



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO
TOCANTINS - IFTO, *CAMPUS* PALMAS
LICENCIATURA EM FÍSICA**

MARCO ANTÔNIO PANTOJA MACIEL

Utilização do *software* GeoGebra no ensino de Mecânica Quântica

Palmas - TO

2022



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO
TOCANTINS - IFTO, *CAMPUS* PALMAS
LICENCIATURA EM FÍSICA**

MARCO ANTÔNIO PANTOJA MACIEL

Utilização do *software* GeoGebra no ensino de Mecânica Quântica

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
como requisito parcial para obtenção do Título
de Licenciado do Curso de Graduação de Licen-
ciatura em Física do Instituto Federal do Tocan-
tins, *Campus* Palmas

Orientador: Dr. Mateus Antônio Resende

Palmas - TO

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Bibliotecas do Instituto Federal do Tocantins

M152u Maciel, Marco Antônio Pantoja
 Utilização do software GeoGebra no ensino de Mecânica Quântica /
 Marco Antônio Pantoja Maciel. – Palmas, TO, 2022.
 38 p. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Física) – Instituto
Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins, Campus Palmas,
Palmas, TO, 2022.

Orientador: Dr. Mateus Antônio Resende

1. Simulações Computacionais. 2. GeoGebra. 3. Tecnologias na
Educação. I. Resende, Mateus Antônio. II. Título.

CDD 530

A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio, deste documento é autorizada para fins de estudo e
pesquisa, desde que citada a fonte.

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica do IFTO com os dados fornecidos pelo(a)
autor(a).



Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins
Campus Palmas

FOLHA DE APROVAÇÃO

TÍTULO: O Uso do Software GeoGebra no ensino de Mecânica Quântica

AUTOR: MARCO ANTÔNIO PANTOJA MACIEL

ORIENTADOR(A): PROF. DR. MATEUS ANTÔNIO RESENDE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins, Campus Palmas, como parte das exigências para a conclusão do curso de Licenciatura em Física.

Aprovado em 08/12/2022.

Prof. Dr. Mateus Antônio Resende
IFTO - Orientador

Prof. Me. Ademar Paulo Junior
IFTO - Membro

Prof. Dr. Wallysonn Alves de Souza
IFTO - Membro



Documento assinado eletronicamente por **Mateus Antonio Resende, Servidor**, em 13/12/2022, às 10:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ademar Paulo Junior, Servidor**, em 13/12/2022, às 10:54, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Wallysonn Alves de Souza, Servidor**, em 19/12/2022, às 18:46, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.iftto.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1827176** e o código CRC **8A508831**.

Quadra 310 Sul, Lo 5, s/n, esquina com a Avenida NS 10 - Plano Diretor Sul — CEP 77.021-090
Palmas/TO — (63) 3236-4000
portal.iftto.edu.br — reitoria@iftto.edu.br

Referência: Processo nº 23236.026465/2022-46

SEI nº 1827176

Dedico este trabalho à minha tia Leide, que me mostrou como a natureza é bela, de uma forma que nenhuma aula de Física poderia.

Agradecimentos

Primeiramente, tenho que enfatizar que sou grato a tantas pessoas que *essa seção não é suficiente para agradecer todas elas*, de modo que sou obrigado a me restringir aos mais próximos, ou seja, aos familiares, amigos e professores que mais contribuíram com a minha formação.

Logo, à minha mãe, Baby Gisele, sou eternamente grato por todo e qualquer apoio que me foi dado, não apenas nesses 4 anos de formação superior, mas por toda vida. Sempre se mostrou preocupada comigo e com a minha escolha de profissão, e mesmo assim, sempre esteve ao meu lado me apoiando e fez dos meus estudos prioridade máxima. Ao meu pai, Ozéas, agradeço por tudo. Se eu gosto de Física, acho que o grande culpado foi ele. De alguma forma muito misteriosa, acho que ele, com toda sua vivência, sabe mais Física do que eu. Agradeço também ao meu irmão, João Victor, que sempre, da sua maneira, me apoiou ao longo do curso.

À minha tia Leide, *in memoriam*, não tenho nem palavras para descrever o quanto sou grato. Ela foi minha tia, madrinha e, por muitas vezes, foi minha mãe. Ela me mostrou o quão bela é a natureza mais do que qualquer aula de Mecânica Quântica ou Eletromagnetismo seria capaz. Foi, e sempre será, minha eterna professora, e me incentivou ao máximo nos estudos. Sou grato de uma maneira que não é possível descrever em palavras. Ao meu tio Helder, que foi o meu tio, padrinho, e por muitas vezes, também o meu pai, sou imensamente grato. Sempre foi meu apoio nas horas que eu mais precisei e a figura paterna nos momentos de ausência do meu pai. Agradeço imensamente por todo apoio ao longo da vida, tanto acadêmica quanto fora dela.

Agora, agradeço a todos os meus amigos do curso (e fora dele também), com especial atenção ao Sr. Davis Denner e a Srta. Marcela Vitória. O Davis foi o maior coach quântico motivacional que poderia existir, figura indispensável em um curso de Física. Meus mais sinceros agradecimentos por todos os momentos e as risadas que tivemos juntos. A Marcela se tornou meu grande apoio no curso e na vida, sem ela o curso não teria emoção. Agradeço por tudo.

Agradeço também aos meus professores, com atenção mais do que especial ao Francisco Romero e ao Mateus Antônio. Eles carregaram o curso inteiro nas costas (e a grande quantidade de disciplinas que cursei com eles não me deixa mentir). Além de mestres, considero os dois como grandes amigos. Portanto, sou imensamente grato aos dois.

Esse projeto foi desenvolvido por meio de um apoio financeiro fornecido pelo IFTO, *Campus* Palmas. Portanto, sou imensamente grato à instituição pelo fomento e apoio à pesquisa aqui apresentada. Além disso, agradeço a todos os servidores da biblioteca do *Campus*, que sempre me atenderam com muito carinho, com atenção especial ao meu amigo Luís, por todas as conversas e os cafezinhos das tardes.

“Será preciso lutar muito nos próximos anos para salvar dessa deriva utilitarista não somente a ciência, a escola e a universidade, mas também tudo o que chamamos ‘cultura’. Será preciso resistir à dissolução programada do ensino, da pesquisa científica, dos clássicos e dos bens culturais, porque sabotar a cultura e a educação significa sabotar o futuro da humanidade.”
(Nuccio Ordine - *A utilidade do inútil: um manifesto*, 2016, p. 147.)

Resumo

A utilização de simulações computacionais no ensino de Física tem sido alvo de muitas pesquisas nos últimos tempos e diversos *softwares* foram desenvolvidos para auxiliar no processo de ensino e aprendizagem, tanto da Física como das Ciências, de maneira geral. O GeoGebra é uma ferramenta interativa de simulações matemáticas bastante conhecido, com um ambiente que combina elementos de álgebra e geometria, é de fácil programação e observação dos dados nele inseridos. Nós o utilizamos para simular resultados fundamentais da Mecânica Quântica, como a catástrofe do ultravioleta, o efeito Compton e o átomo de hidrogênio. A teoria quântica não é apenas tecnicamente difícil, mas conceitualmente rica, os resultados aqui apresentados demonstram a simplicidade de uso e os inúmeros detalhes que podem vir a ser trabalhados por meio da ferramenta. Com isso, somos induzidos a imaginar que ela pode ser ainda utilizada nas demais áreas da Física, com diferentes enfoques, uma vez que se trata de um *software* com diversas funcionalidades.

Palavras-chave: Simulações Computacionais, GeoGebra, Tecnologias na Educação.

Abstract

The use of computer simulations in Physics teaching has been the target of many research in recent times and several software have been developed to assist in the teaching and learning process, both in Physics and in of Science in general. GeoGebra is a well-known interactive mathematical simulation tool, with an environment that combines elements of algebra and geometry, facilitating the programming and observation of the data inserted in it. We use it to simulate fundamental results of the Quantum Mechanics, such as the ultraviolet catastrophe, the Compton effect, the infinite square well, among others. Quantum theory is not only technically difficult, but conceptually rich, the results presented here demonstrate the simplicity of use and the countless details that can be worked on through the tool. With that, we are induced to imagine that it can still be used in other areas of Physics, with different approaches, since it is a software with several functionalities.

Keywords: Computer Simulations, GeoGebra, Technologies in Education.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Interface gráfica do <i>software</i> GeoGebra.	20
Figura 2 – Opções da barra superior do GeoGebra.	21
Figura 3 – Janela de álgebra do GeoGebra.	21
Figura 4 – Catástrofe do ultravioleta.	22
Figura 5 – Efeito Compton.	25
Figura 6 – Densidade de probabilidade para o poço quadrado infinito com largura 3. . .	28
Figura 7 – Densidade de probabilidade para o poço quadrado infinito com largura 4. . .	29
Figura 8 – Densidade de probabilidade para o poço quadrado infinito com largura 6. . .	29
Figura 9 – Superfície de densidade de probabilidade para o átomo de hidrogênio no estado ψ_{321}	31
Figura 10 – Superfície de densidade de probabilidade para o átomo de hidrogênio no estado ψ_{310}	32
Figura 11 – Superfície de densidade de probabilidade para o átomo de hidrogênio no estado ψ_{320}	33
Figura 12 – Superfície de densidade de probabilidade para o átomo de hidrogênio no estado ψ_{422}	33
Figura 13 – Série de Taylor em segunda ordem para um potencial arbitrário.	34

Lista de abreviaturas e siglas

TIC's	Tecnologias da Informação e Comunicação
MQ	Mecânica Quântica
FM	Física Moderna
IFTO	Instituto Federal do Tocantins

Lista de símbolos

c	Velocidade da luz no vácuo
π	Constante pi
h	Constante de Planck
$\hbar$	Constante de Planck dividida por 2π
k_B	Constante de Boltzmann
ρ	Densidade de energia
ν	Frequência
ω	Frequência multiplicada por 2π
T	Temperatura
ψ	Função de onda
V	Função Potencial
∇^2	Laplaciano
i	Número imaginário
r	Distância radial
θ	Ângulo polar
ϕ	Ângulo azimutal
ϵ_0	Constante de permissividade elétrica do vácuo
e	Carga elementar
n	Número quântico principal
l	Número quântico azimutal
m	Número quântico magnético

Sumário

	Introdução	14
1	REVISÃO DE LITERATURA	16
1.1	O ensino de Mecânica Quântica	16
1.2	O <i>software</i> GeoGebra	18
2	PROCEDIMENTO METODOLÓGICO	19
3	RESULTADOS	20
3.1	GeoGebra	20
3.1.1	Simulações	22
3.1.1.1	Catástrofe do ultravioleta	22
3.1.1.2	Efeito Compton	24
3.1.1.3	Poço quadrado infinito	28
3.1.1.4	Átomo de hidrogênio	30
3.1.1.5	Aproximação em série de Taylor	34
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	36
	REFERÊNCIAS	37
	ANEXOS	39
	ANEXO A – COMPROVANTE DE SUBMISSÃO DO ARTIGO.	40

Introdução

O primeiro estudo com a utilização de computadores como recurso didático ocorreu na década de 1970 no Massachusetts Institute of Technology (MIT), nos Estados Unidos. Na época, Seymour Papert, que havia trabalhado com Piaget em Genebra, fundou o Laboratório de Inteligência Artificial. Papert, apoiado nas ideias de Piaget sobre o desenvolvimento cognitivo das crianças, desenvolveu uma série de atividades integrando problemas matemáticos à programação de computadores [1]. Desde então, inúmeros estudos vêm sendo desenvolvidos com o intuito de criar estratégias pedagógicas que permitam a utilização de meios tecnológicos e midiáticos nas práticas de ensino [2].

Apesar de presente nas modalidades de educação a distância, na qual o uso de ambientes virtuais de aprendizagem é mais comum, embora o aproveitamento ainda se mostre reduzido em alguns casos, na modalidade presencial a utilização de recursos computacionais é pouco difundida. A adaptação do ambiente escolar ao uso das Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) ainda é um desafio a ser superado, cujo maior obstáculo talvez esteja na falta de preparo dos educadores para lidar com essas novas ferramentas que estão em constante atualização. Essa dificuldade em lidar com as TICs é causada principalmente pelo fato de que a maioria dos professores tiveram contato com elas tardiamente, os chamados imigrantes digitais, ao contrário dos alunos, que já nasceram nesse ambiente, denominados de nativos digitais. Por isso, é necessário desenvolver estratégias de ensino que insiram essas novas tecnologias nas práticas pedagógicas e que auxiliem professores e alunos no desenvolvimento de competências básicas para o uso desses ambientes [3].

No ensino médio, a inserção de aplicativos, *softwares* e ferramentas tecnológicas em geral, é bem difundida. Isso se dá pela busca incessante em desenvolver o interesse do estudante pela área, incentivar a busca por conhecimento e aprofundamento através dessas ferramentas, e ainda, tentar aumentar virtualmente a carga horária da disciplina de Física, que tem sido reduzida ao longo dos últimos anos [4]. Já no ensino superior, por vezes acreditamos que, tendo feito a escolha daquele curso, o aluno não precisa mais ser estimulado e, com isso, nos deparamos com disciplinas maçantes, com excesso de conteúdo, poucas discussões e ainda menos aplicações.

O uso dos recursos computacionais certamente terá cada vez mais impacto na educação. Acreditamos que uma forma de contribuir com a aprendizagem de conceitos complexos da Física estudada no ensino superior seja trazendo metodologias diferenciadas que estimulem o estudante. Nesse sentido, apresentamos nesse trabalho uma estratégia didática para ensinar alguns conteúdos de Mecânica Quântica (MQ) com o apoio de uma TIC, o GeoGebra. Um *software* livre, que une gráficos, geometria, elementos tridimensionais, álgebra computacional, entre outras ferramentas, todas inseridas numa multiplataforma que pode ser utilizada para todos

os níveis de ensino.

O estudo da MQ exige habilidade e conhecimento matemático, bem como a capacidade de compreender conceitos e modelos abstratos. As ideias envolvidas representam um desafio constante em que o estudante do curso de graduação em Física precisa visualizar a natureza contra-intuitiva de um mundo de escala subatômica [5]. Portanto, aprender sobre esse tema significa ser capaz de analisar, interpretar e ainda correlacionar as diversas informações fundamentais para a construção da teoria e da base matemática que estruturou o que conhecemos sobre os fenômenos quânticos. E ainda, num mundo globalizado onde o compartilhamento de informações em redes sociais é cada vez mais rápido, o que leva a disseminação de pseudociências e termos utilizados de forma a reforçar crenças e práticas que não atendem a metodologias científicas, precisamos desenvolver meios e métodos que facilitem e universalizem a correta compreensão e uso dos conceitos estudados aqui [6].

Em diversos países, um estudo introdutório de MQ já se faz presente nos currículos do Ensino Médio [7]. Devido a alta complexidade dessa área da Física, equívocos, especialmente conceituais, são facilmente cometidos nessa etapa de ensino, uma vez que o mundo quântico foge da concepção intuitiva humana, que advém de escalas macroscópicas, ou seja, de um mundo clássico [7, 8]. Com o objetivo de transpor essas dificuldades, o GeoGebra se mostrou como uma excelente ferramenta para a criação de simulações computacionais que podem ser utilizadas no ensino de temas mais avançados, em tempos curtos, com um público pouco familiarizado com as sutilezas desse mundo microscópico [9].

Nesse aspecto, as simulações computacionais podem ser de grande ajuda para os estudantes. A utilização das TIC's vem nos auxiliando no processo de ensino-aprendizagem e, aliado a um bom desenvolvimento dos conceitos teóricos, torna possível a discussão de temas complexos em níveis cada vez mais altos e em idades cada vez menores, fazendo uso inclusive, das próprias redes sociais para a divulgação de material acerca do assunto [10].

Portanto, esse trabalho tem como objetivo, apresentar o *software* GeoGebra, suas principais ferramentas e como ele pode ser utilizado para a elaboração de simulações de Física que auxiliem em aulas de MQ.

1 Revisão de literatura

1.1 O ensino de Mecânica Quântica

O surgimento da MQ transformou a forma como entendíamos o método científico. A maneira de produzir ciência foi totalmente impactada e isso nos trouxe, e traz, diversas descobertas que impactam em tecnologias cada vez mais surpreendentes, onde grande parte delas possui a MQ como base de sustentação, como é o caso da Física Nuclear, da Teoria Geral de Partículas e Campos, da Matéria Condensada, entre outras, que influenciaram no desenvolvimento recente de dispositivos eletrônicos, na Nanotecnologia e na área da saúde.

A disciplina de MQ passou então a ter lugar garantido nos cursos de graduação em Física e lugar de destaque nas pós-graduações. As abordagens típicas dos cursos tradicionais, no entanto, costumam focar em aspectos históricos, diferenças com as concepções clássicas e apresentação de novos modelos e equações, o que muito pouco se conecta com aspectos fenomenológicos e que acabam se distanciando muito da realidade das principais aplicações da teoria. Talvez por isso, uma busca intensa pelo desenvolvimento de novas estratégias didáticas vem acontecendo e cada vez mais vemos esse tema sendo discutido nos congressos e revistas de ensino de Física. Neles, a Física se mistura a computação, a arte e até mesmo às histórias em quadrinhos, tudo para que professores e alunos tenham instrumentos diversos que possam auxiliar o processo de ensino-aprendizagem [11, 12, 13, 14].

Os apontamentos que levaram à elaboração desse trabalho surgiram no decorrer das disciplinas de Física Moderna (FM) e MQ, do sexto e sétimo períodos, respectivamente, da graduação em Licenciatura em Física do Instituto Federal do Tocantins, *campus* Palmas. Na ocasião, foram utilizados os livros textos “Física Quântica - Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas” de Eisberg e Resnick [15] e “Mecânica Quântica” de Griffiths [16], tradicionais obras de cursos introdutórios. Notamos que vários segmentos de ambos os livros deixavam lacunas que poderiam ser exploradas se utilizado o mecanismo correto. Nossa ideia aqui não é focar em discussões conceituais. Para isso, inclusive, recomendamos a leitura da proposta [17]. Discutimos nesse texto uma forma de utilizar um *software* para dar mais autonomia ao estudante, para que assim ele possa interagir ativamente com os conteúdos. O uso do GeoGebra representa para nós uma espécie de laboratório portátil de MQ, onde simulações e gráficos podem ser desenvolvidos e trabalhados para verificarmos a teoria e, com isso, tornarmos mais dinâmico o entendimento de tudo o que aprendemos em sala de aula.

Estudar MQ requer um olhar diferenciado para a forma como a mesma foi construída e desenvolvida ao longo dos anos. É necessário revisitar o passado constantemente para que possamos juntar as peças que compuseram essa parte da Física tão complexa e ao mesmo

tempo tão admirável. É fundamental que sigamos a cronologia dos fatos para que tenhamos mais facilidade em conectar os acontecimentos e as contribuições que cada um acrescentou naquele momento. Ou seja, precisamos acompanhar a evolução das ideias da Física. Mas, como observadores do século XXI, devemos utilizar nossas ferramentas para interagir com as descobertas durante essa evolução, tudo isso para que possamos extrair o máximo de informações do conteúdo. Assim como arqueólogos utilizam da tecnologia para estudar o comportamento dos povos da antiguidade através da análise de objetos materiais de tempos remotos.

Quando estudamos, por exemplo, a previsão de Rayleigh-Jeans para a densidade de energia de uma cavidade de corpo negro e comparamos aos resultados experimentais, o que chamamos de catástrofe do ultravioleta, devido a grande discordância dos resultados teóricos e experimentais, temos o famoso gráfico que sempre é apresentado. No entanto, desejamos que a interação entre professor, estudante e simulação, permita que seja possível obter esse mesmo gráfico juntos e, além disso, variar parâmetros e ver como ele se comporta, o que de fato altera as curvas do gráfico e onde a antiga previsão teórica começa a falhar. As equações serão apresentadas da mesma forma, podemos alterar apenas a metodologia, onde agora o estudante irá programar o GeoGebra para que ele construa os gráficos referentes ao fenômeno e possa obter, inclusive, o resultado descoberto por Planck, considerado por muitos o ponto inicial da abordagem quântica.

No efeito Compton, causado pelo espalhamento da luz por um elétron e a consequente diferença de energia entre o fóton espalhado e o fóton incidente, podemos simplesmente mostrar a imagem da colisão e deduzir a equação de Compton através das leis de conservação do momento e da energia, como tradicionalmente é feito. Queremos, no entanto, produzir a simulação dessa colisão para que possamos estudar o comportamento do fóton e do elétron após o choque, alterar a energia do fóton incidente, variar o ângulo do fóton espalhado, mostrar que o aumento no comprimento de onda independe do comprimento de onda inicial, entre outras características do fenômeno. Se, por um lado, ter um aparelho de raios-x para exemplificar isso foge da realidade da maior parte das classes de graduação, trabalhar com a simulação que requer apenas um computador e um programa, parece bem mais factível a todos.

Temos ainda uma das situações conceituais mais desafiadoras do ensino de Mecânica Quântica nos cursos introdutórios, que é a interpretação probabilística de Born, onde associamos a função de onda de uma partícula com a probabilidade de encontrarmos essa partícula em uma certa região do espaço. A passagem da interpretação determinística Newtoniana para essa, não é simples, uma vez que estamos conectando um elemento abstrato da teoria, a função de onda, com um observável, a posição. Nesse ponto, uma ferramenta como o Geogebra que permite representar graficamente as regiões do espaço, explorar os locais de diferentes probabilidades, e ainda colaborar com a resolução da equação de Schrodinger, pode ser um diferencial na metodologia de ensino.

As possibilidades são inúmeras e se estendem para muito além das páginas desse artigo.

Na próxima seção, apresentamos, de maneira geral, o *software* GeoGebra.

1.2 O *software* GeoGebra

O GeoGebra é um *software* de código aberto de matemática bastante dinâmico [18]. Ele foi inicialmente desenvolvido por Markus Hohenwarter como um projeto de dissertação [19]. Devido à imensa importância que acabou se tornando para o meio acadêmico, no que diz respeito ao ensino e à pesquisa em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática, foi traduzido para mais de 70 idiomas e conta atualmente com uma comunidade contemplando milhares de usuários, dispersos em todo o planeta. É um *software* de imensa importância e reconhecimento, como demonstram suas inúmeras premiações, que podem ser facilmente consultadas no seu site [18].

O GeoGebra conta com inúmeros recursos, que podem ser explorados de diversas maneiras. Se trata de um *software* com diversos recursos matemáticos que podem ser explorados com um enfoque na Física e no ensino de Física [20, 21, 22, 23, 24]. Nele, reúnem geometria e álgebra de uma maneira dinâmica, permitindo a elaboração de simulações Físicas de baixa e alta complexidade, como as que serão apresentadas nesse trabalho.

2 Procedimento metodológico

Para a construção desse trabalho, primeiramente fez-se uma exploração extensiva do *software* GeoGebra e de suas principais funcionalidades que poderiam ser utilizadas para a construção de simulações em um contexto de Física, especificamente em MQ. Posteriormente, foram selecionados conteúdos que tradicionalmente compõem a ementa de cursos introdutório das disciplinas de FM e MQ. Para tanto, foram utilizados os livros textos “Física Quântica - Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas” de Eisberg e Resnick [15], “Mecânica Quântica” de Griffiths [16] “Curso de Física Básica 4” de H. Moysés Nussenzveig [8], para fundamentar os conteúdos e também para indicar possíveis simulações que poderiam ser construídas.

Logo em seguida, as simulações foram elaboradas seguindo uma ordem que é comumente trilhada nessas disciplinas e que compõe também a ordem sequencial em que as referências citadas acima seguem. Portanto, se tratando especificamente da disciplina de FM, são elaboradas duas simulações. Primeiramente, foi feita uma simulação para a catástrofe do ultravioleta, que marca o início da quantização da energia na Física. Posteriormente, foi elaborada uma simulação para o efeito Compton, que tradicionalmente é abordado logo após o efeito fotoelétrico, que por sua vez, é abordado logo após a catástrofe do ultravioleta.

Com relação à disciplina de MQ, são elaboradas três simulações. A primeira foi do poço quadrado infinito, que, por se tratar de um dos potenciais mais simples para serem inseridos e resolvidos analiticamente via equação de Schrödinger, ocupa lugar garantido no início dessa disciplina. A segunda simulação elaborada é referente a solução do átomo de hidrogênio, que, no geral, é um dos últimos conteúdos a serem abordados em disciplinas introdutórias de MQ. Por último, elaborou-se uma simulação para a aproximação em segunda ordem via Série de Taylor para um potencial arbitrário, que contém uma região que pode se tornar uma barreira de potencial para uma partícula, por exemplo.

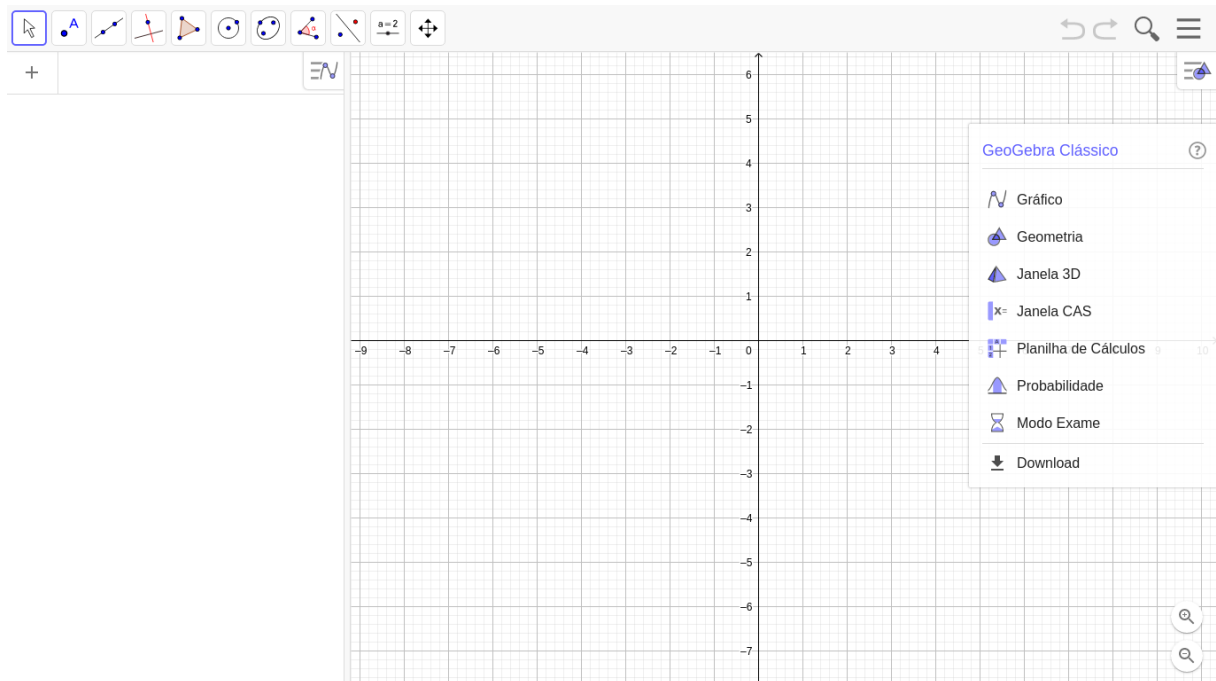
Por fim, todas as simulações passaram por um processo de simplificação de seus comandos, para permitir mais facilmente a sua reprodução em sala de aula, tanto pelos professores quanto pelos alunos das disciplinas mencionadas.

3 Resultados

3.1 GeoGebra

A interface gráfica inicial do GeoGebra pode ser visualizada na Figura 1, logo em seguida. Ao longo desse trabalho, apresentaremos cinco simulações, em que quatro delas utilizam-se da opção de gráfico, e uma delas, da janela 3D. Portanto, ao iniciar a construção da simulação deve-se selecionar a opção desejada no canto à direita.

Figura 1 – Interface gráfica do *software* GeoGebra.

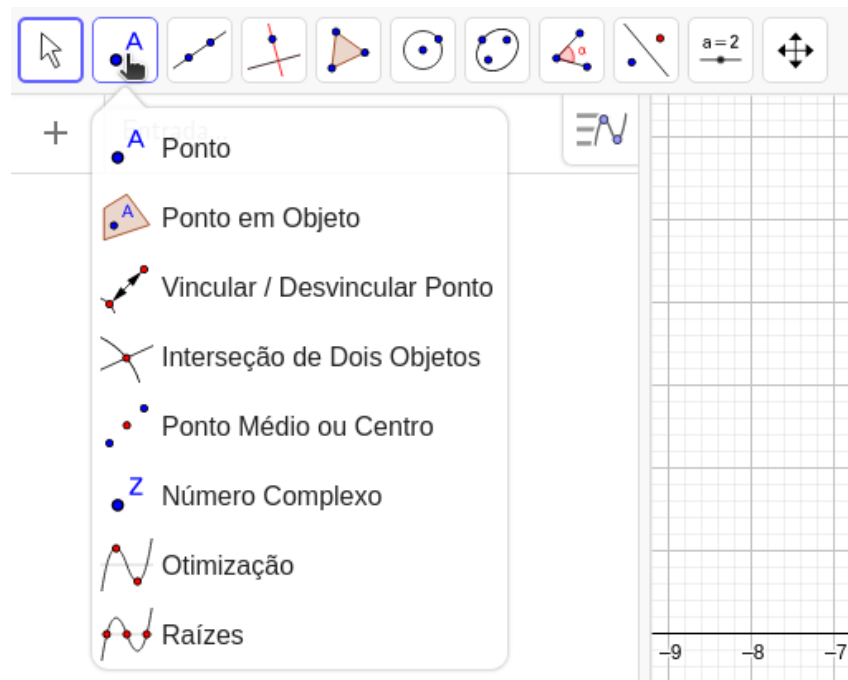


Fonte: autores, 2022. Legenda: essa é a tela inicial do *software* GeoGebra ao ser iniciado.

Como pode ser visto na Figura acima, a barra superior do aplicativo apresenta diversas funcionalidades. Ao colocar o mouse em alguma dessas opções, abre-se uma gama de novas opções dentro de cada uma delas ¹, conforme pode ser visto na Figura 2, que foi obtida ao deixar o mouse na segunda opção.

¹Recomenda-se fortemente que o leitor explore cada uma dessas opções para adquirir maior familiaridade com o *software*.

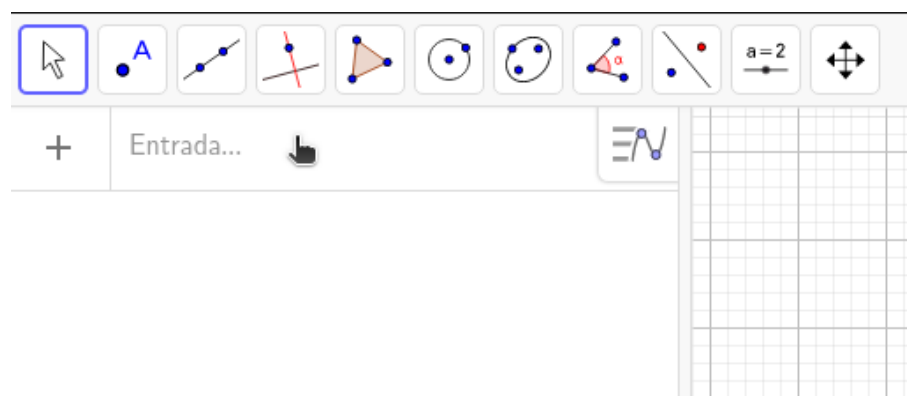
Figura 2 – Opções da barra superior do GeoGebra.



Fonte: autores, 2022. Legenda: essa é a barra superior que aparece na tela inicial do *software*. Por meio dela, pode-se utilizar de alguns recursos mais facilmente que por comandos.

Ao longo desse trabalho, a janela de álgebra será amplamente utilizada. Por meio dela, inserem-se as funções de entrada no *software*. De modo muito simples, ela pode ser acionada com um único clique na barra de entrada, conforme pode ser visualizado na Figura 3, logo abaixo.

Figura 3 – Janela de álgebra do GeoGebra.



Fonte: autores, 2022. Legenda: por meio dessa janela se inserem os comandos na linguagem que o GeoGebra interpreta.

Todas as funções que forem inseridas no aplicativo por meio dessa janela, devem ser escritas de acordo com a linguagem de comandos que o GeoGebra compreende, que é uma linguagem bem intuitiva. Por exemplo, para soma e subtração utilizam-se as teclas + e -, enquanto

que $/$ é utilizada para divisão e um espaço para multiplicação. Além disso, ele também reconhece algumas constantes bem conhecidas, como π , que o *software* reconhece ao escrever `pi` na janela de álgebra e o número de Euler, ao escrever a letra `e`.

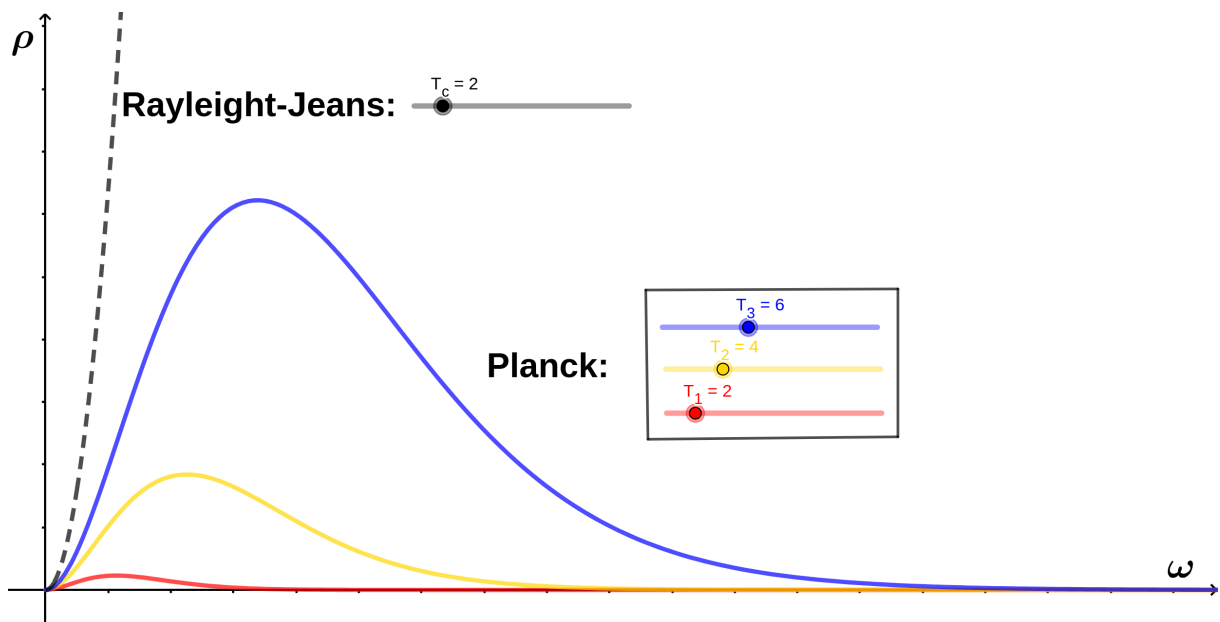
Essas são as principais funcionalidades do *software* que foram utilizadas para a construção das simulações que apresentaremos nesse trabalho. Portanto, na subseção que se segue, pode-se verificar os resultados obtidos e acompanhar a construção de cada uma das simulações realizadas.

3.1.1 Simulações

3.1.1.1 Catástrofe do ultravioleta

A primeira simulação, apresentada na Figura 4, refere-se à catástrofe do ultravioleta. Nela, é possível fazer uma comparação entre as soluções clássicas e quânticas, e como elas diferem entre si. As linhas contínuas representam a solução quântica para temperaturas diferentes, obtidas pela equação de Planck, e a solução clássica, indicada pela curva tracejada, obtido pela equação de Rayleigh-Jeans.

Figura 4 – Catástrofe do ultravioleta.



Fonte: autores, 2022. Legenda: as áreas sobre os gráficos representam a energia total emitida. Para a curva tracejada, a energia tende ao infinito.

Utilizamos a convenção $c = \hbar = k_B = 1$, ou seja, utilizamos do Sistema Natural de Unidades, em que c representa a velocidade da luz no vácuo, $\hbar$ a constante de Planck dividida por 2π , e k_B a constante de Boltzmann. Podemos observar que a medida em que se altera o valor da temperatura² por meio do controle deslizante, as curvas sofrem alterações no seu comportamento,

²Que está fora de escala, em comparação com valores experimentais, devido à convenção adotada.

mas mantendo a mesma estrutura, o que de fato nos interessa.

A equação de Planck para o corpo negro é dada por [16]:

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3 (e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1)}. \quad (3.1)$$

Em que ρ é a densidade de energia e ω é a frequência dos fótons multiplicada por 2π . Portanto, considerando $c = \hbar = k_B = 1$, essa equação sofre a seguinte adaptação para ser utilizada no *software*:

$$\rho(\omega) = \frac{\omega^3}{\pi^2 (e^{\frac{\omega}{T}} - 1)}. \quad (3.2)$$

Entretanto, para facilitar o manuseio da ferramenta, a função utilizada no *software* será dada em termos de x e não de ω , tornando necessário trocar ω por x nessa expressão (e, portanto, $\rho(\omega)$ por $f(x)$). Logo, a construção da simulação deverá levar em consideração a seguinte função:

$$f(x) = \frac{x^3}{\pi^2 (e^{\frac{x}{T}} - 1)}. \quad (3.3)$$

Por outro lado, a equação de Rayleigh-Jeans é dada por [15]:

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi\nu^2 k_B T}{c^3}, \quad (3.4)$$

onde, considerando $\omega \equiv 2\pi\nu$, temos:

$$\rho(\omega) = \frac{2\omega^2 k_B T}{\pi c^3}. \quad (3.5)$$

De modo análogo ao que foi feito anteriormente, apenas trocando ω por x para facilitar o manuseio da ferramenta, temos a seguinte função:

$$g(x) = \frac{2x^2 T}{\pi}. \quad (3.6)$$

O passo-a-passo para a construção geral da simulação pode ser visualizado no Box 1 ³, logo abaixo.

³Vale ressaltar que, ao seguir os passos apresentados nesse Box, assim como em todos os outros desse trabalho, não constroem-se as simulações tal como elas estão apresentadas nas figuras. Para isso, será necessário alterar algumas características visuais nas configurações, como: a retirada da malha do fundo, alterar a coloração, espessura e tipo de linha na função, além de outras características particulares de cada simulação.

Box 1: construção da simulação 1.

1. Escreva, na janela de álgebra, quatro controle deslizantes para as temperaturas T_1 , T_2 , T_3 e T_c , e altere, nas configurações, para que variem de 0 a 15 com incremento 1.

2. Use o comando:

Se (<Condição>, <Então>),

$$\text{com: } \begin{cases} \text{<Condição>: } x > 0 \\ \text{<Então>: } \frac{x^3}{\pi^2(e^{\frac{x}{T_1}} - 1)}. \end{cases}$$

3. Repita o passo 2, porém usando as temperaturas T_2 e T_3 .

4. Use novamente o comando:

Se (<Condição>, <Então>),

$$\text{com: } \begin{cases} \text{<Condição>: } x > 0 \\ \text{<Então>: } \frac{2x^2 T_c}{\pi}. \end{cases}$$

5. Altere as posições dos controles deslizantes para perceber o comportamento de cada gráfico individualmente.

3.1.1.2 Efeito Compton

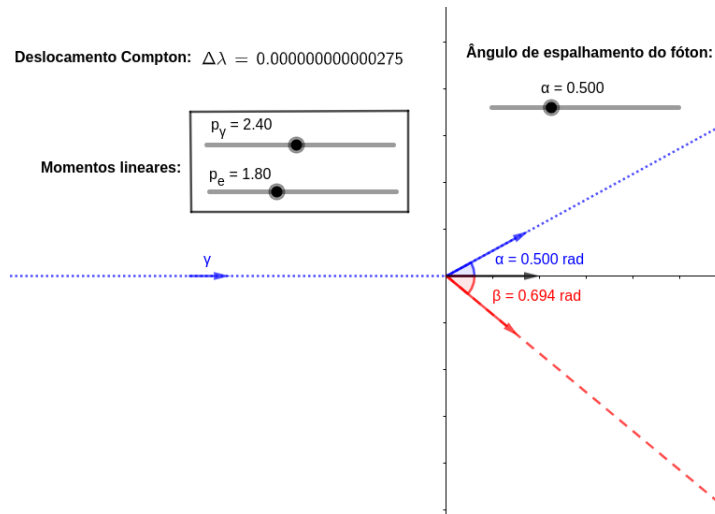
A segunda simulação realizada foi do efeito Compton. Esse fenômeno foi descrito por Arthur Compton ao observar o espalhamento de raios-x em alvos de grafita [8]. Nele, leva-se em consideração o comportamento corpuscular da luz e trata o fenômeno como uma colisão, entre os fótons de raios-x, que possuem energia e momento bem definidos, com os elétrons do material, com uma energia de repouso também definida. Desse modo, Compton conseguiu descrever o comportamento do fóton espalhado (por meio do ângulo de espalhamento) ao colidir com o elétron, levando em consideração tanto a Relatividade Restrita, quanto a MQ, uma vez que os fótons estão à velocidade c da luz e possuem uma energia $h\nu$. A equação que Compton obteve para essa descrição, foi:

$$\Delta\lambda = \lambda_C(1 - \cos(\theta)). \quad (3.7)$$

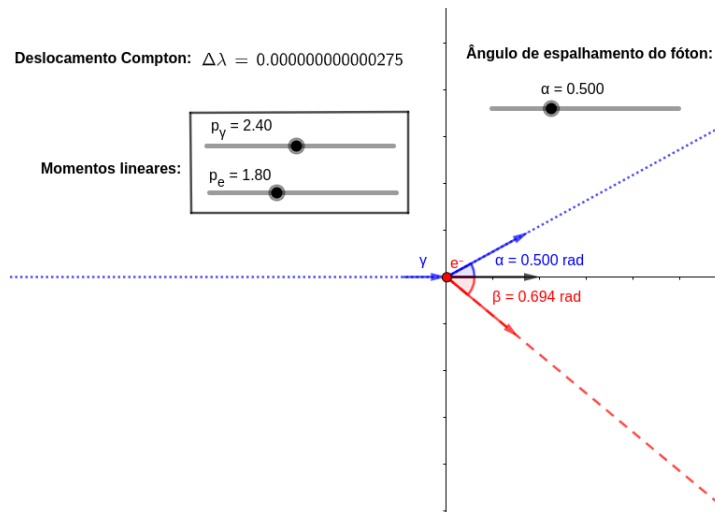
Nela, $\lambda_C \equiv h/m_e c$, em que h é a constante de Planck, m_e é a massa do elétron e c é a velocidade da luz no vácuo. Numericamente, $\lambda_C \approx 2,426 \times 10^{-12} \text{ m}$. Além disso, nessa equação, θ é o ângulo de espalhamento do fóton. Desse modo, a simulação realizada, que pode ser visualizada na Figura 5, leva em consideração esse ângulo espalhamento.

Figura 5 – Efeito Compton.

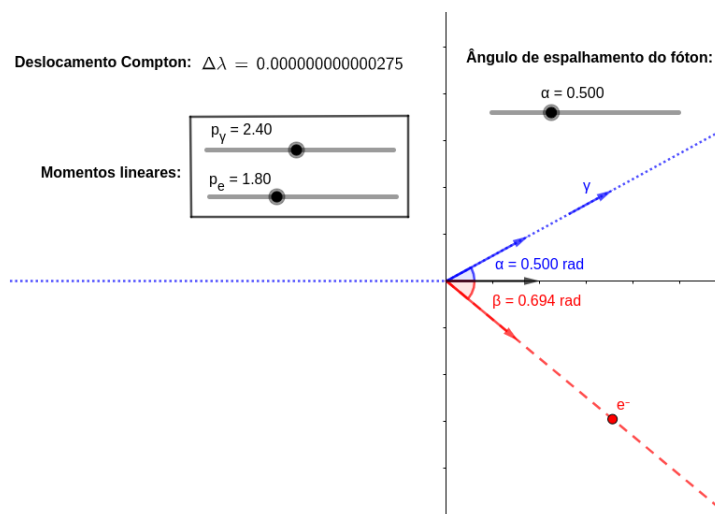
(a) Antes da colisão.



(b) Durante a colisão.



(c) Após a colisão.



Fonte: autores, 2022. Legenda: as linhas azuis representam a trajetória percorrida pelo fóton, enquanto a linha vermelha representa a trajetória do elétron de recuo.

Na simulação, é possível ver todas as trajetórias envolvidas, tanto do fóton antes e depois da colisão, quanto a trajetória do elétron de recuo⁴. Com isso, a trajetória em azul indica o “caminho” percorrido pelo fóton, enquanto a linha vermelha representa a trajetória do elétron de recuo, bem como os objetos sobre as curvas representam o fóton e o elétron, seguindo o mesmo padrão de coloração. A simulação da Figura 5 é dinâmica, permitindo a visualização completa da colisão, pois o elétron só passa a se movimentar a partir do instante em que ele e o fóton colidem.

Ao tratar esse fenômeno como uma colisão, o momento linear deve ser conservado. Portanto, como o momento linear é uma grandeza vetorial, seus componentes se conservam separadamente, de tal modo que, para o componente vertical da Figura 5, temos:

$$p_{\gamma} \sin(\theta) - p_e \sin(\beta) = 0, \quad (3.8)$$

Essa relação se dá em detrimento do momento linear vertical ser nulo antes da colisão, uma vez que, antes da colisão, o fóton da Figura 5 se movimenta unicamente na direção horizontal. Portanto, para que essa grandeza seja conservada, deve-se permanecer nula após a colisão. Na equação 3.8, p_{γ} é o módulo do momento linear do fóton, p_e é o módulo do momento linear do elétron de recuo, θ é o ângulo de espalhamento do fóton e β é o ângulo de espalhamento do elétron de recuo. Logo, pela equação 3.8, a relação entre os ângulos de espalhamento do elétron e do fóton é dada por:

$$\beta = \arcsen\left(\frac{p_{\gamma}}{p_e} \sin(\theta)\right). \quad (3.9)$$

Para a elaboração da simulação, levou-se em consideração essa relação entre os ângulos de espalhamento. O passo-a-passo geral para a elaboração dessa simulação pode ser visualizado no Box 2. Ao seguir os passos do Box 2, fará a simulação de maneira geral, mas não criará os mesmos aspectos estéticos do que foi apresentado na Figura 5. Para isso, será necessário fazer algumas modificações nas configurações de cada objetivo inserido, como a alteração na coloração das funções e no seu tipo de tracejamento.

Além disso, recomenda-se que se retirem alguns dos objetos auxiliares da janela de visualização, pois estes podem sobrecarregar o aspecto visual da simulação. Também é recomendável que se altere, nas configurações do GeoGebra, o arredondamento para 3 algarismo significativos, caso contrário, o *software* pode não reconhecer o valor do deslocamento Compton, uma vez que este é muito pequeno.

⁴É importante ressaltar que o conceito de trajetória não é bem definido na MQ, entretanto, a simulação aqui apresentada tem propósitos didáticos e segue os mesmos padrões das ilustrações bem conhecidas da literatura no que diz respeito ao efeito Compton, como a apresentada em [8], que serviu de base para a elaboração dessa simulação.

Box 2: construção da simulação 2.

1. Insira os controles deslizantes α , p_γ e p_e , com os seguintes intervalos^a:
$$\begin{cases} \alpha : [0, \frac{\pi}{2}], \\ p_\gamma : [0, 5], \\ p_e : [0, 5]. \end{cases}$$
2. Defina a como a razão p_γ/p_e .
3. Adicione 3 vetores em coordenadas polares, por meio dos comandos: $v = (2; \alpha)$, $u = (2; -\arcsen(a \sin(\alpha)))$ e $w = (2; 0)$ ^b
4. Adicione dois ângulos entre os vetores, por meio do comando $\hat{\text{Angulo}}(\langle \text{Vetor} \rangle, \langle \text{Vetor} \rangle)$, com: $\hat{\text{Angulo}}(w, v)$ ^c, $\hat{\text{Angulo}}(u, w)$.
5. Defina duas semirretas por meio do comando $\text{Semirreta}(\langle \text{Ponto Inicial} \rangle, \langle \text{Vetor Diretor} \rangle)$,
ou seja:
$$\begin{cases} \text{Semirreta}((0, 0), v), \\ \text{Semirreta}((0, 0), u). \end{cases}$$
6. Defina uma função $h(x) = 0$.
7. Adicione a trajetória do fóton por meio do comando $\text{Se}(\langle \text{Condição} \rangle, \langle \text{Então} \rangle, \langle \text{Senão} \rangle)$,
com:
$$\begin{cases} \langle \text{Condição} \rangle: x > 0, \\ \langle \text{Então} \rangle: f(x)$$
^d,
 $\langle \text{Senão} \rangle: h(x).$
8. Adicione dois controles deslizantes, b e c , com b definido de 0 até 1, apenas no sentido crescente, e $c = b + 0.04$.
9. Acrescente dois pontos A e B, por meio do comando $\text{Ponto}(\langle \text{Objeto} \rangle, \langle \text{Parâmetro} \rangle)$. O Objeto, para os dois pontos será p , e o Parâmetro para o ponto A será b , enquanto c o será para o ponto B.
10. Crie um vetor, por meio do comando $\text{Vetor}(\langle \text{Ponto Inicial} \rangle, \langle \text{Ponto Final} \rangle)$, com A como ponto inicial e B como ponto final. Esse vetor ilustrará o fóton na simulação.
11. Adicione um ponto, que representará o elétron de recuo por meio do comando $\text{Ponto}(\langle \text{Objeto} \rangle, \langle \text{Parâmetro} \rangle)$,
com:
$$\begin{cases} \langle \text{Objeto} \rangle: \text{Se}(x > 0, g(x)), \\ \langle \text{Parâmetro} \rangle: c. \end{cases}$$
12. Calcule o deslocamento Compton por meio da equação $\Delta\lambda = 2.2426 \cdot 10^{-12}(1 - \cos(\alpha))$ ^e e posteriormente arraste o comando da janela de álgebra para a janela de visualização.
13. Acione o controle deslizante b para verificar o funcionamento da simulação.

^a**Atenção:** esses intervalos são definidos nas configurações dos controles deslizantes.^bNesse passo, é imprescindível que se use ; ao invés de apenas , para separar as coordenadas. Desse modo, o GeoGebra reconhecerá que se tratam de coordenadas polares, com o primeiro componente sendo radial e o segundo componente o termo angular.^c**Atenção:** esse ângulo é o mesmo ângulo α definido pelo controle deslizante no passo 1.^dEssa é uma função definida pela primeira semirreta do passo 5.^eNesse comando, o Δ e o λ podem ser escritos por meio do teclado virtual do GeoGebra.

3.1.1.3 Poço quadrado infinito

A próxima simulação é do poço quadrado infinito. Nele, o potencial aplicado tem o seguinte aspecto [16]:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x \leq a \\ \infty, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.10)$$

Portanto, a simulação leva em consideração a solução da equação:

$$-\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x), \quad (3.11)$$

ou seja, a equação de Schrödinger unidimensional e independente do tempo, levando em consideração o potencial dado pela equação 3.10. Na equação 3.11, $\hbar$ é a constante de Planck dividida por 2π , m é a massa da partícula e E é a energia. A solução, para esse potencial específico, é dada por [16]:

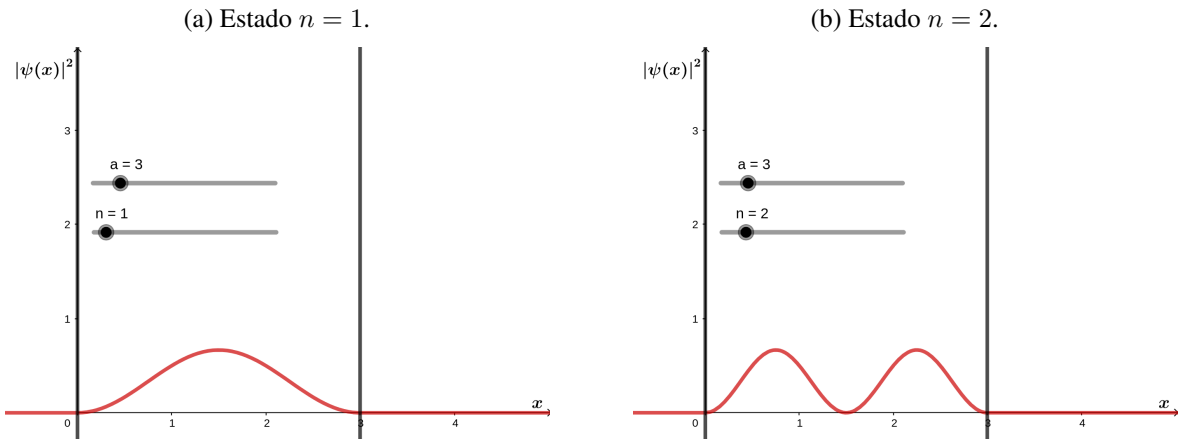
$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad \text{com } n = \{1, 2, 3, \dots\}. \quad (3.12)$$

Nessa solução, n é o número quântico principal e a é a largura do poço. Considerando a interpretação estatística de Max Born, a função que indicará a densidade de probabilidade de encontrar o elétron será $|\psi|^2 = \psi^*\psi$, ou seja:

$$|\psi_n(x)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad \text{com } n = \{1, 2, 3, \dots\}. \quad (3.13)$$

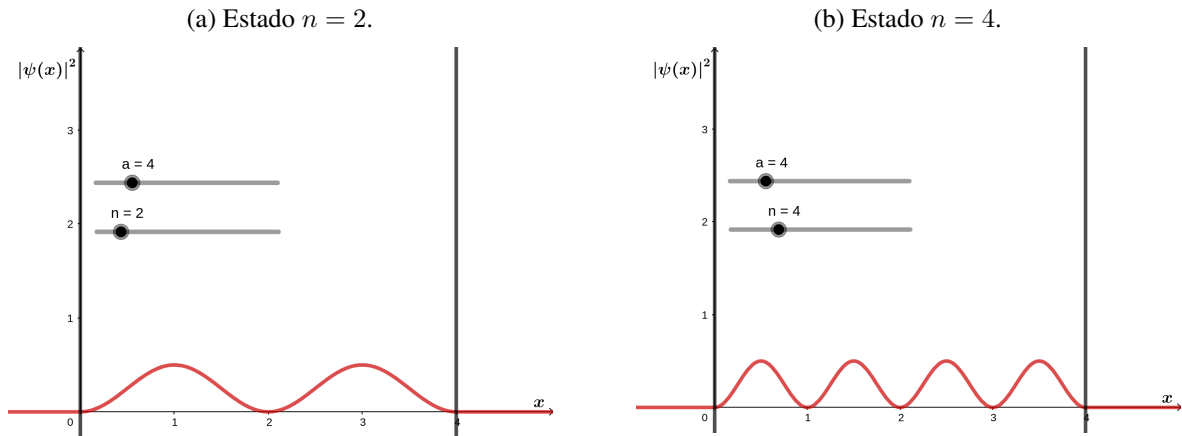
Devido à característica do potencial aplicado na partícula, ela fica confinada ao interior do poço. Portanto, a simulação construída indica exatamente as regiões de pico no interior do poço, sendo essas, as regiões de maior probabilidade para encontrarmos a partícula confinada. A simulação pode ser visualizada nas Figuras 6, 7 e 8. Nelas, pode-se verificar qual é o comportamento da função ao alterar a largura a do poço e o estado n da partícula. Toda a construção da simulação pode ser consultada no Box 3.

Figura 6 – Densidade de probabilidade para o poço quadrado infinito com largura 3.



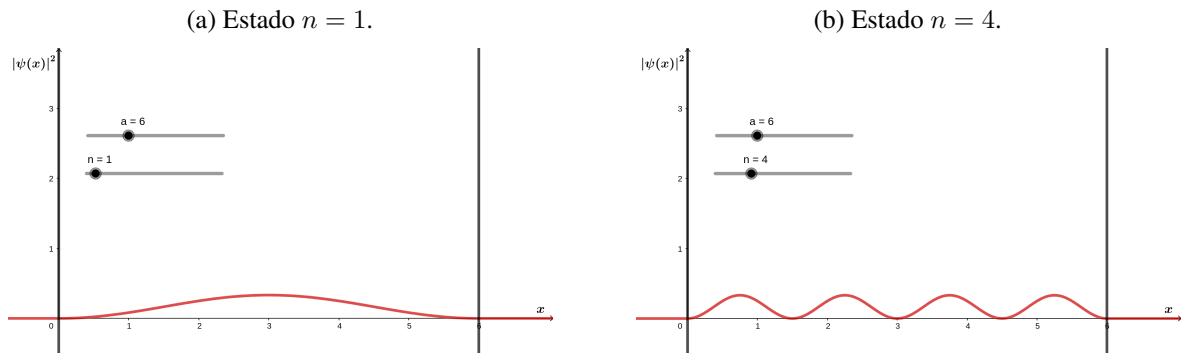
Fonte: autores, 2022. Legenda: as áreas sobre os gráficos representam a probabilidade total de encontrar o elétron, enquanto os picos representam as regiões mais prováveis dele ser encontrado.

Figura 7 – Densidade de probabilidade para o poço quadrado infinito com largura 4.



Fonte: autores, 2022. Legenda: as áreas sobre os gráficos representam a probabilidade total de encontrar o elétron, enquanto os picos representam as regiões mais prováveis dele ser encontrado.

Figura 8 – Densidade de probabilidade para o poço quadrado infinito com largura 6.



Fonte: autores, 2022. Legenda: as áreas sobre os gráficos representam a probabilidade total de encontrar o elétron, enquanto os picos representam as regiões mais prováveis dele ser encontrado.

Box 3: construção da simulação 3.

1. Insira dois controles deslizantes a e n , que variem de 0 a 15 com incremento 1.
2. Insira as duas retas que delimitam as extremidades do poço, escrevendo, na janela de álgebra: $x = 0$ e $x = a$.
3. Use o comando: Se (<Condição>, <Então>, <Senão>),

$$\text{com: } \begin{cases} \text{<Condição>: } 0 < x < a, \\ \text{<Então>: } \frac{2}{a} \sin^2 \left(\frac{n\pi x}{a} \right), \\ \text{<Senão>: } 0. \end{cases}$$

4. Acione os controles deslizantes a e n para verificar o comportamento da função.

3.1.1.4 Átomo de hidrogênio

A próxima simulação apresentada é, em princípio, bastante semelhante à anterior, mas, leva em consideração a solução da equação de Schrödinger em três dimensões, ou seja, para o átomo de hidrogênio. O potencial ao qual o átomo de hidrogênio está, é o potencial Coulombiano, logo, em coordenadas esféricas:

$$V(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}. \quad (3.14)$$

Portanto, a simulação leva em consideração a solução da equação:

$$-\frac{\hbar}{2m} \nabla^2 \psi + V(r)\psi = E\psi, \quad (3.15)$$

ou seja, a equação de Schrödinger tridimensional e independente do tempo, levando em consideração o potencial dado pela equação 3.14. Na equação 3.15, $\hbar$ é a constante de Planck dividida por 2π , m é a massa da partícula, ∇^2 é o laplaciano e E é a energia. A solução é encontrada de forma analítica, depois de algumas manipulações algébricas. Com isso, resolve-se por separação de variáveis, separando a parte radial da parte angular e posteriormente reunindo as duas partes na solução geral, que é [16]:

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r)Y_l^m(\theta, \phi). \quad (3.16)$$

Nessa solução, n , l e m são os números quânticos principal, azimutal e magnético, respectivamente, enquanto $R_{nl}(r)$ é a solução radial e $Y_l^m(\theta, \phi)$ faz parte da solução angular, chamada de harmônicos esféricos. Aqui, escolhemos o estado ψ_{321} para representarmos na simulação, de forma que temos:

$$\psi_{321}(r, \theta, \phi) = R_{32}(r)Y_2^1(\theta, \phi). \quad (3.17)$$

Levando-se em consideração o estado Ψ_{321} , temos a seguinte função de onda:

$$\psi_{321} = -\frac{1}{81a^3\sqrt{a\pi}} r^2 e^{-\frac{r}{3a}} \sin(\theta) \cos(\theta) e^{i\phi}. \quad (3.18)$$

Para simplificação, toma-se $k \equiv -1/81a^3\sqrt{a\pi}$. Logo:

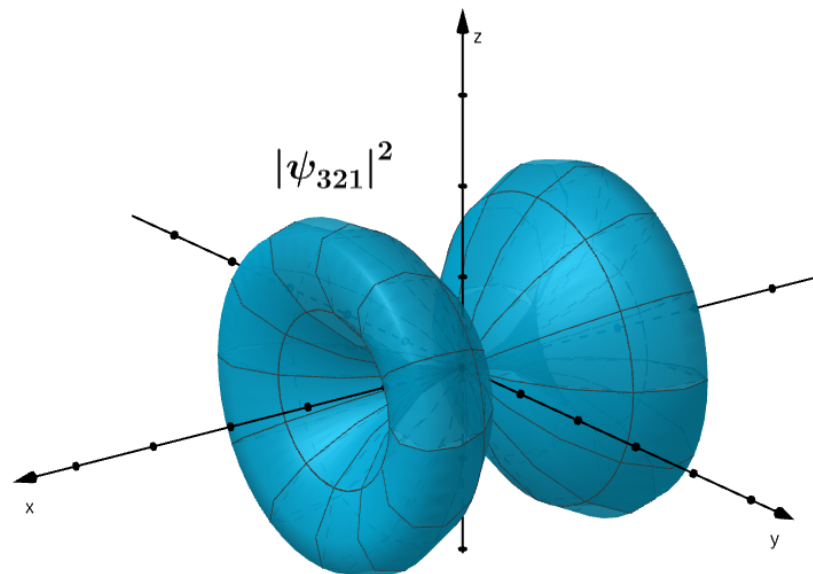
$$\psi_{321} = -kr^2 e^{-\frac{r}{3a}} \sin(\theta) \cos(\theta) e^{i\phi}. \quad (3.19)$$

Por carregar um termo imaginário, essa função de onda por si só não tem significado físico, sendo necessário tomar o módulo dela ao quadrado para que represente a amplitude de probabilidade de encontrar o elétron nesse estado, tal como fora realizado na simulação anterior, ou seja:

$$|\psi_{321}|^2 = k^2 r^4 e^{-\frac{2r}{3a}} \sin^2(\theta) \cos^2(\theta). \quad (3.20)$$

Levando em consideração esse resultado, a simulação foi construída. Para simplificar a simulação, tomamos $k = 1$. Isso não altera a geometria da superfície da densidade de probabilidade, apenas a sua escala. A simulação pode ser visualizada na Figura 9. Nela, as regiões em azul, mais afastadas da origem do sistema, possuem maior probabilidade de encontrar o elétron, enquanto que as mais próximas possuem menor probabilidade. O passo-a-passo da sua construção pode ser consultado no Box 4.

Figura 9 – Superfície de densidade de probabilidade para o átomo de hidrogênio no estado ψ_{321} .



Fonte: autores, 2022. Legenda: as regiões mais afastadas da origem representam os locais de maior probabilidade para encontrar o elétron.

Box 4: construção da simulação 4.

1. Abra a Janela de Visualização 3D.
2. Escreva, na janela de álgebra, dois controles deslizantes: ρ^a e a .
3. Escreva o seguinte comando na linguagem do GeoGebra^b:

$$(\rho^4 e^{-\frac{2\rho}{3a}} \sin^2(\theta) \cos^2(\theta); \theta).$$

4. Utilize o comando de superfície de revolução, e clique primeiramente na curva gerada no item anterior e posteriormente no eixo x .
5. Altere os controles deslizantes e verifique as mudanças na dimensão do objeto criado.

^aNessa simulação, utiliza-se da letra grega ρ no lugar de r , pois assim, o *software* reconhece que se tratam de coordenadas polares.

^b**Atenção:** para essa simulação, deve-se utilizar as letras gregas θ e ρ por meio do teclado virtual do GeoGebra, além de ; no lugar de , para a separação das coordenadas, pois somente assim o *software* reconhecerá o comando e o tratará como coordenadas polares.

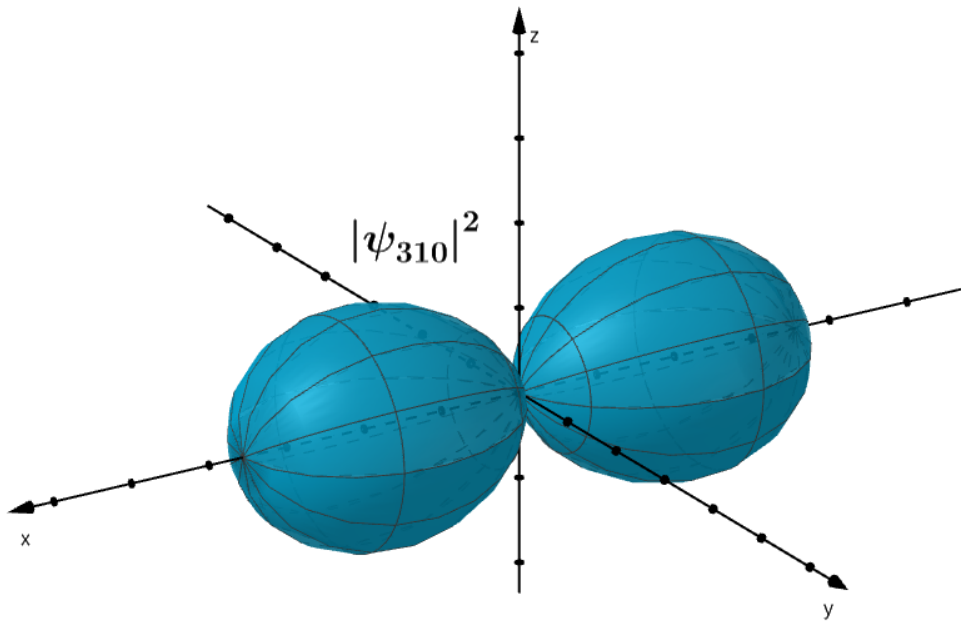
A simulação que pode ser construída seguindo os passos apresentados acima utiliza-se de uma superfície de revolução, e isso foi necessário pois, ao tomar $|\psi|^2$, um dos termos angulares foi suprimido. Dessa mesma forma, outras simulações podem ser construídas utilizando-se das soluções não normalizadas que estão apresentadas na Tabela 1, logo abaixo. Assim como na simulação da figura 9, para simplificação, as constantes k , da tabela, podem ser utilizadas com valor 1, uma vez que estão associadas unicamente com a escala da simulação.

Tabela 1 – Algumas soluções para o átomo de hidrogênio.

$ \psi_{310} ^2 = (k_{310})^2 r^2 (1 - \frac{r}{6a})^2 e^{-\frac{2r}{3a}} \cos^2(\theta)$
$ \psi_{311} ^2 = (k_{311})^2 r^2 (1 - \frac{r}{6a})^2 e^{-\frac{2r}{3a}} \sin^2(\theta)$
$ \psi_{320} ^2 = (k_{320})^2 r^4 e^{-\frac{2r}{3a}} (3 \cos^2(\theta) - 1)^2$
$ \psi_{410} ^2 = (k_{410})^2 r^2 (1 - \frac{r}{4a} + \frac{r^2}{80a^2})^2 e^{-\frac{r}{2a}} \cos^2(\theta)$
$ \psi_{411} ^2 = (k_{411})^2 r^2 (1 - \frac{r}{4a} + \frac{r^2}{80a^2})^2 e^{-\frac{r}{2a}} \sin^2(\theta)$
$ \psi_{420} ^2 = (k_{420})^2 r^4 (1 - \frac{r}{12a})^2 e^{-\frac{r}{2a}} (3 \cos^2(\theta) - 1)^2$
$ \psi_{421} ^2 = (k_{421})^2 r^4 (1 - \frac{r}{12a})^2 e^{-\frac{r}{2a}} \sin^2(\theta) \cos^2(\theta)$
$ \psi_{422} ^2 = (k_{422})^2 r^4 (1 - \frac{r}{12a})^2 e^{-\frac{r}{2a}} \sin^4(\theta)$
$ \psi_{432} ^2 = (k_{432})^2 r^6 e^{-\frac{r}{2a}} \sin^4(\theta) \cos^2(\theta)$
$ \psi_{433} ^2 = (k_{433})^2 r^6 e^{-\frac{r}{2a}} \sin^6(\theta)$

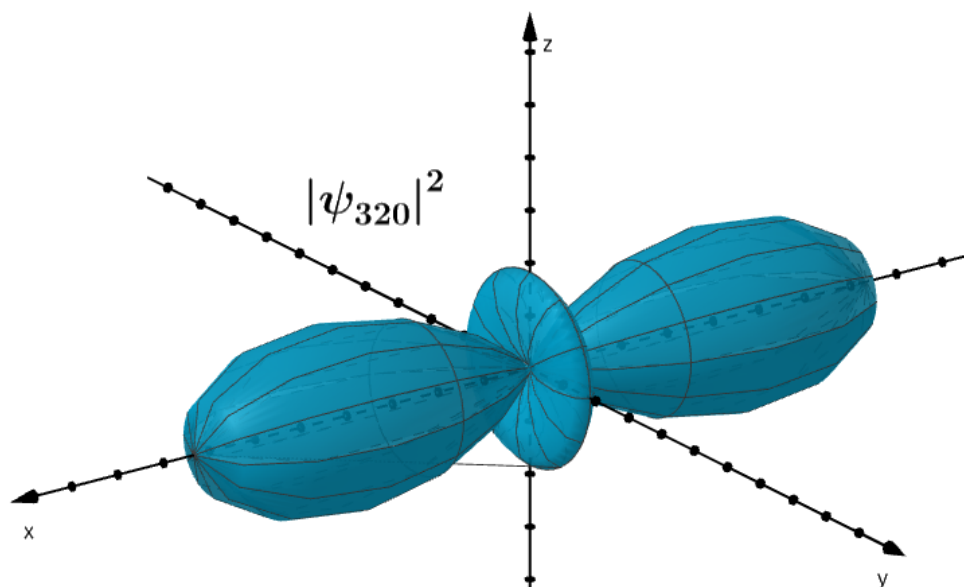
Outras simulações para a superfície de densidade de probabilidade do átomo de hidrogênio podem ser visualizadas nas Figuras 10, 11 e 12, logo abaixo. Nelas, foram utilizados os estados ψ_{310} , ψ_{320} e ψ_{422} , respectivamente. Os passos para a construção dessas simulações são os mesmos dos que foram apresentados no Box 4, e as função podem ser consultadas na Tabela 1.

Figura 10 – Superfície de densidade de probabilidade para o átomo de hidrogênio no estado ψ_{310} .



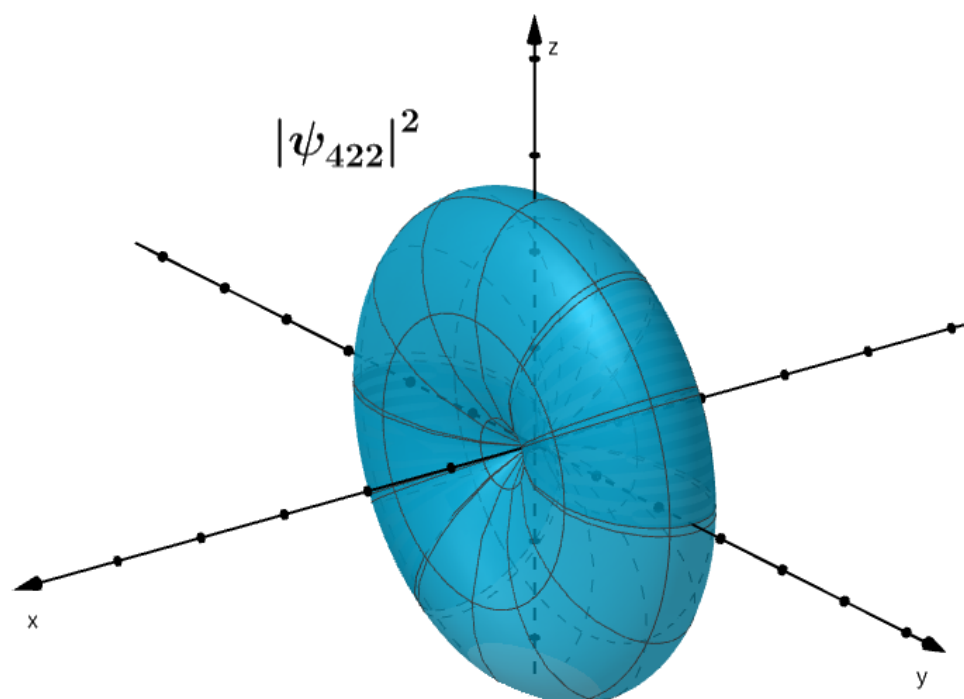
Fonte: autores, 2022. Legenda: as regiões mais afastadas da origem representam os locais de maior probabilidade para encontrar o elétron.

Figura 11 – Superfície de densidade de probabilidade para o átomo de hidrogênio no estado ψ_{320} .



Fonte: autores, 2022. Legenda: as regiões mais afastadas da origem representam os locais de maior probabilidade para encontrar o elétron.

Figura 12 – Superfície de densidade de probabilidade para o átomo de hidrogênio no estado ψ_{422} .

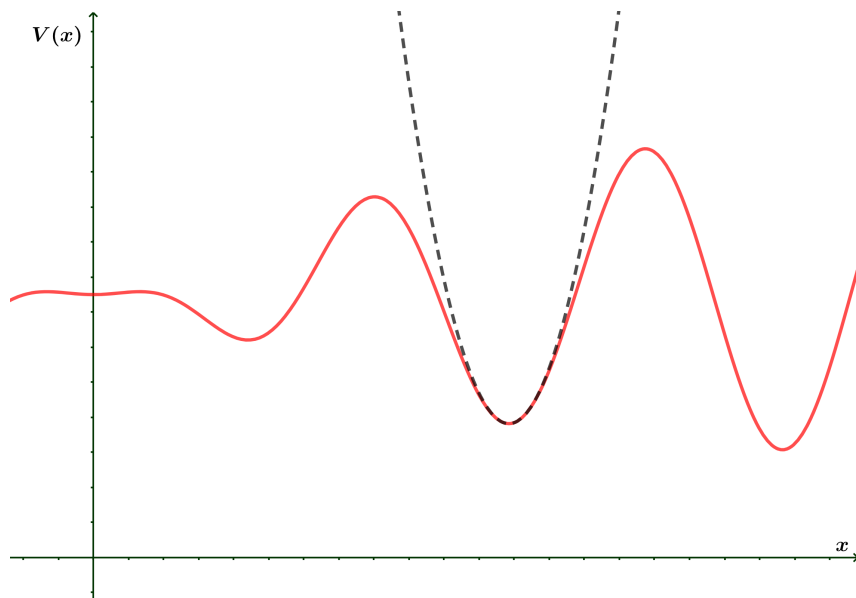


Fonte: autores, 2022. Legenda: as regiões mais afastadas da origem representam os locais de maior probabilidade para encontrar o elétron.

3.1.1.5 Aproximação em série de Taylor

A última simulação que apresentamos nesse trabalho, se trata de uma aproximação em segunda ordem via série de Taylor para um potencial arbitrário em um ponto de mínimo, que, na MQ, pode ser responsável por criar uma determinada barreira de potencial. Assim como na Mecânica Clássica, na MQ existem potenciais oscilatório, como, por exemplo, o oscilador harmônico, que é comum em ambas as áreas. Nessas situações, realizam-se aproximações em séries de Taylor em torno de um ponto de equilíbrio estável. Desse modo, essa simulação busca demonstrar como essa análise pode ser feita por meio do *software* GeoGebra. O resultado da simulação pode ser visualizado na Figura 13. Nela, a curva vermelha representa o potencial $V(x)$ arbitrário, enquanto a linha tracejada representa a aproximação da série de Taylor.

Figura 13 – Série de Taylor em segunda ordem para um potencial arbitrário.



Fonte: autores, 2022. Legenda: a curva vermelha representa um potencial arbitrário, enquanto a curva tracejada foi a função obtida por meio da aproximação em segunda ordem via série de Taylor no ponto de mínimo local escolhido.

Para a construção dessa simulação, elaborou-se o gráfico da função desejada por meio da janela de álgebra do programa. Utilizou-se como função potencial arbitrária, uma função oscilante que contém uma região que pode se tornar uma barreira de potencial. A função escolhida foi:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 2} \cos(4x) + \frac{3}{2}. \quad (3.21)$$

Posteriormente, analisamos alguns pontos especiais dela, por meio do recurso “pontos especiais” presente na própria janela de álgebra do *software* ao clicar na função. Esse recurso gera alguns pontos na própria função que podem ser analisados individualmente. Desse modo, foi escolhido o quarto ponto especial da função a partir de $x = 0$, no sentido crescente do eixo x ,

para fazer a aproximação em série de Taylor. Esse ponto foi escolhido por se tratar de um ponto de mínimo de equilíbrio estável.

O passo-a-passo da construção da simulação pode ser visualizado no Box 5, que resume tudo o que foi descrito anteriormente de maneira mais sucinta.

Box 5: construção da simulação 5.

1. Escreva, na janela de álgebra, a função:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 2} \cos(4x) + \frac{3}{2}.$$

2. Ache os pontos especiais da função e escolha um deles.

3. Use o comando:

`PolinômioDeTaylor( <Função> , <Centro> , <Ordem> ),`

com: $\left\{ \begin{array}{l} \text{<Função>: } f; \\ \text{<Centro>: valor de } x \text{ do ponto; e} \\ \text{<Ordem>: } 2 \end{array} \right.$

4 Considerações Finais

Esse estudo foi construído com base em discussões ao longo das disciplinas correlatas da Licenciatura em Física do IFTO, *Campus* Palmas. Os conteúdos incluídos foram selecionados pelo simples critério de mostrar o máximo de funcionalidades do *software*, mesmo que essas sejam grandes demais para as poucas páginas apresentadas aqui. De fato, há muito mais o que ser explorado ainda. E isso pode ser feito tanto em MQ, quanto em diversas outras áreas da Física. Seja com foco no ensino superior, seja para desenvolver material didático para o ensino médio.

Ao finalizar esse trabalho, após quase um ano debruçados sobre o *software* tentando obter o máximo de ferramentas que poderiam ser utilizadas, não nos resta dúvida sobre o seu potencial educacional. Com isso, somos levados a imaginar que essa ferramenta não apenas pode, como deveria ser explorada em um contexto de ensino de Física. O GeoGebra se mostrou como uma excelente ferramenta em uma área considerada abstrata e complexa dessa Ciência. Sendo assim, por que não utilizar nas demais áreas, como, por exemplo, em mecânica, eletromagnetismo ou óptica?

Faz-se oportuno destacar ainda que, TIC's como a apresentada aqui, trazem os fenômenos do mundo quântico para mais próximos de nós. Utilizando números, gráficos, animações, simulações e outras formas de visualização do conteúdo, conseguimos deixar o debate sobre o assunto mais palpável e, com isso, colaboramos pedagogicamente com a formação de estudantes e professores, desempenhando ainda o nosso papel no letramento científico, a fim de evitar a utilização de palavras e conceitos equivocados com intuito de efetuar práticas indevidas que descontextualizam a MQ para obter benefícios usando pseudociências.

O uso de simulações que permitam ao estudante inserir equações matemáticas e dados numéricos, e ainda manipulá-los dentro do ambiente computacional, desenvolve características muito semelhantes às do âmbito do laboratório, onde o aluno está a testar diferentes métodos em busca da realização de um experimento. É claro que uma metodologia não substitui a outra, mas ambas se complementam, além de tornar mais acessível a realização de experimentos que, na dependência exclusiva de um laboratório, não seriam de fácil acesso.

Ainda constatamos que, ao utilizar um *software* como o GeoGebra, o estudante adquire muito mais autonomia nos seus estudos. Quando ele deixa de apenas reproduzir resultados já prontos e passa a produzir o seu próprio material, por meio da construção de simulações, ele sai de um ambiente passivo de aprendizagem para um ambiente mais ativo, enxergando o erro como uma parte integrante da produção do conhecimento. Logo, apostamos no GeoGebra para uma educação mais autônoma, que deveria ser mais explorada em contexto de ensino de Física.

Referências

- 1 PAPERT, S. Information technology and education: Computer criticism vs. technocentric thinking. *Educational researcher*, Sage Publications Sage CA: Thousand Oaks, CA, v. 16, n. 1, p. 22–30, 1987. Citado na página 14.
- 2 VELOSO, R. D. S. *Tecnologias da Informação e da Comunicação*. [S.l.]: Saraiva Educação SA, 2017. Citado na página 14.
- 3 BETZ, M. E. M.; RIBEIRO-TEIXEIRA, R. M. Material instrucional apresentando conteúdos de métodos computacionais para o ensino de física. *Caderno brasileiro de ensino de física. Florianópolis. Vol. 29, nesp 2 (out. 2012), p. 787-811*, 2012. Citado na página 14.
- 4 PIRES, M. A.; VEIT, E. A. Tecnologias de informação e comunicação para ampliar e motivar o aprendizado de física no ensino médio. *Revista Brasileira de ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 28, p. 241–248, 2006. Citado na página 14.
- 5 CHHABRA, M.; DAS, R. Quantum mechanical wavefunction: visualization at undergraduate level. *European Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 38, n. 1, p. 015404, 2016. Citado na página 15.
- 6 SOUZA, R. D. S.; MIRANDA, S. B. Investigações sobre as possibilidades de reconhecer apropriações indevidas da mecânica quântica: o papel da divulgação científica. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 44, 2022. Citado na página 15.
- 7 KRIJTENBURG-LEWERISSA, K. et al. Insights into teaching quantum mechanics in secondary and lower undergraduate education. *Physical review physics education research*, APS, v. 13, n. 1, p. 010109, 2017. Citado na página 15.
- 8 NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de física básica: Ótica, relatividade, física quântica (vol. 4)*. [S.l.]: Editora Blucher, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 15, 19, 24 e 26.
- 9 MALGIERI, M.; ONORATO, P.; AMBROSIS, A. D. Teaching quantum physics by the sum over paths approach and geogebra simulations. *European Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 35, n. 5, p. 055024, 2014. Citado na página 15.
- 10 ARAUJO, L. de O.; MOREIRA, E.; MOUCHERREK, F. M. Popularizando a física quântica conceitual e suas aplicações através das redes sociais durante a pandemia de covid-19. *REVISTA PRÁTICAS EM EXTENSÃO*, v. 6, n. 1, p. 1–12, 2022. Citado na página 15.
- 11 OSTERMANN, F.; PRADO, S. D.; RICCI, T. d. S. F. Desenvolvimento de um software para o ensino de fundamentos de física quântica. *Física na escola. São Paulo. Vol. 7, n. 1 (maio 2006), p. 22-25*, 2006. Citado na página 16.
- 12 NETTO, J. d. S.; OSTERMANN, F.; CAVALCANTI, C. J. d. H. Simulação computacional no interferômetro virtual de mach-zehnder: uma proposta de ensino de física quântica sob a perspectiva sociocultural. 2017. Citado na página 16.
- 13 FERNANDES, R. d. F. A. M. et al. Pinturas de salvador dalí para introduzir conceitos de mecânica quântica no ensino médio. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), v. 34, n. 2, p. 509–529, 2017. Citado na página 16.

- 14 FEITOSA, S. dos S. et al. Uma sequência didática utilizando a literatura de cordel e a arte das histórias em quadrinhos para inserção de tópicos de física quântica no ensino médio. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), v. 37, n. 2, p. 662–694, 2020. Citado na página 16.
- 15 RESNICK, R.; EISBERG, R. Física quântica: átomos, moléculas, sólidos, núcleos e partículas. *São Paulo: Campus*, 1979. Citado 3 vezes nas páginas 16, 19 e 23.
- 16 GRIFFITHS, D. J. *Mecânica Quântica*. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2011. Citado 5 vezes nas páginas 16, 19, 23, 28 e 30.
- 17 GRECA, I. M.; MOREIRA, M. A.; HERSCOVITZ, V. E. Uma proposta para o ensino de mecânica quântica. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 23, p. 444–457, 2001. Citado na página 16.
- 18 COMUNIDADE GEOGEBRA. *GeoGebra*. Acessado: 19 nov. 2022. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/>>. Acesso em: 19 nov. 2022. Citado na página 18.
- 19 HOHENWARTER, M. *GeoGebra—didaktische Materialien und Anwendungen für den Mathematikunterricht (English: GeoGebra—educational material and applications for mathematics teaching)*. Tese (Doutorado) — PhD thesis, University of Salzburg. 2006.—334 p. <http://www.geogebra.org...>, 2006. Citado na página 18.
- 20 SILVA, J. A. d. M. et al. A formação docente e as novas tecnologias no ensino do movimento uniforme variado: uma sequência didática com o software geogebra. Instituto Federal do Amazonas, 2018. Citado na página 18.
- 21 GUTIÉRREZ-ARAUJO, R. E.; CASTILLO-BRACHO, L. A. Simuladores com o software geogebra como objetos de aprendizagem para o ensino da física. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, Universidad Pedagógica Nacional, Facultad de Ciencia y Tecnología, n. 47, p. 201–216, 2020. Citado na página 18.
- 22 CARMO, R. O geogebra no ensino de física: propostas de aplicação para o ensino do movimento harmônico simples. Universidade Federal de São Carlos, 2017. Citado na página 18.
- 23 SILVA, W. G. d. *O Geogebra como ferramenta de apoio à aprendizagem significativa em óptica geométrica*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2016. Citado na página 18.
- 24 PEREIRA, E. Experiência de baixo custo para determinar a forma da superfície de um líquido em rotação usando o smartphone. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 43, 2021. Citado na página 18.

Anexos

ANEXO A – Comprovante de submissão do artigo.

Revista Brasileira de Ensino de Física



Utilização do software GeoGebra no ensino de Mecânica Quântica

Journal:	<i>Revista Brasileira de Ensino de Física</i>
Manuscript ID	RBEF-2022-0298
Manuscript Type:	Pesquisa em Ensino de Física/Physics Education Research
Date Submitted by the Author:	09-Nov-2022
Complete List of Authors:	Resende, Mateus Antônio; Instituto Federal do Tocantins, Física Maciel, Marco; Instituto Federal do Tocantins
Keyword:	Simulações computacionais, GeoGebra, Tecnologias na educação.

SCHOLARONE™
Manuscripts