempo t para ser resolvida. Dito isso, podemos prefixar o que acontece com $t = 0$, ou seja, podemos fixar condições iniciais. A condição inicial é especificada da seguinte forma:

$$u(x, 0) = \varphi(x)$$

em que o termo $u(x, 0)$ representa a temperatura quando $t = 0$. Assim, essa é a função que representa a temperatura ao longo da barra no instante inicial. Através da Figura 2.4 podemos obter uma noção mais clara do que representa, $u(x, 0)$ no problema físico. Note que aqui $f(x)$ e $\varphi(x)$ representam a mesma função.

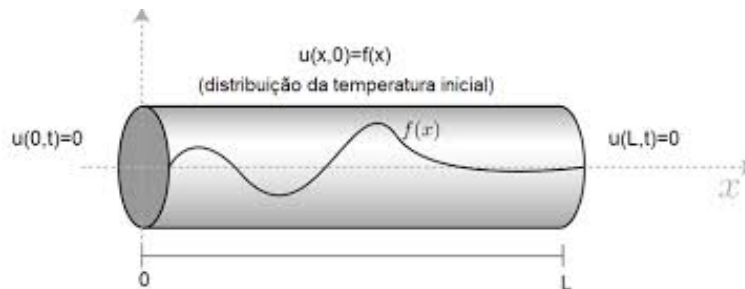


Figura 2.4: Problema de valor inicial . Fonte: Jordana F. Costa; Diogo G. Dias (2018)

A seguir, no Exemplo 2.3.1 vemos uma situação em que figuram condições iniciais para $t = 0$. Note

que a condição imposta para $u(x, 0)$ e para $u_t(x, 0)$ significam que a temperatura em cada ponto da barra é função apenas da posição e não do tempo.

Exemplo 2.3.1. *Determinar uma função $u(x, t)$ tal que u satisfaça*

$$\begin{aligned} tu_{xx} + 2xu_{xt} - tutt + t^2u_t &= e^x \cos t, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Problemas físicos geralmente possuem um domínio $D \subseteq \mathbb{R}^n$ no qual a EDP é válida. Logo, é fisicamente óbvio que é preciso especificar algum tipo de condição sobre o que deve ocorrer na fronteira desse domínio. Esse tipo de exigência é chamado de Condição de Contorno. Por exemplo, uma barra de metal submersa em um banho de água difundirá o calor de forma diferente perto da fronteira do que uma que está suspensa no ar ou isolada com cortiça. A interpretação da condição de contorno (ou fronteira) depende das grandezas físicas descritas pela EDP e a principal característica da condição de contorno é que elas não dependem do tempo. Dedicaremos no próximo capítulo a resolver a equação do calor para cada condição, mas nessa seção será falado sobre o que acontece em cada extremidade da barra para os três casos de condições de contorno.

Basicamente, as condições de contorno assumem três possíveis formulações, a saber, Condições de Contorno do tipo Neumann, do tipo Dirichlet e, do tipo mista ou Dirichlet-Neumann, também chamada de Condição de Contorno de Robin. Veremos, a seguir, que particularidades definem cada um dos tipos de condição de contorno.

Para começar, consideremos a equação unidimensional do calor

$$u_t - Ku_{xx} = 0 \text{ para todo } 0 < x < l,$$

em uma barra homogênea de comprimento l e que toda a superfície lateral da barra é isolada termicamente no seu exterior, de forma que o calor só pode fluir para a esquerda e para a direita. Avaliemos o que pode acontecer com o calor nas extremidades da barra.

Inicialmente, suponhamos que além da superfície lateral da barra, estejam isoladas também as suas extremidades. Como o calor não pode entrar ou sair da barra e o calor total é conservado. Além disso, o fluxo de calor em $x = 0$ e $x = l$ deve ser zero, uma vez que o calor não pode fluir para dentro ou para fora das extremidades da barra. Pela lei de Fourier (condução do calor), temos

$$\text{Fluxo do calor} = F(x, t) = -Ku_x(x, t),$$

onde $K > 0$ é a condutividade térmica. Então $F(0, t) = 0 = F(l, t)$ e, portanto,

$$u_x(0, t) = 0 = u_x(l, t) \text{ para todo } t \geq 0 \quad (2.3)$$

As condições de contorno (2.3) são chamadas de *condições de Neumann*.

Agora, suponha que de alguma forma conseguimos fixar a temperatura da barra em $x = 0$ e $x = l$. Então temos a condição de contorno

$$u(0,t) = a \text{ e } u(l,t) = b \text{ para todo } t \geq 0$$

que são chamadas de *condições de Dirichlet*, ou seja, nessa condição as temperaturas das extremidades da barra são conhecidas. Os valores de a e b são parâmetros correspondentes à temperatura que escolhemos para cada extremidade da barra. É bastante comum tomar $a = b = 0$.

Para fixar a temperatura em qualquer extremidade da barra, podemos tentar submergir uma das extremidades da barra em um grande reservatório de, digamos, água, com uma temperatura fixa b . A extremidade submersa da barra não mudará imediatamente a temperatura para refletir a temperatura comum do reservatório; em vez disso, a lei de resfriamento de Newton afirma que a taxa na qual a temperatura muda (ou o fluxo) é proporcional à diferença de temperatura entre a extremidade da barra e o reservatório. Assumimos que o reservatório é tão grande que sua temperatura não pode ser alterada pelo calor que flui da barra para ele e vice-versa. Portanto, em $x = l$, temos

$$\text{Fluxo do calor} = -Ku_x(l,t) = \beta(u(l,t) - b),$$

onde β é uma constante e maior que zero ($\beta > 0$). Segue que

$$u(l,t) + Bu_x(l,t) = b \text{ para todo } t \geq 0$$

para $B > 0$ e $B = \frac{K}{\beta}$. E essa condição é chamada de *condição de Robin*. Quando $B = \infty$, temos transferência instantânea de calor da barra para o reservatório, e recuperamos a condição de Dirichlet $u(l,t) = b$, uma vez, que $B = 0$. Quando $\beta = 0$ não temos transferência de calor entre a barra e o reservatório, e recuperamos a condição de Neumann $u_x(l,t) = 0$.

Na outra extremidade $x = 0$, temos

$$\text{Fluxo de calor} = -Ku_x(0,t) = -\alpha(u(0,t) - a),$$

para a constante $\alpha > 0$. A razão para o sinal menos é que o calor que flui para o reservatório agora está fluindo para a esquerda, que é a direção negativa. Descobrimos que a condição Robin aqui é

$$u(0,t) - Au_x(0,t) = a \text{ para todo } t \geq 0, \text{ em que } A = \frac{K}{\alpha} > 0$$

Todas as considerações feitas até aqui foram no sentido de estabelecer o modelo matemático para o problema unidimensional do calor em uma barra de ℓ . Culminando esse trabalho com a obtenção do modelo na Equação 2.2. O próximo passo natural é, uma vez especificadas as condições de contorno e a condição inicial, obter uma função $u(x,t)$ que atenda essas condições pré-estabelecidas e descreva como ocorre a distribuição do calor na barra à medida que o tempo evolui. Isto é o que será feito no próximo capítulo.

Capítulo 3

RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO UNIDIMENSIONAL DO CALOR

Neste Capítulo será abordada a resolução da equação unidimensional do calor, do tipo homogênea, modelada para uma barra de comprimento ℓ . Usaremos o método de separação de variáveis para obtenção de uma solução em séries de Fourier. A principal característica desse método é a substituição da equação diferencial parcial por um conjunto de equações diferenciais ordinárias. Estas, por sua vez, são resolvidas levando em consideração as condições iniciais e de contorno. Para cada tipo de condição de contorno será dedicada uma subseção deste Capítulo. Em cada subseção abordaremos o processo de resolução para o caso de condições iniciais e de contorno arbitrárias e, em seguida apresentaremos um exemplo com a resolução para uma condição particular.

3.1 Condições de Contorno Tipo Dirichlet

A característica da condição de Dirichlet é que nas extremidades da barra a temperatura deve ser mantida fixa em qualquer tempo. Isso impõe que o problema de Dirichlet apresente, conforme a equação 3.1, como segue:

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= Ku_{xx}(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u(0, t) &= 0, \quad u(l, t) = 0 \\ u(x, 0) &= \varphi(x) \end{aligned} \tag{3.1}$$

1. Separação de variáveis: Para resolvermos a equação do calor devemos procurar por soluções que apresentam a seguinte forma

$$u(x, t) = \varphi(x)\psi(t)$$

Substituindo na (3.1) e dividindo ambos os lados por $\varphi(x)\psi(t)$ temos

$$\frac{\psi'(t)}{K\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}$$

Uma vez que o lado esquerdo é independente de x e o lado direito é independente de t , segue-se que a expressão deve ser uma constante

$$\frac{\psi'(t)}{K\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \lambda$$

(Aqui ψ significa a derivada de ψ em relação a t e φ significa a derivada de φ em relação a x .) Procuramos encontrar todas as constantes possíveis λ e as funções não nulas correspondentes φ e ψ . Nós obtemos

$$\varphi'' - \lambda \varphi = 0, \quad \psi' - K\lambda \psi = 0.$$

A solução da segunda equação é

$$\psi(t) = Ce^{K\lambda t} \quad (3.2)$$

Onde C é uma constante arbitrária. Além disso, as condições de contorno dão

$$\varphi(0)\psi(t) = 0, \quad \varphi(\ell)\psi(t) = 0 \quad \text{para todo } t$$

Uma vez que $\psi(t)$ não é identicamente zero, obtemos o problema de autovalor desejado

$$\varphi''(x) - \lambda \varphi(x) = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(\ell) = 0. \quad (3.3)$$

2. Encontrar autovalores e autovetores: O próximo passo principal é encontrar os autovalores e autofunções de (3.3). Existem, em geral, três casos:

- (a) Se $\lambda = 0$ então $\varphi = ax + b$ então aplicando as condições de contorno obtemos

$$0 = \varphi(0) = b, \quad 0 = \varphi(\ell) = a\ell \Rightarrow a = b = 0$$

zero não é um valor próprio.

- (b) Se $\lambda = \mu^2 > 0$ então

$$\varphi(x) = a \cosh(\mu x) + b \sinh(\mu x)$$

Aplicando as condições de contorno teremos

$$0 = \varphi(0) = a \Rightarrow a = 0 \quad 0 = \varphi(\ell) = b \sinh(\mu\ell) \Rightarrow b = 0.$$

Portanto, não há autovalores positivos. Considerando o seguinte argumento alternativo: Se $\varphi''(x) = \lambda \varphi(x)$ e multiplicando essa expressão por $\varphi(x)$ teremos $\varphi(x)\varphi''(x) = \lambda \varphi(x)^2$. E integrando essa expressão de $x = 0$ até $x = \ell$, temos

$$\lambda \int_0^\ell \varphi(x)^2 dx = \int_0^\ell \varphi(x)\varphi''(x) dx = - \int_0^\ell \varphi'(x)^2 dx + \varphi(x)\varphi'(x) \Big|_0^\ell.$$

Como $\varphi(0) = \varphi(\ell) = 0$ concluímos

$$\lambda = - \frac{\int_0^\ell \varphi'(x)^2 dx}{\int_0^\ell \varphi(x)^2 dx}$$

e vemos que λ deve ser menor ou igual a zero.

- (c) Então, finalmente, considere $\lambda = -\mu^2$ de modo que

$$\varphi(x) = a \cos(\mu x) + b \sin(\mu x)$$

Aplicando as condições de contorno que temos

$$0 = \varphi(0) = a \Rightarrow a = 0 \quad 0 = \varphi(\ell) = b \sin(\mu \ell).$$

Disto concluímos que $\sin(\mu \ell) = 0$ o que implica

$$\mu = \frac{n\pi}{\ell}$$

e portanto

$$\lambda_n = -\mu_n^2 = -\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2, \quad \varphi_n(x) = b_n \sin(\mu_n x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

De (3.2) também temos as funções associadas $\psi_n(t) = e^{K\lambda_n t}$.

3. A Soma formal: A partir das considerações acima, podemos concluir que para qualquer número inteiro N e constantes $\{b_n\}_{n=0}^N$

$$u_N(x, t) = \sum_{n=1}^N b_n \psi_n(t) \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^N b_n e^{K\lambda_n t} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

satisfaz a equação diferencial em (3.1) e as condições de contorno.

4. Use a série de Fourier para encontrar os coeficientes: O único problema restante é, de alguma forma, escolher as constantes b_n de forma que a condição inicial $u(x, 0) = \varphi(x)$ seja satisfeita. Para fazer isso, consideramos o que aprendemos com a série de Fourier. Em particular, olhamos para u como uma soma infinita

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{K\lambda_n t} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

e tentamos achar b_n satisfatório

$$\varphi(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right).$$

Mas isso nada mais é do que uma expansão senoidal da função φ no intervalo $(0, \ell)$.

$$b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx.$$

Exemplo 3.1.1. Considere o exemplo explícito para a condição inicial, com $\ell = 1$, $K = \frac{1}{10}$ e $\varphi(x) = x(x-1)$. Lembrando que $\mu_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)$ que neste caso se reduz a $n\pi$.

$$\begin{aligned}
b_n &= 2 \int_0^1 x(x-1) \sin(n\pi x) dx \\
&= 2 \int_0^1 x(x-1) \left(-\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} \right)' dx \\
&= \frac{2}{n\pi} \left[-x(1-x) \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} \Big|_0^1 + \int_0^1 (1-2x) \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} dx \right] \\
&= \frac{2}{n\pi} \int_0^1 (1-2x) \left(\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi} \right)' dx \\
&= \frac{2}{n\pi} \left[(1-2x) \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi} \Big|_0^1 - \int_0^1 (-2) \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi} dx \right] \\
&= \frac{4}{(n\pi)^2} \int_0^1 \sin(n\pi x) dx = \frac{4}{(n\pi)^2} \left[-\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} \Big|_0^1 \right] = \frac{4[1 - (-1)^n]}{(n\pi)^3}
\end{aligned}$$

Chegamos a solução

$$u(x, t) = \frac{4}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^n]}{n^3} e^{-n^2 \pi^2 t / 10} \sin(n\pi x). \quad (3.4)$$

Note que, para $t = 0$, atendemos a condição inicial $u(x, 0) = \varphi(x)$, como pode ser observado na equação 3.5.

$$\varphi(x) = x(1-x) = \frac{4}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^n]}{n^3} \sin(n\pi x). \quad (3.5)$$

Agora, fixando $n = 3$ apenas para ilustrar a expansão da série, obtemos uma aproximação de $\varphi(x) = x(1-x)$, com base na equação 3.4, como segue,

$$\begin{aligned}
\varphi(x) = x(1-x) &= \frac{4}{\pi^3} \sum_{n=1}^3 \frac{[1 - (-1)^n]}{n^3} \sin(n\pi x) \\
&= \frac{4}{\pi^3} \left[\frac{1 - (-1)^1}{1^3} \sin(\pi x) + \frac{1 - (-1)^2}{2^3} \sin(2\pi x) + \frac{1 - (-1)^3}{3^3} \sin(3\pi x) \right] \\
&= \frac{4}{\pi^3} \left[2 \sin(\pi x) + 0 + \frac{2}{27} \sin(3\pi x) \right] \approx \frac{8}{\pi^3} \left[\sin(\pi x) + \frac{\sin(3\pi x)}{27} \right]
\end{aligned}$$

A seguir, com propósito de ilustrar como ficaria a solução $u(x, t)$, da equação 3.4 escolhemos, por comodidade $t = 1$ e escrevemos a função de x correspondente, ainda com $n = 3$.

$$\begin{aligned}
u(x, 1) &= \frac{4}{\pi^3} \sum_{n=1}^3 \frac{[1 - (-1)^n]}{n^3} e^{-n^2 \pi^2 \frac{1}{10}} \sin(n\pi x) \\
&= \frac{4}{\pi^3} \left[\frac{1 - (-1)^1}{1^3} e^{-1^2 \pi^2 \frac{1}{10}} \sin(\pi x) + \frac{1 - (-1)^2}{2^3} e^{-2^2 \pi^2 \frac{1}{10}} \sin(2\pi x) + \frac{1 - (-1)^3}{3^3} e^{-3^2 \pi^2 \frac{1}{10}} \sin(3\pi x) \right] \\
&= \frac{4}{\pi^3} \left[2e^{-\frac{\pi^2}{10}} + \frac{2e^{-\frac{9\pi^2}{10}} \sin(3\pi x)}{27} \right] = \frac{8}{\pi^3} \left[e^{-\frac{\pi^2}{10}} \sin(\pi x) + \frac{e^{-\frac{9\pi^2}{10}} \sin(3\pi x)}{27} \right]
\end{aligned}$$

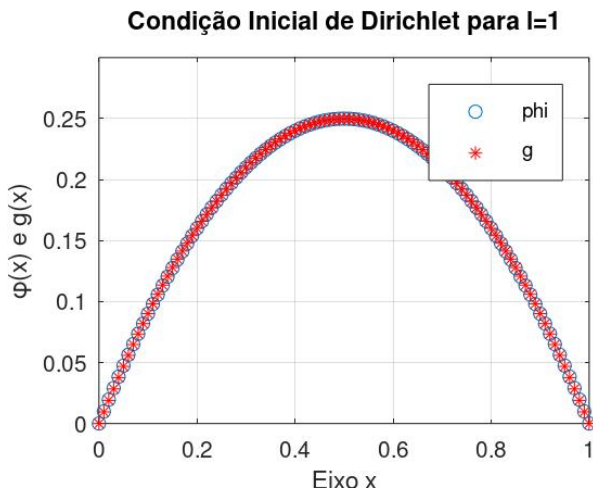
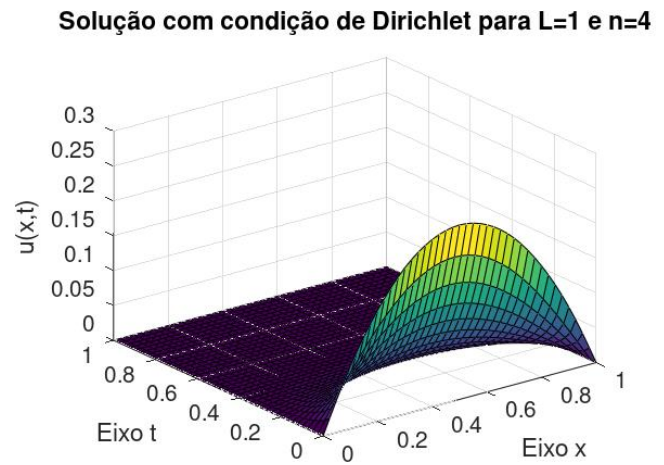
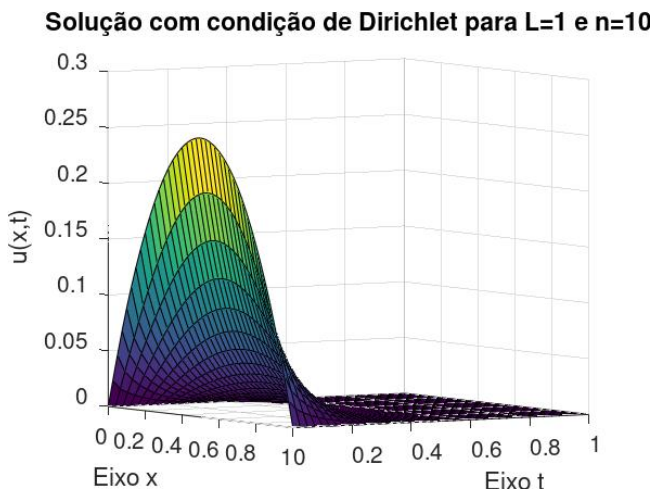
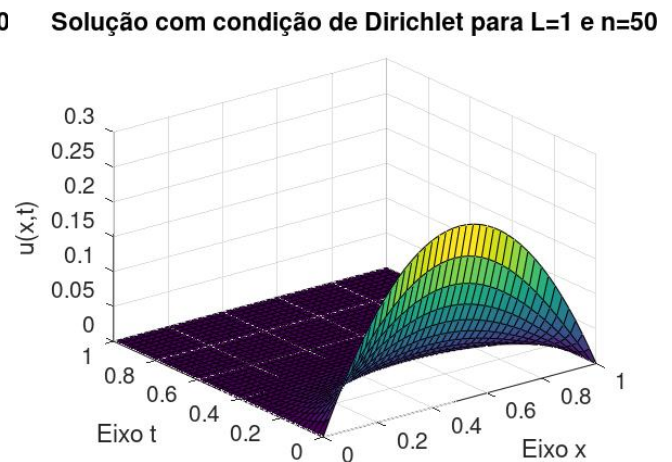
(a) φ e aproximação g com 2 termos(b) $u(x,t)$ - aproximação S_4 (c) $u(x,t)$ - aproximação S_{10} (d) $u(x,t)$ - aproximação S_{50}

Figura 3.1: Gráficos da Condição de fronteira de Dirichlet. Fonte: Próprio autor.

Podemos observar, por meio da Figura 3.1a o comportamento de $u(x,0) = \varphi(x)$ e sua respectiva aproximação pela série de Fourier com $n = 3$. A Figura 3.1b, a Figura 3.1c e a Figura 3.1d nos fornecem uma visão do comportamento da distribuição da temperatura ao longo da barra em função do tempo. Como nas condições iniciais, zero nas extremidades e decaindo em função do tempo. Incluímos três figuras semelhantes para ilustrar que, neste caso de condição de Dirichlet, não houve ganho ao se aumentar o número de termo da soma parcial da série de Fourier. É possível observar que com 4 termos ou com 50 termos na soma parcial, temos praticamente o mesmo gráfico.

3.2 Condições de Contorno Tipo Neumann

Neste tipo de condição é exigido que as extremidades estejam perfeitamente isoladas, o que significa que não há trocas de calor entre o ambiente e a barra. Isso é modelado com as condições de contorno $u_x(0,t) = 0$ e $u_x(\ell,t) = 0$. A formulação do problema de Neumann assume a forma que segue,

$$\begin{aligned}
u_t &= Ku_{xx}(x,t), \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0 \\
u_x(0,t) &= 0, \quad u_x(\ell,t) = 0 \\
u(x,0) &= \varphi(x)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

1. Separação de variáveis: Procuramos por soluções que apresentam a seguinte forma

$$u(x,t) = \varphi(x)\psi(t)$$

Substituindo na (3.6) e dividindo ambos os lados por $\varphi(x)\psi(t)$ temos

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}$$

Uma vez que o lado esquerdo é independente de x e o lado direito é independente de t , segue-se que a expressão deve ser uma constante

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \lambda$$

(Aqui ψ significa a derivada de ψ em relação a t e φ significa a derivada de φ em relação a x .)
Procuramos encontrar todas as constantes possíveis λ e as funções não nulas correspondentes φ e ψ .
Nós obtemos

$$\varphi'' - \lambda \varphi = 0, \quad \psi' - \lambda \psi = 0.$$

A solução da segunda equação é

$$\psi(t) = Ce^{\lambda t} \tag{3.7}$$

Onde C é uma constante arbitrária. Além disso, as condições de contorno dão

$$\varphi'(0)\psi(t) = 0, \quad \varphi'(\ell)\psi(t) = 0 \quad \text{para todo } t$$

Uma vez que $\psi(t)$ não é identicamente zero, obtemos o problema de autovalor desejado

$$\varphi''(x) - \lambda \varphi(x) = 0, \quad \varphi'(0) = 0, \quad \varphi'(\ell) = 0. \tag{3.8}$$

2. Encontrar autovalores e autovetores: O próximo passo é encontrar os autovalores e autofunções de (3.8). Existem, em geral, três casos:

- (a) Se $\lambda = 0$ então $\varphi(x) = ax + b$ então aplicando as condições de contorno obtemos

$$0 = \varphi'(0) = a, \quad 0 = \varphi'(\ell) = a \Rightarrow a = 0.$$

Observe que b ainda é uma constante arbitrária. Concluimos que $\lambda_0 = 0$ é um autovalor com a autofunção $\varphi_0(x) = 1$.

- (b) Se $\lambda = \mu^2 > 0$, então

$$\varphi(x) = a \cosh(\mu x) + b \sinh(\mu x)$$

e

$$\varphi'(x) = a\mu \sinh(\mu x) + b\mu \cosh(\mu x)$$

Aplicando as condições de contorno

$$0 = \varphi'(0) = b\mu \Rightarrow b = 0 \quad 0 = \varphi'(\ell) = a\mu \sinh(\mu\ell) \Rightarrow a = 0.$$

Portanto, não há autovalores positivos. Agora vamos considerar o seguinte argumento alternativo: Se $\varphi''(x) = \lambda \varphi(x)$ e multiplicando ambos os lados por φ nós teremos $\varphi(x)\varphi''(x) = \lambda \varphi(x)^2$. Integrando a expressão de $x = 0$ a $x = \ell$. Nós temos

$$\lambda \int_0^\ell \varphi(x)^2 dx = \int_0^\ell \varphi(x)\varphi''(x) dx = - \int_0^\ell \varphi'(x)^2 dx + \varphi(x)\varphi'(x) \Big|_0^\ell.$$

Como $\varphi'(0) = \varphi'(\ell) = 0$ concluimos

$$\lambda = - \frac{\int_0^\ell \varphi'(x)^2 dx}{\int_0^\ell \varphi(x)^2 dx}$$

e vemos que λ deve ser menor ou igual a zero (zero apenas se $\varphi' = 0$).

- (c) Então, finalmente, considere $\lambda = -\mu^2$ de modo que

$$\varphi(x) = a \cos(\mu x) + b \sin(\mu x)$$

e

$$\varphi'(x) = -a\mu \sin(\mu x) + b\mu \cos(\mu x).$$

Aplicando as condições de fronteira temos

$$0 = \varphi'(0) = b\mu \Rightarrow b = 0 \quad 0 = \varphi'(\ell) = a\mu \sin(\mu\ell).$$

Disto concluimos que $\sin(\mu\ell) = 0$ que implica $\mu = \frac{n\pi}{\ell}$ e, portanto

$$\lambda_n = -\mu_n^2 = -\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2, \quad \varphi_n(x) = \cos(\mu_n x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Da expressão (3.7) também temos as funções associadas $\psi_n(t) = e^{\lambda_n t}$.

3. A soma infinita formal: A partir das considerações acima, podemos concluir que, para qualquer inteiro N e constantes $\{a_n\}_{n=0}^N$

$$u_n(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \psi_n(t) \varphi_n(x) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n e^{\lambda_n t} \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

que satisfaz a equação diferencial em (3.6) e as condições de contorno.

4. Use a série de Fourier para encontrar os coeficientes: O único problema restante é, de alguma forma, escolher as constantes a_n de forma que a condição inicial $u(x, 0) = \varphi(x)$ seja satisfeita. Para fazer isso, consideramos o que aprendemos com a série de Fourier. Em particular, olhamos para u como uma soma infinita

$$u(x, t) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n e^{\lambda_n t} \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

e tentaremos achar $\{a_n\}$ satisfatório

$$\varphi(x) = (x, 0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right).$$

Mas isso nada mais é do que uma expansão do cosseno da função φ no intervalo $0, \ell$. Nosso trabalho na série Fourier nos mostrou que

$$a_0 = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) dx, \quad a_n = \int_0^{\ell} \frac{2}{\ell} \varphi(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx \quad (3.9)$$

Exemplo 3.2.1. Considere o exemplo explícito para a condição inicial com $\ell = 1$ e $\varphi(x) = x(x - 1)$. Nisso o caso (3.9) torna-se

$$a_0 = 2 \int_0^{\ell} \varphi(x) dx, \quad a_n = 2 \int_0^{\ell} \varphi(x) \cos(n\pi x) dx.$$

Substituindo o $\ell = 1$ nas integrais e calculando ambas, obtemos as expressões para a_0 e a_n

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \int_0^1 \varphi(x) dx \\ &= 2 \int_0^1 x(1-x) dx = 2 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right] \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Calculando a_n , tem-se

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \int_0^1 \varphi(x) \cos(n\pi x) dx = 2 \int_0^1 (x)(1-x) \cos(n\pi x) dx \\ &= \int_0^1 x(1-x) \left(\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi} \right)' dx \\ &= 2 \left[x(1-x) \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi} \Big|_0^1 - \int_0^1 (1-2x) \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi} dx \right] \\ &= \frac{2}{n\pi} \int_0^1 (1-2x) \left(\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} \right)' dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{n\pi} \left[(1-2x) \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} \Big|_0^1 - \int_0^1 \left(-2 \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} \right) dx \right] \\
&= \frac{2}{n\pi} \left[-\frac{\cos(n\pi)}{n\pi} - \frac{1}{n\pi} \right] = \frac{-2}{(n\pi)^2} ((-1)^n + 1)
\end{aligned}$$

Onde para n par temos que $a_0 = \frac{-4}{(n\pi)^2}$ e para n ímpar $a_0 = 0$.

Para eliminar os termos ímpares na expansão, introduzimos um novo índice, k em que $n = 2k$ onde $k = 1, 2, \dots$. E finalmente chegamos à solução

$$u(x, t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} e^{-4k^2\pi^2 t} \cos(2k\pi x).$$

Fazendo um exemplo para $N = 4$, temos

$$x(x-1) \approx \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2} \left(\sum_0^4 \frac{\cos(2k\pi x)}{k^2} \right).$$

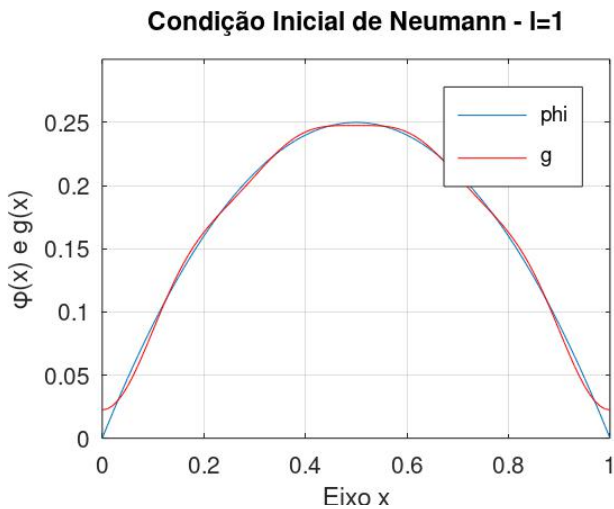
Observe que à medida que $t \rightarrow \infty$ a soma infinita converge para zero uniformemente em x . De fato,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{k^2} e^{-4k^2\pi^2 t} \cos(2k\pi x) \right| \leq e^{-4\pi^2 t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} e^{-4\pi^2 t}.$$

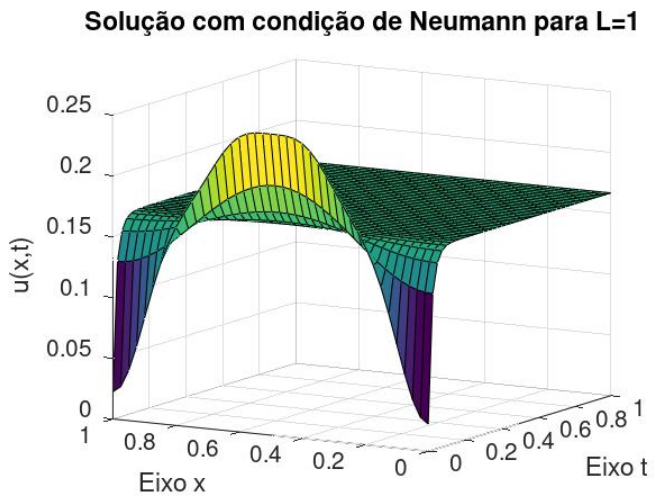
Portanto, a solução converge para uma temperatura de estado estacionário diferente de zero, que é exatamente o valor médio da distribuição de temperatura inicial.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = \frac{1}{6} = \int_0^1 \varphi(x) dx. \quad (3.10)$$

Abaixo, temos o gráfico da função $\varphi(x)$ para os valores de n escolhido.



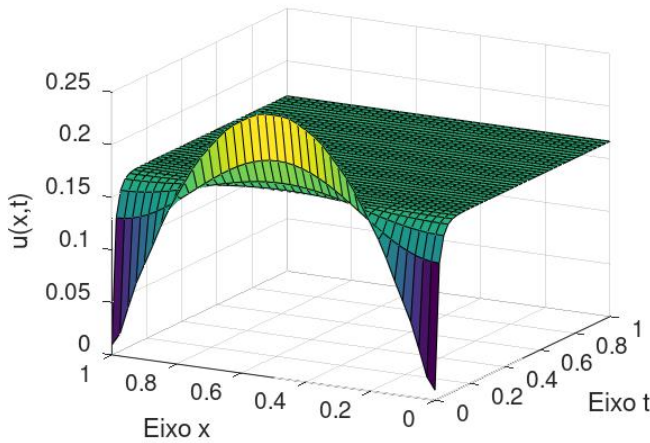
(a) Gráficos de $u(x, 0) = \varphi(x)$ e $g = S_4$



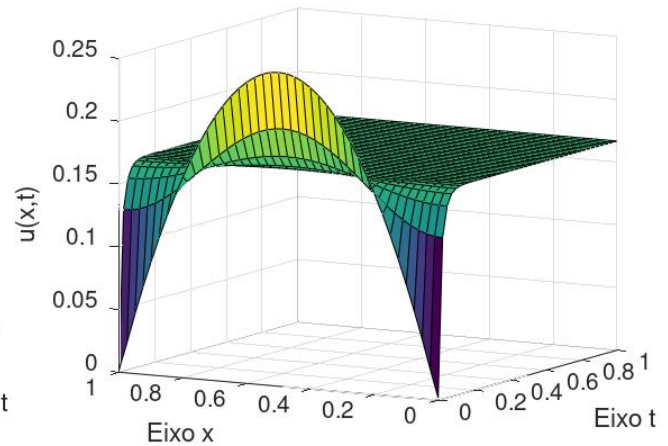
(b) Gráfico de $u(x, t)$ - aproximação S_4

Solução com condição de Neumann para $L=1$ e $n=$

Solução com condição de Neumann para $L=1$ e $n=50$



(a) Gráfico de $u(x,t)$ - aproximação S_{10}



(b) Gráfico de $u(x,t)$ - aproximação S_{50}

Figura 3.3: Gráficos da Condições de Neumann. Fonte: Próprio autor.

Na Figura 3.2a podemos observar que a aproximação da série de Fourier com S_4 fornece uma excelente aproximação da função $\varphi(x) = x(1-x)$. Em adição, nota-se que, conforme indicado na equação 3.2.1, pode ser verificado ao se observar no Figura 3.2b, 3.3a e 3.3b que à medida que t cresce, $u(x,t)$ tende ao valor limite 1,666..., para qualquer valor de x . Quanto às condições $u_x(0,t) = 0$ e $u_x(\ell,t) = 0$ pode-se observar nas Figura 3.2b, 3.3a e 3.3b que mesmo para S_{10} a condição não é plenamente satisfeita, o sendo apenas em S_{50} . Ao observarmos a Figura 3.2a notamos nos extremos $x = 0$ e $x = \ell = 1$ há uma curvatura na curva vermelha em que se pode inferir, intuitivamente, que a reta tangente em $x = 0$ e $x = \ell$ será horizontal. Este fato indica que as extremidades da barra são isoladas, ou seja, não há fluxo de calor nem para dentro nem para fora da barra. Mantendo a mesma temperatura ao decorrer do tempo, conforme exigido nas condições de contorno na Equação 3.6.

3.3 Condições de Contorno Tipo Mista: Dirichlet-Neumann (Ou Condição de Robin)

Neste caso temos uma condição mista na qual é imposto que a temperatura é mantida a zero graus em qualquer tempo na origem $x = 0$ o que caracteriza uma condição de Dirichlet e, na extremidade $x = \ell$ não há fluxo de calor em nenhum tempo, o que indica uma condição de Neumann.

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= Ku_{xx}(x,t), \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0 \\ u(0,t) &= 0, \quad u_x(\ell,t) = 0 \\ u(x,0) &= \varphi(x) \end{aligned} \quad (3.11)$$

1. Separação de variáveis: Procuramos por soluções que apresentam a seguinte forma

$$u(x,t) = \varphi(x)\psi(t)$$

Substituindo na (3.11) e dividindo ambos os lados por $\varphi(x)\psi(t)$ temos

$$\frac{\dot{\psi}(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}$$

Uma vez que o lado esquerdo é independente de x e o lado direito é independente de t , segue-se que a expressão deve ser uma constante

$$\frac{\dot{\psi}(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \lambda$$

(Aqui $\dot{\psi}$ significa a derivada de ψ em relação a t e φ' significa a derivada de φ em relação a x .) Procuramos encontrar todas as constantes possíveis λ e as funções não nulas correspondentes φ e ψ . Nós obtemos

$$\varphi'' - \lambda \varphi = 0, \quad \dot{\psi} - \lambda \psi = 0.$$

A solução da segunda equação é

$$\psi(t) = Ce^{\lambda t} \quad (3.12)$$

Onde C é uma constante arbitrária. Além disso, as condições de contorno dão

$$\varphi(0)\psi(t) = 0, \quad \varphi'(l)\psi(t) = 0 \quad \text{para todo } t$$

Uma vez que $\psi(t)$ não é identicamente zero, obtemos o problema de autovalor desejado

$$\varphi''(x) - \lambda \varphi(x) = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(l) = 0. \quad (3.13)$$

2. Encontrar autovalores e autovetores: O próximo passo é encontrar os autovalores e autofunções de (3.13). Existem, em geral, três casos:

- (a) Se $\lambda = 0$ então $\varphi(x) = ax + b$ então aplicando as condições de contorno obtemos

$$0 = \varphi(0) = b, \quad 0 = \varphi'(l) = a \Rightarrow a = b = 0.$$

Zero não é um valor próprio.

- (b) Se $\lambda = \mu^2 > 0$, então

$$\varphi(x) = a \cosh(\mu x) + b \sinh(\mu x)$$

e

$$\varphi'(x) = a\mu \sinh(\mu x) + b\mu \cosh(\mu x)$$

Aplicando as condições de contorno

$$0 = \varphi'(0) = a\mu \Rightarrow a = 0 \quad 0 = \varphi'(l) = b\mu \cosh(\mu l) \Rightarrow b = 0.$$

Portanto, não há autovalores positivos. Agora vamos considerar o seguinte argumento alternativo: Se $\varphi''(x) = \lambda \varphi(x)$ e multiplicando ambos os lados por φ nós teremos $\varphi(x)\varphi''(x) = \lambda \varphi(x)^2$. Integrando

a expressão de $x = 0$ a $x = \ell$. Nós temos

$$\lambda \int_0^\ell \varphi(x)^2 dx = \int_0^\ell \varphi(x) \varphi''(x) dx = - \int_0^\ell \varphi'(x)^2 dx + \varphi(x) \varphi'(x) \Big|_0^\ell.$$

Como $\varphi(0) = \varphi'(\ell) = 0$ concluímos que

$$\lambda = - \frac{\int_0^\ell \varphi'(x)^2 dx}{\int_0^\ell \varphi(x)^2 dx}$$

e vemos que λ deve ser menor ou igual a zero.

- (c) Então, finalmente, considere $\lambda = -\mu^2$ de modo que

$$\varphi(x) = a \cos(\mu x) + b \sin(\mu x)$$

e

$$\varphi'(x) = -a\mu \sin(\mu x) + b\mu \cos(\mu x).$$

Aplicando as condições de fronteira temos

$$0 = \varphi(0) = a\mu \Rightarrow a = 0 \quad 0 = \varphi'(\ell) = b\mu \cos(\mu\ell).$$

Disto concluímos que $\cos(\mu\ell) = 0$ que implica $\mu = \frac{(2n-1)\pi}{2\ell}$. Portanto,

$$\lambda_n = -\mu_n^2 = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2\ell} \right)^2, \quad \varphi_n(x) = \sin(\mu_n x) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Da expressão (3.12) também temos as funções associadas $\psi_n(t) = e^{\lambda_n t}$. **3. A soma infinita formal:** A partir das considerações acima, podemos concluir que, para qualquer inteiro N e constantes $\{b_n\}_{n=0}^N$

$$u_n(x, t) = \sum_{n=1}^N b_n \psi_n(t) \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^N b_n e^{\lambda_n t} \sin\left(\frac{(2n-1)x\pi}{2\ell}\right).$$

que satisfaz a equação diferencial em (3.11) e as condições de contorno. **4. Use a série de Fourier para encontrar os coeficientes:** O único problema restante é, de alguma forma, escolher as constantes b_n de forma que a condição inicial $u(x, 0) = \varphi(x)$ seja satisfeita. Para fazer isso, consideramos o que aprendemos com a série de Fourier. Em particular, olhamos para u como uma soma infinita

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{\lambda_n t} \sin\left(\frac{(2n-1)x\pi}{2\ell}\right)$$

e tentaremos achar $\{b_n\}$ satisfatório

$$\varphi(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{(2n-1)x\pi}{2\ell}\right).$$

Mas isso nada mais é do que uma expansão do seno da função φ no intervalo $(0, \ell)$. Usando

$$\varphi_n(x) = \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2\ell}\right)$$

Nós temos

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n(x)$$

Procedendo como de costume, multiplicando ambos os lados por $\varphi_n(x)$ e integrando de 0 a ℓ e usando a ortogonalidade descrita em (3.14) e (3.16).

$$\int_0^{\ell} \varphi_n(x) \varphi(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_0^{\ell} \varphi_n(x) \varphi_k(x) dx$$

o que implica,

$$b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi_n(x) \varphi(x) dx$$

Ortogonalidade

$$\int_0^{\ell} \varphi_n(x) \varphi_k(x) dx = \begin{cases} \frac{\ell}{2}, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases}.$$

Lembre-se de que $\varphi_j'' = \lambda_j \varphi_j$ e $\varphi_j(0) = 0$, $\varphi_j'(\ell) = 0$. Primeiro, considere $n \neq k$, então $\lambda_n \neq \lambda_k$, logo

$$\begin{aligned} \lambda_n \int_0^{\ell} \varphi_n(x) \varphi_k(x) dx &= \int_0^{\ell} \varphi_n''(x) \varphi_k(x) dx \\ &= - \int_0^{\ell} \varphi_n'(x) \varphi_k'(x) dx + [\varphi_n'(x) \varphi_k(x)] \Big|_0^{\ell} \\ &= - \int_0^{\ell} \varphi_n'(x) \varphi_k''(x) dx + [\varphi_n'(x) \varphi_k(x) - \varphi_n(x) \varphi_k'(x)] \Big|_0^{\ell} \\ &= \lambda_k \int_0^{\ell} \varphi_n(x) \varphi_k(x) dx \end{aligned} \tag{3.14}$$

Portanto,

$$(\lambda_n - \lambda_k) \int_0^{\ell} \varphi_n(x) \varphi_k(x) dx = 0 \Rightarrow \int_0^{\ell} \varphi_n(x) \varphi_k(x) dx = 0$$

Para $n = k$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^{\ell} \varphi_n^2(x) dx &= \int_0^{\ell} \sin^2\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2\ell}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left(1 - \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{\ell}\right)\right) dx \\ &= \frac{\ell}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\ell}{(2n-1)\pi}\right) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{\ell}\right) \Big|_0^{\ell} = \frac{\ell}{2}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Exemplo 3.3.1. Considere o exemplo explícito para a condição inicial com $\ell = 1$ e $\varphi(x) = x$. Nesse caso $\mu_n = \frac{(2n-1)\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{1} \int_0^1 x \sin(\mu_n x) dx \\
 &= 2 \left[\frac{-x}{\mu_n} \cos(\mu_n x) \Big|_0^1 + \frac{1}{\mu_n} \int_0^1 \cos(\mu_n x) dx \right] \\
 &= 2 \left[\frac{-\cos(\mu_n)}{\mu_n} + 0 + \frac{1}{(\mu_n)^2} \left(\sin(\mu_n x) \Big|_0^1 \right) \right] \\
 &= 2 \left[\frac{-\cos(\mu_n)}{\mu_n} + \frac{1}{(\mu_n)^2} (\sin(\mu_n) - 0) \right] \\
 &= 2 \left[\frac{-\cos(\mu_n)}{\mu_n} + \frac{\sin(\mu_n)}{(\mu_n)^2} \right] \\
 &= 2 \left[\frac{\sin(\mu_n) - \mu_n \cos(\mu_n)}{(\mu_n)^2} \right] \\
 &= 2 \left[\frac{\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right) - \left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)}{\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2} \right] \\
 &= 2 \left[\frac{\sin(n\pi - \pi/2) - (n\pi - \pi/2) \cos(n\pi - \pi/2)}{\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4}} \right] \\
 &= \frac{8(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2 \pi^2}
 \end{aligned}$$

chegamos a solução

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2 \pi^2} e^{-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2 t} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)$$

Fazendo um exemplo para $N = 4$, temos

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^4 \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) \\
 &= \frac{8}{\pi^2} \left[\frac{(-1)^{1+1}}{(1)^2} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{(-1)^{2+1}}{(3)^2} \sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + \frac{(-1)^{3+1}}{(5)^2} \sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right) + \frac{(-1)^{4+1}}{(7)^2} \sin\left(\frac{7\pi x}{2}\right) \right] \\
 &\approx \frac{8}{\pi^2} \left[\sin(\pi x/2) - \frac{\sin(3\pi x/2)}{9} + \frac{\sin(5\pi x/2)}{25} - \frac{\sin(7\pi x/2)}{49} \right]
 \end{aligned}$$

A seguir, apresentamos um conjunto de figuras que nos permitirão ilustrar o comportamento da solução do problema modelo para a condição de Robin com $\varphi(x) = x$ e $\ell = 1$.

Ao analisarmos a Figura 3.4 queremos, em primeiro lugar destacar que omitimos a apresentação

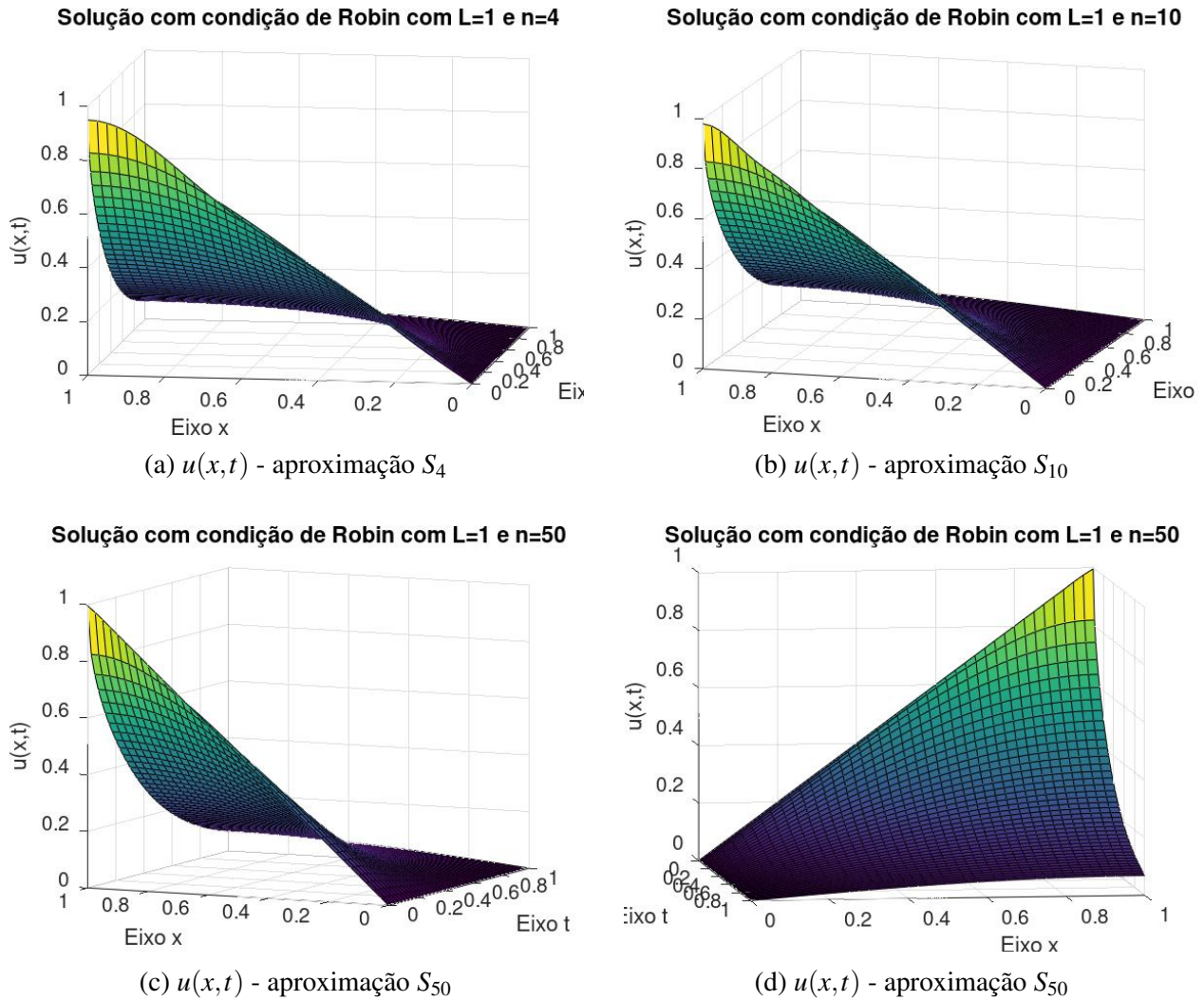


Figura 3.4: Gráficos da Condição de Robin. Fonte: Próprio autor.

em duas dimensões por entendermos que, como $\varphi(x)$ é uma reta, essa pode ser visualizada facilmente no gráfico tridimensional de $u(x,t)$, mas especificamente nas Figuras 3.4c e 3.4d em dois ângulos diferentes. Sobre a condição inicial $u(x,0) = \varphi(x) = x$ temos algumas observações interessantes sobre a convergência da série de Fourier. Ao analisarmos cuidadosamente o bordo da superfície em $t = 0$ notamos que, próximo do ponto $(1,0)$ há alguma lentidão de convergência. O bordo retilíneo foi atingido, pelo menos visualmente, para valores próximos de $n = 50$, ou seja, com S_{50} . Tal fato pode ser observado na sequência das Figuras 3.4a, 3.4b e 3.4c. O mesmo fenômeno não ocorre na extremidade $x = 0$. A condição $u_x(x,\ell) = u_x(x,1)$ pode ser verificada nas linhas de grade marcadas na Figura 3.4d. À medida que t cresce, tendendo para $t = 1$, percebe-se a curvatura das linhas da grade tendendo para horizontal, ou seja, $u_x(x,1)$ tendendo para zero.

Capítulo 4

APLICAÇÕES DA EQUAÇÃO DO CALOR

A equação do calor tem uma grande importância em vários ramos da Matemática e Física. Nesse capítulo, afim de mostrar-se a relevância da equação, dedicaremos a estudar dois artigos científicos que falam sobre onde e como elas podem ser aplicadas.

4.1 O Movimento Browniano (MB)

O MB é caracterizado como um fenômeno em que as pequenas partículas que estão suspensas em um líquido tendem a se movimentar em caminhos pseudo-aleatórios ou estocásticos através dele. Robert Brown foi primeiro cientista a estudar esse movimento. Em 1827 ele observou o fenômeno olhando microscópio e viu que os grãos de pólen se deslocavam aleatoriamente na água.

Diversos estudiosos tentaram explicar o movimento browniano, entre eles, temos

- Regnault - Acreditava que o movimento se dava devido ao aquecimento irregular causado pela luz incidente sobre o líquido;
- Christian Wiener - Chegou a conclusão de que o MB não estava na força das partículas, nem na diferença de temperatura do fluido e nem na evaporação;
- Cantoni e Oehl - Observaram que o movimento das partículas de um fluido selado entre as placas de vidro permaneceria inalterado;

Todos os estudiosos citados acima não obtiveram sucesso ao tentar explicar o MB, mas através de suas observações e estudos que cientistas como Louis Gouy e Felix Exner chegaram a ter uma visão mais clara sobre o movimento, mas a definição do movimento browniano aconteceu apenas em 1905 quando Albert Einstein publicou um artigo explicando que as partículas vistas por Robert Brown era uma consequência do movimento térmico das moléculas de água. Além de Einstein, vários outros cientistas e estudiosos contribuíram de forma significativa para a definição, entendimento e aplicação do MB.

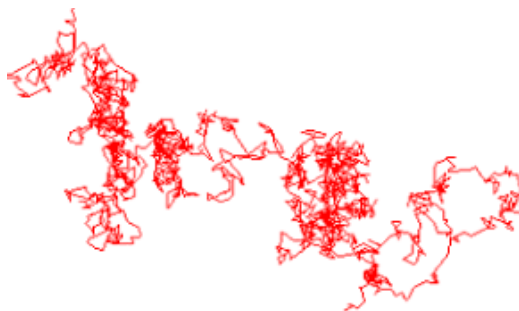


Figura 4.1: Movimento Browniano. Fonte: Astronoo.

4.1.1 O movimento browniano e a equação do calor

Nesta subseção estudaremos como o movimento browniano se relaciona com a equação do calor e apoiaremos nosso estudo nas ideias de Michael J. Kozdron (KOZDRON, 2008) que produziu um artigo científico intitulado: *Brownian Motion and the Heat Equation* (ou movimento browniano e a equação do Calor, tradução nossa).

4.1.2 Como Albert Einstein relacionou o movimento browniano com a equação do calor

Vimos anteriormente que o famoso cientista, Albert Einstein, conseguiu fornecer para a comunidade científica uma explicação que de fato explicasse o MB. Ele conseguiu elucidar o que Robert Brown viu pelas lentes do microscópio, afirmando que o MB tem sua origem no “bombardeio” contínuo dos grãos de pólen pelas moléculas da água circundante, onde acontece sucessivos impactos moleculares vindo de diferentes direções e contribuindo de forma involuntária para os diferentes impulsos das partículas. Como resultado desses choques incessantes, as partículas presente naquele meio, tinham a mesma *energia cinética média das moléculas* ¹. E foi através desse estudo no qual Albert Einstein mostrou que o movimento browniano fornece uma solução para a equação do calor

$$u_t = Ku_{xx}$$

podendo ser reescrita da seguinte forma

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = K \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)$$

4.1.3 A prova da existência do movimento browniano por Albert Einstein

Para provar a existência do MB, Einstein supôs que existia N partículas suspensas em um líquido. E que em um pequeno intervalo de tempo T , a coordenada x de uma partícula aumentará ε , e cada

¹A fórmula para calcular a energia cinética média da molécula é $e_c = 3/2 * k * T$.

partícula possui um ε com valor diferente. E para os valores ε das partículas há uma certa lei probabilística.

No intervalo T , temos que o número dN de partículas que passam pelo o deslocamento entre $\varepsilon + \Delta\varepsilon$ pode ser expressa pela seguinte equação

$$dN = N\varphi(\varepsilon)d\varepsilon$$

como apenas φ difere de 0 para valores muitos pequenos ε , então

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = 1, \quad \varphi(\varepsilon) = \varphi(-\varepsilon)$$

como φ é uma função par, vemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = 0$$

Agora vamos ver como o coeficiente de difusão depende de φ e o número de partículas por unidade de volume depende apenas das variáveis x e t . Fazendo com que $f(x, t)$ denote apenas do número de partículas, então teremos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dx = N$$

e definindo α^2 por

$$\alpha^2 := \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon) d\varepsilon$$

Agora temos o objetivo de calcular a distribuição de partículas em curto espaço de T . E pela definição de $\varphi(\varepsilon)$, temos

$$f(x, t + T) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x + \varepsilon, t) \varphi(\varepsilon) d\varepsilon \quad (4.1)$$

pelo o teorema de Taylor ² temos em um caso que

$$f(x, t + T) = f(x, t) + \frac{\partial f}{\partial t} T$$

e no outro caso

$$f(x + \varepsilon, t) = f(x, t) + \frac{\partial f}{\partial x} \varepsilon + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \varepsilon^2 \quad (4.2)$$

substituindo a equação (4.2) na (4.1) ficaremos com

²Através do link: <http://www.dma.uem.br/kit/calculo-e-pre-calculo/taylor.pdf> é possível entender o que Teorema de Taylor diz.

$$\begin{aligned}
f(x, t + T) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x + \varepsilon, t) \varphi(\varepsilon) d\varepsilon \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(x, t) + \frac{\partial f}{\partial x} \varepsilon + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \varepsilon^2 \right] \varphi(\varepsilon) d\varepsilon \\
&= f(x, t) + \alpha^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} T
\end{aligned}$$

Equacionando as duas aproximações, uma em relação ao tempo e a outra em relação a deslocamentos (aleatórios), obtemos a Equação Diferencial Parcial que é muito bem conhecida para a difusão (ou seja, a Equação do calor)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

4.1.4 Aplicações do Movimento Browniano

Aqui estudaremos algumas aplicações do movimento browniano, a fim de mostrarmos a importância do movimento e, conseqüentemente enfatizando a relevância da equação do calor.

O movimento browniano é utilizada na indústria farmacêutica na captura de nanopartículas e vírus. O artigo do Gustafsson (GUSTAFSSON et al., 2018) intitulado como: *Significance of Brownian Motion for Nanoparticle and Virus Capture in Nanocellulose-Based Filter Paper* (ou Significado do Movimento Browniano para Nanopartículas e captura de vírus em Papel de Filtro à Base de Nanocelulose, Tradução nossa) explica como o movimento browniano contribui em uma das fases mais críticas na produção de produtos farmacêuticos à base de proteína. Nessa fase é necessário fazer uma “filtração” para a remoção do vírus e durante esse processo a influência do MB no comportamento do vírus durante a filtração não pode ser descartado, pois ele favorece a descoberta do vírus.

Na Ecologia, o MB, é tradicionalmente aplicado juntamente com dispersão difusiva como modelos padrão para o movimento de animais ³ em ambientes que são ricos em recursos. Em seu trabalho Jager (JAGER et al., 2014) mostra como os passeios brownianos se tratando dos movimentos de animais podem ser causados por encontros frequentes e não somente em locais onde há alta densidade de recursos.

4.2 Variações de Temperatura do Solo via Equação do Calor

A fim, de continuarmos nosso estudo, sobre a importância da equação do calor em várias áreas, exploremos como a temperatura da superfície do solo $x = 0$ se relaciona com o seu interior $x > 0$ considerando as variações periódicas que ocorrem na superfície devido as mudanças climáticas desprezando as influências de temperatura dos processos radioativos do interior da Terra e para tal estudo iremos fazer uma breve análise do artigo Gustavo e Judith (LIMA; ARAÚJO, 2019) sobre assunto.

³Nas referências disponibilizaremos alguns links que relacionam o MB com o movimento de animais.

4.2.1 A importância dos estudos relacionados a temperatura

De acordo Fiorin e Dal Ross (FIORIN; ROSS,) “a temperatura do solo é um fator de extrema importância para o desenvolvimento das plantas, sendo determinado por suas propriedades físicas, químicas e meteorológicas”, abaixo listaremos a importância da temperatura do solo para um bom desenvolvimento das frutíferas,

- **Germinação das sementes:** Quanto menor a temperatura do solo, mais demorada é a germinação e a emergência da cultura.
- **Atividade dos microrganismos:** Os microrganismos decompositores da matéria orgânica e as bactérias do solo captadoras do nitrogênio atmosférico necessitam de temperatura de solo favorável para sua atividade benéfica à agricultura.
- **Formação do solo:** A temperatura desempenha importante função, provocando dilatações, contrações nas rochas, trincando-as e desintegrando-as para formarem o solo.
- **Retenção de água do solo:** Quanto maior a temperatura do solo, maiores e mais rápidas serão as perdas de umidade do mesmo.
- **Crescimento do sistema radicular:** Tem influência direta sobre algumas características da planta, entre elas a: resistência à seca, eficiência na absorção dos nutrientes do solo, tolerância ao ataque de pragas do solo, capacidade de germinação e/ou brotação, tolerância à movimentação de máquinas, entre outros.

4.2.2 Como a Equação do calor se relaciona com a Variação de Temperatura do Solo

Todas as informações nesta subseção foram tirada do artigo do Gustavo e Judith (LIMA; ARAÚJO, 2019). O principal problema do trabalho é associação do problema do cálculo da variação da temperatura do solo em relação à superfície com a condução do calor. Onde ele é descrito pela equação do calor em uma barra semi-infinita e com a extremidade em $x = 0$ na superfície, a barra considerada é isolada termicamente em suas laterais e a sua equação é a equação do calor que já conhecemos,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad t \in \mathbb{R}, \quad x > 0,$$

no problema, temos que $u = u(x, t)$ é o responsável por nos dizer como a temperatura está distribuída em um instante t dado em segundos, a variável x representa a profundidade em centímetros, K é a difusividade térmica no sistema de Centímetro-Grama-Segundo (CGS) e o problema foi submetido a seguinte condição de contorno,

$$u(0, t) = f(t)$$

A função $f(t)$ é periódica e com período T . O motivo pelo qual a função $f(t)$ é periódica se deve porque a temperatura na superfície do solo, pode se repetir e também para que a mesma possa ser escrita em termos da série de Fourier.

Depois de analisar o fluxo do calor, com o desenvolvimento da equação do calor juntamente com as condições de contorno, eles conseguiram observar que o plantio de sementes em geral é feita nas camadas mais superficiais do solo, pois as variações da temperatura da superfície, durante o período de um dia, pouco afetam a temperatura do solo a profundidades maiores, afetando apenas sua camada mais superficial (LIMA; ARAÚJO, 2019). Como pode ser observado na Figura 4.2.,

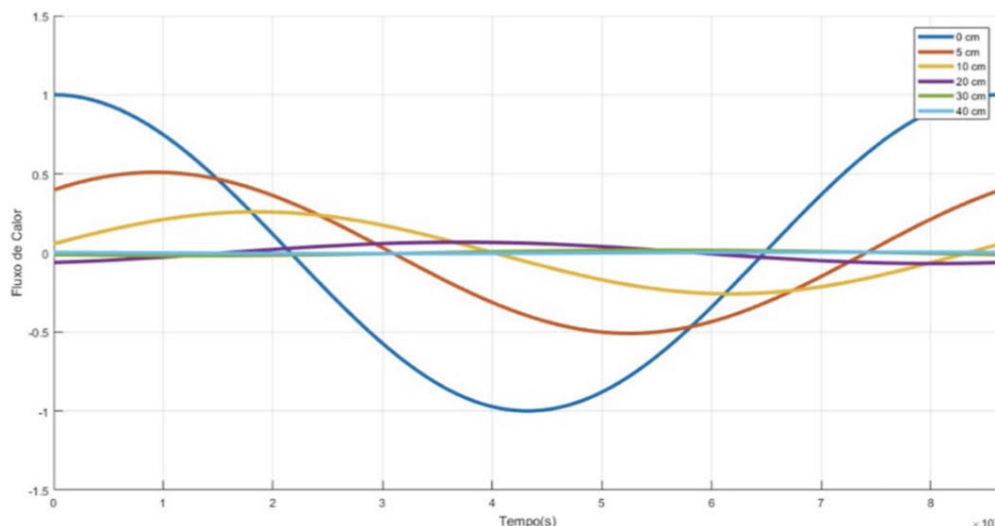


Figura 4.2: Fluxo do calor por níveis de temperatura. Fonte: Araújo e Lima (2018).

o fluxo de calor é bastante variável em menores profundidades, como na superfície e até os 10cm de profundidade. Porém, quase não há fluxo em níveis mais profundos, como a partir dos 30 cm. Esse exemplo de aplicação reforça a relevância do modelo matemático que foi objeto deste trabalho, a Equação Diferencial Parcial do Calor.

Capítulo 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste trabalho foi realizar uma pesquisa baseada em artigos científicos e livros de como podemos deduzir a equação do calor usando a Lei de Resfriamento de Fourier. A escolha dessa *Equação Clássica* foi porque a mesma é uma importante equação diferencial, que descreve a distribuição de calor em uma determinada região ao longo de um tempo t . A equação do calor é responsável por modelar o fenômeno de condução do calor que ocorre em inúmeras aplicações de engenharia e pode ser analisado usando diferentes métodos analíticos e numéricos.

O primeiro passo do trabalho foi revisar as EDPs de segunda ordem, que é uns dos assuntos que antecede os estudos da equação do calor. O fato de focarmos em EDPs de segunda ordem se dá pela razão da equação do calor ser uma equação diferencial parcial de segunda ordem. Nesse tópico também foi falado sobre a conceituação das equações diferenciais parciais, bem como as suas classificações. Fundamentalmente as EDPs de segunda ordem são classificadas em três tipos: Elípticas, Parabólicas e Hiperbólicas. Essa classificação representa no ponto de vista físico o estado estacionário (para as EDPs elípticas), processos de difusão (para as parabólicas) e a propagação da onda (hiperbólicas). Depois falamos brevemente sobre funções ortogonais e seus principais tópicos. E, por fim, falamos das séries de Fourier, sendo o pré-requisito mais importante para deduzirmos a equação do calor como também para a sua resolução

Posteriormente, foi estudado alguns conceitos físicos para facilitar nosso entendimento sobre a equação do calor e também no processo de dedução. Começamos pela equação fundamental da calorimetria, que é a responsável por mostrar que a quantidade de calor de um corpo relaciona-se com a massa (m) e com a variação de temperatura sofrida pela substância (ΔT). Ou seja, ela tem por finalidade definir a quantidade de calor que um corpo precisa absorver ou perder para sofrer alteração em sua temperatura. Em seguida, foi falado como ocorre o processo de transferência de calor de um corpo para o outro, evidenciando os três diferentes processos que pode ocorrer a transferência.

No capítulo seguinte foi deduzido a equação do calor, considerando uma barra de comprimento L e seção transversal A . A dedução da equação é feita de modo bem explicativa e considerando todos os passos que estão no livro do Boyce e DiPrima (BOYCE; DIPRIMA, 2015) sobre equações diferenciais parciais. Depois de chegarmos na equação do calor, falamos do principal problema que envolve a condução do calor, pois é preciso achar $u(x, t)$ que seja capaz de satisfazer a equação do calor e para resolver esse problema é necessário considerar as condições iniciais e de fronteira, o qual

foi o tema do nosso próximo capítulo.

Após falarmos sobre condições iniciais e de fronteira, iniciamos nosso estudo sobre a resolução da equação unidimensional do calor. Utilizamos o método de separação de variáveis para a sua resolução e considerando as condições de fronteira de Dirichlet, Neumann e Dirichlet-Neumann (Robin). E, por fim, falamos sobre a importância da equação do calor em que o principal objetivo desse capítulo foi mostrar a importância da equação do calor.

Portanto, através da equação do calor, que é uma consequência da lei de resfriamento de Jean Baptiste Joseph Fourier, nos possibilitou inúmeras aplicações em diversas áreas. A aplicabilidade da equação do calor nos permitiu desfrutar de vários avanços tecnológicos e científicos. Confirmando novamente a importância do desenvolvimento, descobertas e estudos de trabalhos científicos. Antes de chegar na sua obra “Teoria Analítica do Calor” Joseph Fourier admitiu diferentes concepções e conjecturas que foram sendo gradualmente modificadas a partir de novos estudos e descobertas, com esse exemplo percebemos que a ciência como um todo, tem uma natureza muito humana, pois no decorrer de uma formulação de uma teoria, teorema ou experimentos científicos não caminhamos em uma linha reta e plana até o sucesso, na grande maioria das vezes nos deparamos com dúvidas, hipóteses erradas e o medo de errar. Refletir sobre esses elementos nos ajuda enxergar a ciência como algo mais próximo da realidade, possibilitando aos estudante a chance de errar e prosseguir, pois é assim que nascem os “heróis” da ciência.

Referências Bibliográficas

BOYCE, W.; DIPRIMA, R. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 2015.

CASTRO, G. **O movimento Browniano e formação de preços no Mercado**. 2018. Disponível em: <https://gilsoncastroblog.wordpress.com/2018/04/17/o-movimento-browniano-e-formacao-de-precos-no-mercado/>. Acesso em: 12 de Dezembro de 2020.

CONJECTURA de Poincaré. Disponível em: <https://www.somatematica.com.br/curiosidades/c122.php>. Acesso em: 20 de Junho de 2020.

DAVID, H.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física**. Rio de Janeiro: LTC, 2006. v. 2.

FIORIN, T. T.; ROSS, M. D. **Climatologia agrícola**. Santa Maria: [s.n.]. Disponível em: https://www.ufsm.br/app/uploads/sites/413/2018/11/08_climatologia_agricola.pdf. Acesso em: 08 de Janeiro de 2021.

GUSTAFSSON, O.; GUSTAFSSON, S.; MANUKYAN, L.; MIHRANYAN, A. Significance of brownian motion for nanoparticle and virus capture in nanocellulose-based filter paper. **Membranes**, PubMed.gov, v. 90, n. 8, 9 2018.

HAMILTON, R. Three-manifolds with positive ricci curvature. **Differential Geometry**, v. 17, n. 2, p. 255–306, 1982.

INCROPERA, F. P.; DEWITT, D. P.; BERGAMAN, T. L.; LAVINE, A. S. **Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa**. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

IÓRIO, V. **EDP, um curso de graduação**. Rio de Janeiro: IMPA, 2005. v. 1.

JAGER, M. D.; BARTUMEUS, F.; KOTZSCH, A.; WEISSING, F. J.; HENGVELD, G. M.; NOLET, B.; HERMAN, P. M. J.; KOPPEL, J. V. D. How superdiffusion gets arrested: ecological encounters explain explain shift from léy to brownian movement. **Proceedings of the royal society B**, v. 10, n. 281, 2014.

KOZDRON, J. M. **Brownian Motion and the Heat Equation**. 2008. Disponível em: http://stat.math.uregina.ca/~kozdron/Research/UgradTalks/BM_and_Heat/heat_and_BM.pdf. Acesso em: 10 de Janeiro de 2021.

LIMA, G. S.; ARAÚJO, J. d. P. Um estudo das variações da temperatura do solo via equação do calor. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, Scielo Brasil, São Paulo, v. 41, n. 3, 2019.

MEDEIROS, E. F. **Uma introdução ao estudo das Equações Diferenciais Parciais usando o modelo de Euler-Bernoulli para a vibração transversal de uma barra flexível**. 2016. 16 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática), Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande.

NAGLE, R. K. **Equações Diferenciais**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. v. 1.

VIANA, M. **Conjectura de Poincaré**. Disponível em: <http://ciim.uan.edu.co/images/VersionesCIIM/2010/documentos/ConjeturaPoincare-CIIM2010.pdf>. Acesso em: 20 de Novembro de 2020.

YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. **Física II**. São Paulo: Pearson, 2016. v. 2. Termodinâmica e Ondas.

ZILL, D. **Equações Diferenciais**. São Paulo: Makron Book, 2001. v. 1.

Apêndice A

Script do Octave Para Gráfico de $u(x,t)$ com Condição de Dirichlet

```

1  clc
2  clear
3  n=input("Entre com a quantidade de termos da soma parcial Sn, o valor de n=")
4  L=1 %input("Entre com o limite superior da região quadrangular L:")
5  t=0:0.025:L; %cria um vetor com entradas sendo os valores do intervalo[0,b]
6  x=t; %cria um vetor de entradas iguais às entradas de t
7  %igualmente espaçadas
8  aux=size(t); %determina quantas componentes o vetor t do domínio tem.
9  q=aux(2); %escolhe a entrada do vetor aux que contém o n° de colunas de t.
10 z=zeros(q,q); %cria uma matriz q x q de zeros.
11 s=zeros(1,n); %gera um vetor de zeros com n elementos
12 [mx,mt]=meshgrid(x,t);
13 for i=1:q %calcula a imagem para cada par (x,t) através da série de Fourier
14     for j=1:q
15         s=0;
16         for k=1:n %Calcula o valor de cada termo da soma parcial
17             sn=0;
18             sn=((1-(-1)^k)/(k^3))*e^(-k^2*pi^2*t(j))*sin(k*pi*x(i));
19             s=s+sn; %quando k=n, s contém a imagem de t para cada t intervalo
20         end
21         z(i,j)=(4/pi^3)*s; %atribuindo a imagem para cada valor de t
22     end
23 end
24 surf(mt, mx, z) %plotando o gráfico
25 xlabel('Eixo x') %Legenda do eixo x
26 ylabel('Eixo t') %Legenda do eixo y
27 zlabel('u(x,t)') %Legenda do eixo z
28 title('Solução com condição de Dirichlet para L=1 e n=50') %Título do gráfico
29 print -djpeg Dirichletn50.jpg %Gera figura em jpeg

```

Apêndice B

Script do Octave Para Gráfico de $u(x,t)$ com Condição de Neumann

```

1  clc
2  clear
3  n=input("Entre com a quantidade de termos da soma parcial Sn, o valor de n=")
4  L=1 %input("O limite superior da região quadrangular L:")
5  %Obs.: Se o limite mudar de valor, os coeficientes de Fourier devem ser
6  %recalculados e as expressões em sn devem ser ajustadas.
7  t=0:0.01:L; %cria um vetor com entradas sendo os valores do intervalo[0,b]
8  x=t; %cria um vetor de entradas iguais às entradas de t
9  %igualmente espaçadas
10 aux=size(t); %determina quantas componentes o vetor t do domínio tem.
11 q=aux(2); %escolhe a entrada do vetor aux que contém o n° de colunas de t.
12 z=zeros(q,q); %cria uma matriz q x q de zeros.
13 s=zeros(1,n); %gera um vetor de zeros com n elementos
14 [mx,mt]=meshgrid(x,t);
15 for i=1:q %calcula a imagem para cada par (x,t) através da série de Fourier
16     for j=1:q
17         s=0;
18         for k=1:n %Calcula o valor de cada termo da soma parcial
19             sn=0;
20             sn=(1/(k^2))*(e^(-4*k^2*pi^2*t(j)))*cos(2*k*pi*x(i));
21             s=s+sn; %quando k=n, s contém a imagem de t para cada t intervalo
22         end
23         z(i,j)=(1/6)-(1/pi^2)*s; %atribuindo a imagem para cada valor de t
24     end
25 end
26 surf(mx, mt, z) %plotando o gráfico
27 xlabel('Eixo t') %Legenda do eixo x
28 ylabel('Eixo x') %Legenda do eixo y
29 zlabel('u(x,t)')
30 title('Solução com condição de Neumann para L=1 e n=50') %Título do gráfico
31 print -djpeg neumann50a.jpg %Gera figura em jpeg

```

Apêndice C

Script do Octave Para Gráfico de $u(x, t)$ com Condição de Robin

```

1  clc
2  clear
3  n=input("Entre com a quantidade de termos da soma parcial Sn, o valor de n=")
4  L=1%("O limite superior da região quadrangular L:")
5  t=0:0.025:L; %cria um vetor com entradas sendo os valores do intervalo[0,b]
6  x=t; %cria um vetor de entradas iguais às entradas de t
7  %igualmente espaçadas
8  aux=size(t);%determina quantas componentes o vetor t do domínio tem.
9  q=aux(2);%escolhe a entrada do vetor aux que contém o n° de colunas de t.
10 z=zeros(q,q);%cria uma matriz q x q de zeros.
11 s=zeros(1,n); %gera um vetor de zeros com n elementos
12 [mx,mt]=meshgrid(x,t);
13 for i=1:q %calcula a imagem para cada par (x,t) através da série de Fourier
14     for j=1:q
15         s=0;
16         for k=1:n %Calcula o valor de cada termo da soma parcial
17             sn=0;
18
19             sn=(((-1)^(k+1))/((2*k-1)^2))*e^(-(((2*k-1)*pi)/2*L)^2*t(j))*sin(((2*k-1)*pi)/(2
20             *L)*x(i));
21             s=s+sn; %quando k=n, s contém a imagem de t para cada t intervalo
22         end
23         z(i,j)=((8*L)/pi^2)*s; %atribuindo a imagem para cada valor de t
24     end
25 end
26 surf(mx, mt, z) %plotando o gráfico
27 xlabel('Eixo t') %Legenda do eixo x
28 ylabel('Eixo x') %Legenda do eixo y
29 zlabel('u(x,t)') %Legenda do eixo z
30 title('Solução com condição de Robin com L=1 e n=50') %Título do gráfico
31 print -djpeg robin.jpg %Gera figura em jpeg

```