INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO TOCANTINS - CAMPUS PALMAS
CURSO SUPERIOR DE ENGENHARIA CIVIL

Antônio Arruda Modesto Filho

CADERNO DE ISOSTÁTICA: apostila de apoio ao estudo da disciplina de estruturas isostáticas

PALMAS

2022

Antônio Arruda Modesto Filho

CADERNO DE ISOSTÁTICA: apostila de apoio ao estudo da disciplina de estruturas isostáticas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Engenharia Civil do Instituto Federal do Tocantins–Campus Palmas, como exigência à obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Moacyr Salles Neto

PALMAS

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)Bibliotecas do Instituto Federal do Tocantins

F478c Filho, Antônio Arruda Modesto

CADERNO DE ISOSTÁTICA : apostila de apoio ao estudo da disciplina de estruturas isostáticas / Antônio Arruda Modesto Filho. –Palmas, TO, 2022.

441 p. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Civil) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins, Campus Palmas, Palmas, TO, 2022.

Orientador: Dr. Moacyr Salles Neto

1. Estruturas Isostáticas. 2. Estática. 3. Reações de Apoios. I.Salles Neto, Moacyr. II. Título.

CDD 624

A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio, deste documento é autorizada para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica do IFTO com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Antônio Arruda Modesto Filho

CADERNO DE ISOSTÁTICA: apostila de apoio ao estudo da disciplina de estruturas isostáticas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Engenharia Civil do Instituto Federal do Tocantins – Campus Palmas, como exigência à obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Moacyr Salles Neto

Aprovado em: 13 de Outubro de 2022

Banca Examinadora

Prof. Dr. Moacyr Salles Neto –
Orientador: IFTO

Dr. Tiago Dias de Araújo e Silva

Dr. Gilson M. Pedroso

RESUMO

Adquirir um sólido entendimento e uma boa habilidade no cálculo de estruturas isostaticas é necessário para que o engenheiro possa compreender com clareza o comportamento dos elementos estruturais mais simples e frequentes tais como vigas, pórticos planos, treliçeas planas, arcos, grelhas, cabos além de ser uma condição básica para o entendimento de estruturas mais complexas quando as mesmas forem submetidos a ação de forças solicitantes externas. A base de tal conhecimento é oferecida para o aluno, durante o curso de engenharia civil, na disciplinade Estruturas Isostáticas comumente chamada apenas de isostática e que trata do equilíbrio estático das estruturas através da aplicação da Física e da Matemática. No estudo da disciplina de Isostática são aplicados conceitos da Estática e do Cálculo Diferencial e Integral para entender e descrever o comportamento de elementos estruturais quando solicitados por forças externas possibilitando determinar as reações de apoios, os esforços internos os quais surgem no interior de elementos estruturais em função das forças externas aplicadas permitndo ainda traçar os chamados diagramas de esforços internos que são as representações gráficas da variação de tais esforços ao longo de um elemento estrutural. Atualmente o cálculo de estruturas pode ser agilizado usando-se programas computacionais, porém a utilização de ferramentas tecnológicas não isenta o aluno e futuro engenheiro da necessidade de adquirir aquele sólido conhecimento mencionado inicialmente, sobretudo para aqueles profissionais que quiserem trabalhar na área do cálculo e projeto de estruturas.

Palavras-chave: Estruturas Isostáticas**.** Estática. Reações de Apoios.

ABSTRACT

Acquiring a solid knowledge of the basic concepts of structural calculation is a necessary condition for the engineer to understand the behavior of an isolated structural element such as a beam, a column, a slab or a structure as a whole when they are subjected to action of external requesting forces. The base of such knowledge is offered to the student during the civil engineering course, in the discipline of Isostatic Structures, commonly called isostatic, which deals with the study of statics applied to structures. The calculation of structures is based on the application of concepts from Statics and Differential and Integral Calculus to describe the behavior of structural elements when requested by external loads and determine the support reactions and internal forces that arise in the structural elements as a function of loads. applied. Currently, the calculation of structures can be streamlined using computer programs, but the use of technological tools does not exempt the student and future engineer from the need to acquire that solid knowledge initially mentioned, notably those involved in the calculation and design of structures.

Keywords: Calculation. Works. Foundations.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1- Estrutura em concreto armado de um edificio 27
Figura 2- Estrutura metálica de um edifício 27
Figura 3- Estrutura em madeira de um edifício 28
Figura 4- Ponte de elementos pré-fabricados 28
Figura 5- Vigas (elemento linear) 29
Figura 6- Vigas e pilares (elementos lineares) 29
Figura 7- Treliças (estrutura reticulada plana) 29
Figura 8- Grelhas (elemento estrutural reticulado bidimensional) 29
Figura 9- Lajes 29
Figura 10- Cascas 29
Figura 11- Grandes blocos de coroamento 30
Figura 12- Barragem 30
Figura 13- Representação de intensidade, sentido e direção de uma força 30
Figura 14- Forças e componentes atuantes sobre o bloco M 31
Figura 15- Vetores força F, T e Q 32
Figura 16- Peso de uma parede sobre uma viga (força externa ativa) 33
Figura 17- Forças externas reativas (reações de apoio) 34
Figura 18- Dentes 34
Figura 19- Pinos 34
Figura 20- Exemplo de força concentrada exercida sobre uma viga 35
Figura 21- Modelo estrutural para uma força aplicada em uma viga 36
Figura 22- modelo estrutural para uma força distribuída sobre uma viga 36
Figura 23- Momento aplicado por uma força 37
Figura 24- Exemplo 1 38
Figura 25- Exemplo 2 39
Figura 26- Exemplo 1 40
Figura 27- Figura de exemplo 40
Figura 28- Exemplo 2 40
Figura 29- Exemplo 2 41
Figura 30- Exemplo 2 41
Figura 31- Exemplo 3 43
Figura 32- Exemplo 3 43
Figura 33- Exemplo 3 43
Figura 34- Graus de liberdade 43
Figura 35- Grau de liberdade no plano 43
Figura 36- Pino interno 43
Figura 37- Dente Geber 44
Figura 38- Apoio Simples 45
Figura 39- Ponte metálica 45
Figura 40- Apoio simples em ponte 45
Figura 41- Apoio de 1° gênero em ponte 46
Figura 42- Apoio do 2° gênero 46
Figura 43- Apoio do 2° gênero 46
Figura 44- Apoio do 2° gênero 46
Figura 45- Apoio do 2° gênero 47
Figura 46- Apoio do 2° gênero 46

Figura 47- Apoio do 2° gênero 47
Figura 48- Apoio de 3° gênero 48
Figura 49- Engaste ou apoio de 3° gênero 48
Figura 50- Engaste ou apoio de 3° gênero 48
Figura 51- Reações de apoio 49
Figura 52- Sistema discreto 50
Figura 53 - Exemplo 1 51
Figura 54 - Sistema discreto de forças coplanares e paralelas 51
Figura 55 - Sistema discreto de forças coplanares e paralelas 52
Figura 56- Exemplo 1 53
Figura 57- Exemplo 1 54
Figura 58- Peso distribuído sobre uma viga 54
Figura 59- Forças coplanares e paralelas disbruídas por um comprimento L 55
Figura 60- Forças coplanares e paralelas disbruídas por um comprimento 56
Figura 61- Sistema contínuo de forças paralelas e coplanares 57
Figura 62- Ponto de aplicação da força resultante 58
Figura 63- Carregamento distríbuido e seu ponto de aplicação 59
Figura 64- Carregamento discreto 60
Figura 65- Modelo estrutural de carregamento discreto 61
Figura 66- Exemplo 1 61
Figura 67- Exemplo 1 62
Figura 68- Carregamento distribuído 62
Figura 69 - Carregamento Uniformemente distribuído 63
Figura 70- Carregamento linearmente distribuído 63
Figura 71- Carregamento trapezoidal tipo 1 64
Figura 72- Carregamento trapezoidal tipo 2 64
Figura 73- Exemplo 1 65
Figura 74- Viga equivalente 65
Figura 75- Exemplo 2 66
Figura 76- Viga equivalente 67
Figura 77- Exemplo 3° 69
Figura 78- Viga equivalente 69
Figura 79- Carregamento trapezoidal tipo 2 61
Figura 80- Carregamento trapezoidal tipo 2 71
Figura 81- Viga equivalente 72
Figura 82- Carregamento triangular duplo 74
Figura 83- Carregamento triangular duplo 74
Figura 84- Viga equivalente 78
Figura 85- Exemplo 1 78
Figura 86- Viga equivalente 78
Figura 87- Exemplo 2 79
Figura 88- Viga equivalente 79
Figura 89- Exemplo 3 80
Figura 90- Viga equivalente 80
Figura 91- Exemplo 4° 80
Figura 92- Viga equivalente 81

Figura 93- Exemplo 5° 81
Figura 94- Viga equivalente 82
Figura 95- Exemplo 6 83
Figura 96- Viga equivalente 86
Figura 97- Exemplo 7° 84
Figura 98- Exemplo 7° 86
Figura 99- Exemplo 1° 86
Figura 100 – Exemplo 1 99
Figura 101 – Viga equivalente 87
Figura 102- Exemplo 2° 87
Figura 103- Exemplo 3° 88
Figura 104- Viga equivalente 88
Figura 105- Exemplo 3 88
Figura 106- Exemplo 3° 89
Figura 107- Viga equivalente 90
Figura 108-Carregamento combinado 90
Figura 109- Exemplo 1° 91
Figura 110- Exemplo 1° 91
Figura 111- Viga equivalente 93
Figura 112- Viga AB 93
Figura 113- DCL inicial da viga AB 94
Figura 114- Frequentes condições de poio 95
Figura 115- Exemplo 1° 95
Figura 116- Exemplo 1° 96
Figura 117- Exemplo 1 96
Figura 118- Exemplo 2° 96
Figura 119- Exemplo 2 97
Figura 120- Exemplo 2° 97
Figura 121- Exemplo 2° 98
Figura 122- Exemplo 1° 98
Figura 123- Exemplo 1° 98
Figura 124- Exemplo 2° 99
Figura 125- Exemplo 1° 99
Figura 126- Exemplo 2° 99
Figura 127- Exemplo 2° 100
Figura 128- Exemplo 3° 100
Figura 129- Exemplo 3° 101
Figura 130- Exemplo 3° 101
Figura 131- Exemplo 1° 102
Figura 132- Exemplo 1° 103
Figura 133- Exemplo 2° 103
Figura 134- Exemplo 1° 103
Figura 135- Exemplo 2° 104
Figura 136- Exemplo 3° 104
Figura 137- Exemplo 3 105
Figura 138- Exemplo 3° 105
Figura 139- Exemplo 1° 106
Figura 140- Exemplo 3° 106

Figura 141- Exemplo 1.....106
Figura 142- Exemplo 2.....107
Figura 143- Exemplo 2.....108
Figura 144- Exemplo 2.....108
Figura 145- Exemplo 1.....108
Figura 146- Exemplo 3.....109
Figura 147- Exemplo 3.....109
Figura 148- Exemplo 4.....109
Figura 149- Exemplo 4.....110
Figura 150- Exemplo 4.....110
Figura 151- Exemplo 4° 110
Figura 152- Exemplo 4° 111
Figura 153- Exemplo 1.....111
Figura 154- exemplo 1 112
Figura 155- Exemplo 1.....112
Figura 156- Exemplo 2.....113
Figura 157- Exemplo 2.....113
Figura 158- Exemplo 2° 114
Figura 159- Exemplo 2° 114
Figura 160- Exemplo 2° 115
Figura 161- Exemplo 1.....116
Figura 162- Exemplo 2.....116
Figura 163- Exemplo 1.....117
Figura 164- Exemplo 1.....117
Figura 165- Exemplo 1.....118
Figura 166- Exemplo 1.....118
Figura 167- Exemplo 1.....118
Figura 168- Exemplo 1.....119
Figura 169- Exemplo 2° 119
Figura 170- Exemplo 1.....120
Figura 171- Exemplo 1.....120
Figura 172- Exemplo 1.....121
Figura 173- Exemplo 2.....121
Figura 174- Exemplo 2.....122
Figura 175- Exemplo 2.....122
Figura 176- Exemplo 2° 123
Figura 177- Exemplo 1.....124
Figura 178- Exemplo 1.....124
Figura 179- Exemplo 3.....124
Figura 180- Exemplo 3.....125
Figura 181- Exemplo 3.....125
Figura 182- Estrutura instável.....127
Figura 183- Estrutura instável.....128
Figura 184– Estrutura hiperestática (“excessivamente estável”) 129
Figura 185- Estrutura hipostática (instável) 130
Figura 186- Exemplos de estruturas com gh=0, mas que são hipostáticas 131

Figura 187- Exemplos de estrutura com gh=0, mas que é hipostática 132
Figura 188- Grau de hiperestaticidade..... 133
Figura 189- Viga Gerber 133
Figura 190- Representação de uma viga Gerber..... 133
Figura 191- gh para pórticos..... 134
Figura 192- Viga RB 135
Figura 193- Viga AR 135
Figura 194- Exemplo 1..... 136
Figura 195- Exemplo 2..... 136
Figura 196- Exemplo 2..... 137
Figura 197- Exemplo 2..... 138
Figura 198 - Exemplo 2..... 138
Figura 199- Exemplo 2..... 130
Figura 200- Exemplo 3..... 130
Figura 201- Viga DE 140
Figura 202- Exemplo 2° 141
Figura 203- Viga AB..... 141
Figura 204- Exemplo 3..... 142
Figura 205- Exemplo 3° 143
Figura 206- Exemplo 3° 143
Figura 207- Pórtico em balanço..... 144
Figura 208- Pórtico bi apoiado..... 144
Figura 209- Pórtico tri-articulado..... 144
Figura 210- Pórtico antirantado 145
Figura 211- Pórtico livre..... 145
Figura 212- Pórtico composto..... 145
Figura 213- Pórticos composto desmembrado 146
Figura 214- Exemplo 1..... 146
Figura 215- Exemplo 1..... 147
Figura 216- Exemplo 1..... 147
Figura 217- Exemplo 2..... 148
Figura 218- Exemplo 2..... 149
Figura 219- Exemplo 2..... 149
Figura 220- Exemplo 1° 150
Figura 221- Exemplo 3..... 150
Figura 222- Exemplo 3..... 151
Figura 223- Exemplo 4..... 151
Figura 224- Exemplo 4..... 152
Figura 225- Exemplo 4..... 153
Figura 226- Exemplo 5..... 153
Figura 227- Exemplo 5..... 154
Figura 228- Exemplo 5..... 155
Figura 229- Exemplo 6..... 155
Figura 230- Exemplo 6..... 156
Figura 231- Exemplo 6..... 157
Figura 232- Exemplo 7..... 157
Figura 233- Exemplo 7..... 158
Figura 234- Exemplo 7..... 159

Figura 235- DCL Final.....160
Figura 236- Exemplo 7° 161
Figura 237- Exemplo 7° 162
Figura 238- Exemplo 7° 163
Figura 239- Exemplo 1° 163
Figura 240- Exemplo 1° 164
Figura 241- Exemplo 1° 165
Figura 242- Exemplo 1° 167
Figura 243- Exemplo 1° 167
Figura 244- Exemplo 1° 169
Figura 245- Exemplo 1° 170
Figura 246- Exemplo 1° 171
Figura 247- Exemplo 1° 172
Figura 248- Exemplo 1° 172
Figura 249- Exemplo 1° 173
Figura 250- Exemplo 1° 174
Figura 251- Exemplo 1° 174
Figura 252- Exemplo 1° 175
Figura 253- Exemplo 1° 176
Figura 254- Exemplo 2° 178
Figura 255- Exemplo 2° 179
Figura 256- Exemplo 2° 179
Figura 257- Exemplo 2° 180
Figura 258- Exemplo 2° 181
Figura 259- Exemplo 2° 182
Figura 260- Exemplo 3° 182
Figura 261- Exemplo 3° 183
Figura 262- Exemplo 3° 184
Figura 263- Exemplo 3° 185
Figura 264- Exemplo 3° 186
Figura 265- Exemplo 1° 187
Figura 266- Exemplo 1° 187
Figura 267- Exemplo 1° 188
Figura 268- Exemplo 1° 189
Figura 269- Exemplo 1° 190
Figura 270- Exemplo 1° 191
Figura 271- Exemplo 1° 191
Figura 272- Exemplo 1° 192
Figura 273- Exemplo 1° 192
Figura 274- Exemplo 1° 193
Figura 275- Exemplo 1° 194
Figura 276- Exemplo 1° 195
Figura 277- Exemplo 1° 195
Figura 278- Exemplo 1° 196
Figura 279- Exemplo 1° 197
Figura 280- Exemplo 1° 198
Figura 281- Exemplo 2° 199
Figura 282- Exemplo 2° 200

Figura 283- Exemplo 2° 201
Figura 284-Exemplo 2° 201
Figura 285- Exemplo 2° 203
Figura 286- Exemplo 2° 204
Figura 287- Exemplo 3° 205
Figura 288- Exemplo 3° 206
Figura 289- Exemplo 3° 206
Figura 290- Exemplo 3° 207
Figura 291- Exemplo 3° 208
Figura 292- Exemplo 3° 209
Figura 293- Exemplo 1° 211
Figura 294- Exemplo 1° 211
Figura 295- Exemplo 1° 212
Figura 296- Exemplo 1° 213
Figura 297- Exemplo 2° 213
Figura 298- Exemplo 2° 213
Figura 299- Exemplo 2° 213
Figura 300- Exemplo 2° 214
Figura 301- Exemplo 3° 214
Figura 302- Exemplo 3° 215
Figura 303- Exemplo 3° 216
Figura 304- Exemplo 3° 216
Figura 305- Exemplo 3° 216
Figura 306- Treliça típica e denominação de seus elementos 217
Figura 307-Treliças planas 218
Figura 308- Polígonos fechados 219
Figura 309- Gh em Treliças 219
Figura 310-Gh em Treliças 220
Figura 311- Força de tração 220
Figura 312- Força de compressão 221
Figura 313- Nó formado por duas barras 221
Figura 314- Nó formado por três barras 222
Figura 315- Exemplo 1° 222
Figura 316- Exemplo 1° 223
Figura 317- Exemplo 1° 224
Figura 318- Exemplo 1° 224
Figura 319- Exemplo 1° 225
Figura 320- Exemplo 1° 225
Figura 321- Exemplo 2° 226
Figura 322- Exemplo 2° 226
Figura 323- Exemplo 2° 323
Figura 324- Exemplo 2° 227
Figura 325- Exemplo 2° 228
Figura 326- Exemplo 2° 228
Figura 327-Exemplo 3° 229
Figura 328-Exemplo 3° 229
Figura 329- Exemplo 3° 230
Figura 330- Exemplo 3° 230

Figura 331- Exemplo 3° 231
Figura 332- Exemplo 3° 232
Figura 333- Exemplo 4° 232
Figura 334- Exemplo 4° 233
Figura 335- Exemplo 4° 234
Figura 336- Exemplo 4° 235
Figura 337- Exemplo 4° 236
Figura 338- Exemplo 4° 237
Figura 339- Exemplo 5° 238
Figura 340- Exemplo 5° 238
Figura 341- Exemplo 5° 239
Figura 342- Exemplo 5° 240
Figura 343- Exemplo 5° 240
Figura 344- Exemplo 5° 241
Figura 345- Exemplo 5° 243
Figura 346- Exemplo 5° 244
Figura 347- Exemplo..... 245
Figura 348- Seção S-S 245
Figura 349- Exemplo 1° 246
Figura 350- Exemplo 1° 248
Figura 351- Exemplo 1° 248
Figura 352- Exemplo 1° 248
Figura 353- Exemplo 1° 250
Figura 354- Exemplo 1° 250
Figura 355- Exemplo 1° 251
Figura 356- Exemplo 1° 251
Figura 357- Exemplo 1° 252
Figura 358- Representação de um arco triarticulado 254
Figura 359- Representação de um arco biarticulado 255
Figura 360- Representação de um arco de extremidades fixas 256
Figura 361- Exemplo 1° 257
Figura 362- Exemplo 1° 258
Figura 363- Exemplo 1° 258
Figura 364- Exemplo 2° 259
Figura 365- Exemplo 2° 260
Figura 366- Cabos 261
Figura 367- Teorema geral dos cabos 261
Figura 368- Cabo parabólico 262
Figura 369- Exemplo 1° 262
Figura 370- Exemplo 2° 263
Figura 371- Exemplo 2° 265
Figura 372- Exemplo 3° 266
Figura 373- Exemplo 3° 266
Figura 374- Exemplo 3° 266
Figura 375- Exemplo 3° 267
Figura 376- Barra tracionada por uma força axial 267
Figura 377- Barra tracionada por uma força axial 268
Figura 378- Esforço cortante 268

Figura 379- Cortante positiva....269
Figura 380- Cortante positiva....270
Figura 381- Momento fletor aplicado em viga....272
Figura 382- Corte da viga AB....273
Figura 383- Carregamento axial uniformemente distribuído....277
Figura 384- Ampliação de dx....278
Figura 385- Barra AB....279
Figura 386- Detalhe ampliado do elemento de comprimento dx....280
Figura 387- Analise pela esquerda....281
Figura 388- Analise pela direita....282
Figura 389- Exemplo 1°....282
Figura 390- Trecho AC pela esquerda....284
Figura 391- Trecho CB pela esquerda....285
Figura 392- Diagrama dos esforços....286
Figura 393- Diagrama de Momento Fletor....286
Figura 394- Diagrama de Esforço Normal....288
Figura 395- Exemplo 2°....289
Figura 396- Diagrama de esforço cortante....290
Figura 397- Diagrama de Momento Fletor....290
Figura 398- Diagrama do esforço normal....291
Figura 399- Exemplo 3°....292
Figura 400- Diagrama do Esforço Cortante....293
Figura 401- Diagrama de Momento Fletor....294
Figura 402- Diagrama do esforço normal....294
Figura 403- Carregamemto Uniformemente distríbuido....294
Figura 404- Cortante....295
Figura 405- Momento de valor máximo em uma parábola....297
Figura 406- Exemplo 1°....298
Figura 407- Diagrama de Esforço Cortante....298
Figura 408- Momento de valor máximo....299
Figura 409- Diagrama de Esforço Normal....301
Figura 410- Exemplo 1°....302
Figura 411- Diagrama de Esforço cortante....303
Figura 412- Diagrama de Momento Fletor....303
Figura 413- Diagrama do esforço normal....305
Figura 414- Exemplo 2°....306
Figura 415- Diagrama do Esforço Cortante....307
Figura 416-Diagrama de Momento Fletor....307
Figura 417- Diagrama do esforço Cortante....309
Figura 418- Exemplo 3°....311
Figura 419- Diagrama do Esforço Cortante....311
Figura 420- Diagrama de Momento Fletor....311
Figura 421- Diagrama do esforço normal....313
Figura 422- Exemplo 4....514
Figura 423- Diagrama do Esforço Cortante....314
Figura 424- Diagrama de Momento Fletor....314
Figura 425- Diagrama do esforço normal....315
Figura 426- Exemplo 5°....316

Figura 427- Diagrama do esforço normal 316
Figura 428- Diagrama de momento fletor 317
Figura 429- Diagrama de Esforço Normal 318
Figura 430- Exemplo 6° 318
Figura 431- Diagrama de esforço cortante 319
Figura 432- Diagrama de momento fletor 320
Figura 433- Diagrama do esforço normal 320
Figura 434- Exemplo 1° 321
Figura 435- Diagrama de esforço cortante 321
Figura 436- Diagrama de momento fletor 322
Figura 437- Diagrama do esforço normal 323
Figura 438- Exemplo 2° 324
Figura 439- Diagrama de esforço cortante 325
Figura 440- Diagrama de momento fletor 325
Figura 441- Diagrama do esforço normal 326
Figura 442- Viga AB 327
Figura 443- viga horizontal equivalente 328
Figura 444- viga inclinada 328
Figura 445- viga horizontal 329
Figura 446- Viga equivalente 330
Figura 447- viga inclinada 331
Figura 448- Diagrama de momento fletor 331
Figura 449- Diagrama do esforço normal 332
Figura 450- viga inclinada 334
Figura 451- viga horizontal 336
Figura 452- Exemplo 1° 336
Figura 453- viga horizontal 337
Figura 454- viga horizontal 338
Figura 455- Diagrama de esforço cortante 339
Figura 456- Diagrama de momento fletor 340
Figura 457- Diagrama do esforço normal 340
Figura 458- carregamento triangular 342
Figura 459- Exemplo 1° 342
Figura 460- Diagrama de esforço cortante 344
Figura 461- Diagrama de momento fletor 345
Figura 462- Diagrama do esforço normal 346
Figura 463- Exemplo 2° 347
Figura 464- Diagrama de esforço cortante 348
Figura 465- Diagrama de momento fletor 349
Figura 466- Diagrama do esforço normal 351
Figura 467- Pórtico 352
Figura 468- barra vertical AB 353
Figura 469- barra horizontal BC 353
Figura 470- barra vertical BD 354
Figura 471- Exemplo 1° 355
Figura 472- Diagrama de esforço cortante 356
Figura 473- Diagrama do momento fletor 358
Figura 474- Diagrama do esforço normal 358

Figura 475- Exemplo 2° 359
Figura 476- barra CD 360
Figura 477- barra DE 361
Figura 478- Diagrama de esforço cortante 362
Figura 479- Diagrama do momento fletor 363
Figura 480- Diagrama do esforço normal 365
Figura 481- Exemplo 3° 366
Figura 482-Barra DC 367
Figura 483- Componentes das forças 369
Figura 484-Barra EC horizontal 370
Figura 485- Diagrama de esforço cortante 372
Figura 486- Diagrama do momento fletor 373
Figura 487- Diagrama de esforço normal 374
Figura 488- Exemplo 4° 375
Figura 489- Componentes das cargas concentradas (reações) 375
Figura 490- barra CD 376
Figura 491- barra DE 377
Figura 492- Diagrama de esforço cortante 380
Figura 493- Diagrama do momento fletor 383
Figura 494- Diagrama do esforço normal 383
Figura 495- Exemplo 5° 385
Figura 496- Exemplo 5° 386
Figura 497- Barra AD 388
Figura 498- Barra DF 390
Figura 499- Diagrama de esforço cortante 391
Figura 500- Diagrama do momento fletor 391
Figura 501- Diagrama do esforço normal 392
Figura 502- Exemplo 6° 393
Figura 503- Componentes da reação VB 394
Figura 504- barra BE 394
Figura 505- Barra BE 397
Figura 506- Diagrama do momento fletor 398
Figura 507- Diagrama do esforço normal 399
Figura 508- Exemplo 7° 400
Figura 509- Barra AC 401
Figura 510- Barra AC 403
Figura 511- Barra inclinada BD 404
Figura 512- Barra EF 405
Figura 513- Diagrama de esforço cortante 405
Figura 514- Diagrama de momento fletor 406
Figura 515- Diagrama de esforço normal 408
Figura 516- DCL inicial 409
Figura 517- Barra AC 410

LISTA DE TABELA

Tabela 1- Força resultante e ponto de aplicação para os carregamentos mais frequentes.....74

SUMÁRIO

Introdução **24**
Problema de pesquisa **25**
Justificativa **25**
Objetivos **25**
Objetivo geral **25**
Objetivo Específico **26**

CAPÍTULO I **26**
1. Conceito e definições elementares **26**
1.1 Estrutura **26**
1.2 Elementos estruturais **27**
1.3 Classificação dos elementos estruturais quanto a geometria **27**
1.4 Elementos estruturais unidimencionais ou lineares **27**
1.5 Elementos estruturais bidimencionais ou de superfície **28**
1.6 Elementos estruturais tridimensionais ou de volume **29**
1.7 Linha de ação de uma força F **30**
1.8 Equilíbrio de um corpo **31**
1.9 Tipos de equilíbrios **31**
1.10. Forças ou ações solicitantes sobre uma estrutura **32**
1.11 Classificação das forças solicitantes **32**
1.11.1 Quanto a natureza **32**
1.11.2 Forças externas **32**
1.11.3 Forças externas ativas **32**
1.11.4 Forças externas reativas **33**
1.11.5 Forças Internas **33**
1.11.6 Forças Internas Reativas **33**
1.11.7 Classificação das forças solicitantes quanto a forma de aplicação **34**
1.11.8 Forças Concentradas **34**
1.11.9 Forças Distribuídas **35**

CAPÍTULO II **36**
2 Momento de uma força **36**
2.1 Conceito de momento de uma força **36**
2.2 Valor (m) do momento de uma força **36**
2.3 Valor do momento resultante de um sistema de duas ou mais forças **37**
2.4 Princípio dos momentos ou de varignon **38**
2.5 Calculando momentos **38**

CAPÍTULO III **42**
3 Possibilidades de movimento e vinculação das estruturas **42**
3.1 Graus de liberdade no espaço **42**
3.2 Graus de liberdade no espaço **42**
3.3 Graus de liberdade no Plano **42**
3.4 Tipos de vínculos de estruturas **43**
3.5 Rótulas internas ou articulações **43**
3.6 Apoios externos (apoios) **43**
3.7 Tipos de apoios no plano e suas representações **44**

CAPÍTULO IV **48**
4 Sistemas de forças coplanares e paralelas **48**
4.1 Definição de sistema de forças coplanares e paralelas **48**
4.2 Força resultante (FR) de um sistema de forças coplanares e paralelas **48**
4.3 Sistema equivalente de um sistema de forças **48**
4.4 Classificação dos sistemas de forças quanto ao número (n) de forças queos compõem **48**
4.5 Sistemas discretos de forças coplanares e paralelas **48**
4.6 Valor (FR) da força resultante de um sistema discreto de forças coplanares e paralelas **49**
4.7 Coordenada (x) do ponto de aplicação da força resultante de um sistema discreto de forças coplanares e paralelas **49**
4.8 Sistemas contínuos de forças coplanares e paralelas **53**
4.9 Valor (*FR*) da força resultante de um sistema contínuo de forças coplanares e Paralelas **53**
4.10 Ponto (X) de aplicação da força resultante (FR) de um sistema contínuo de forças coplanares e paralelas **56**

CAPITULO V **58**
5 Carregamentos, forças resultantes e seus pontos de aplicação **58**
5.1 Conceito de carregamento **58**
5.2 Carregamentos discretos **58**
5.3 Valor (*FR*) da força resultante de um carregamento discreto **59**
5.4 Coordenada (*x*) do ponto de aplicação da força resultante de um carregamentodiscreto **59**
5.5 Carregamentos distribuídos **61**
5.6 Tipos mais frequentes de carregamentos distribuídos **61**
5.7 Valor (FR) da força resultante para os carregamentos distribuídos mais frequente e coordenada ($\bar{x}$) de seu ponto de aplicação **63**
5.8 Valor (FR) e Ponto ($\bar{x}$) de aplicação da força resultante, por decomposição de áreas, para os carregamentos distribuído **84**
5.5 Carregamentos combinados **90**

CAPÍTULO VI
6 Equilíbrio estático no plano e reações de apoios **92**
6.1 Equilíbrio estático das estruturas no plano **92**
6.2 Diagrama de corpo livre inicial (DCLI) e final (DCLF) **92**
6.3 Vigas **94**
6.4 Tipos mais frequentes de vigas quanto as condições de apoio **94**
6.5 Roteiro para o cálculo de reações de apoios **94**
6.6 Reações de apoios para vigas em balanço **95**
6.7 Reações de apoios em vigas simplesmente apoiadas exclusivamente sob cargas concentradas (carregamento discreto) **97**
6.8 Reações de apoios em vigas simplesmente apoiadas sujeitas exclusivamente a carregamentos distribuídos **101**
6.9 Reações de apoios em vigas simplesmente apoiadas sujeitas a um carregamento combinado **105**
6.10 Reações de apoios em vigas inclinadas sob cargas externas **110**
6.11 Reações de apoios devidas ao peso próprio em vigas inclinadas **114**

6.12 Reações de apoios em vigas sujeitas a carregamento triangular e Combinado.....117
6.13 Reações de apoios em vigas sujeitas a carregamentos trapezoidais.....120

CAPÍTULO VII.....126
7 Estabilidade de estruturas no plano.....126
7.1 Conceito de estruturas estáveis 126
7.2 Conceito de estruturas instáveis 127
7.3 Conceito de estaticidade de uma estrutura 127
7.4 Classificação das estruturas quanto a estaticidade 127
7.5 Grau de hiperestaticidade (gh) das estruturas.....129
7.6 Vigas gerber.....132
7.7 Reações de apoios em vigas Gerber 132

CAPÍTULO VIII.....142
8 Estruturas reticuladas planas: conceito e reações de apoios.....142
8.1 Conceito de estruturas reticuladas planas.....142
8.2 Pórticos planos.....142
8.3 Principais tipos de pórticos isostáticos quanto as condições de apoio e devinculação entre as barras.....143
8.4 Reações de apoios em pórticos engastado e livre e em pórticos bi apoiados.....145
8.5 Reações de apoios em pórticos tri-articulados.....159
8.6 Reações de apoios em pórticos bi apoiados com tirante ou escora (pórticosatirantados).....180
8.7 Reações de apoios em pórtico compostos.....183
8.8 Treliças planas.....213
8.9 Estabilidade de polígonos fechados.....213
8.10 Grau de hiperestaticidade das treliças (gh).....214
8.11 Resolução de treliças.....215
8.12 Nós característicos (membros de força zero).....216
***8.*13 Métodos de análise de treliças planas (forças nas barras).....217**
8.14 Método do equilíbrio dos nós.....217
8.15 Método de Ritter ou das seções.....236
8.16 Grelhas.....242
8.17 Roteiro para o cálculo de reações de apoios em grelhas.....242
8.18 Cálculo de reações de apoios em grelhas.....242

CAPÍTULO IX.....248
9 Arcos e cabos.....248
9.1 Arcos.....248
9.2 Tipos de arcos.....248
9.3 Reações de apoios em arcos tri-articulados com apoios alinhados.....249
9.4 Cabos.....253
9.5 Teorema geral dos cabos.....254
9.6 Forma funicular de um cabo.....256
9.7 Reações de apoios e força de tração em cabos.....256

CAPÍTULO X.....265
10 Esforços solicitantes interno.....265
10.1 Esforço normal solicitante interno (n):.....265
10.2 Esforço cortante solicitante interno (v).....265
10.3 Momento fletor solicitante interno (m): 267
10.4 Relações fundamentais da estática.....268
10.5 Pontos notáveis.....272
10.6 Convenção de sinais.....272
10.7 Diagramas de esforços internos.....275
10.8 Interpretando o diagrama do esforço cortante 275
10.9 Diagramas dos esforços internos para vigas exclusivamente sob cargas concentradas.....276
10.10 Diagramas de esforços internos para vigas exclusivamente sob carregamento uniformemente distribuído.....291
10.11 Diagramas de esforços internos para vigas sob carregamento.....295
10.12 Diagramas de esforços internos para vigas em balanço.....317
10.13 Diagramas de esforços internos para vigas inclinadas.....321
10.14 Diagramas de esforços internos para vigas.....332
10.15 Diagramas de esforços internos para pórticos isostáticos.....341

Conclusão.....411

Bibliografia.....412

Introdução

A necessidade de aprender os conceitos básicos sobre o funcionamento e comportamento das estruturas e de adquirir habilidade com o cálculo de elementos estruturais básicos, tais como: vigas, pórticos planos, treliças planas, grelhas, arcos e cabos surge, na engenharia civil, ainda durante a vida acadêmica com as disciplinas relacionadas ao cálculo estrutural.

O Caderno de Isostática é um material didático auxiliar baseado na literatura e em notas de aula e que conservando os princípios da Matemática e da Física envolvidosaborda através de uma linguagem simples e direta, mais próxima daquela utilizada em sala de aula, o cálculo de reações de apoios e o traçado de diagramas de esforços internos.

No Caderno de Isostática também é mostrada a aplicação do Cálculo Diferenciale Integral na dedução de fórmulas e no entendimento de vários conceitos da Mecânica estudados na estática aplicada às estruturas. Além disso, o Caderno de Isostática apresenta uma grande quantidade de exercícios resolvidos e explicados sobre o cálculode reações de apoios e traçado de diagramas de esforços internos principais assuntos estudados na disciplina de Estruturas Isostáticas ministrada em um curso de engenharia civil.

Problema de pesquisa

A dificuldade para encontrar livros de Estruturas Isostáticas que mostrem atravésde uma linguagem simples e direta, mais próxima daquela utilizada em sala de aula, a resolução detalhada de uma grande e diversificada quantidade de exercícios explicitandoinclusive a aplicação do Cálculo Diferencial e Integral na dedução de fórmulas, no entendimento de conceitos da Estática, no cálculo de reações de apoios e no traçado e interpretação dos diagramas de esforços internos.

JUSTIFICATIVA

Disponibilizar um material didático auxiliar que aborde através de uma linguagem simples e direta, próxima daquela utilizada em sala de aula, os principais assuntos estudados na disciplina de Estruturas Isostáticas, visto que, esse primeiro contato com o cálculo estrutural é um sério desafio para uma boa parte dos alunos de um curso de engenharia civil exigindo um considerável tempo para consultas minuciosas de inúmeros livros de Mecânica muitos dos quais trazem uma linguagem de difícil entendimento e não atendem a necessidade específica da disciplina de Isostática. Assim esse material didático auxiliar intitulado de Caderno de Isostática pode verdadeiramente ser uma ferramenta de grande importância para facilitar o aprendizado da citada disciplina e ainda melhorar o desempenho geral do aluno, uma vez que, possuir um bom conhecimento em Estruturas Isostáticas é fundamental para uma boa desenvoltura também em outras disciplinas relacionadas ao cálculo estrutural e que serão estudadas posteriormente ao longo do curso de engenharia civil resultando em um aluno motivado pelo bom desempenho e contribuído para a formação de um profissional realizado e competente capaz de prestar bons serviços à sociedade.

Objetivos

Objetivo geral

Disponibilizar para alunos de Engenharia Civil, um material didático auxiliar baseado na literatura e em notas de aula reunindo e abordando através de uma

linguagem simples e direta, mais próxima da que utilizamos em sala de aula, os conceitoselementares da Estática aplicados às estruturas, o cálculo de reações de apoios e o traçado de diagramas de esforços internos que são os principais assuntos estudados nadisciplina de Estruturas Isostáticas.

Objetivo Específico

Disponibilizar para a biblioteca João Paulo II do IFTO-Palmas um material didáticoauxiliar baseado na literatura e em notas de aula reunindo e abordando numa linguagemsimples e direta, mais próxima daquela utilizada em sala de aula, o cálculo de reações de apoios e o traçado de diagramas de esforços internos, principais assuntos estudadosna disciplina de Estruturas Isostáticas, e assim oferecer aos alunos de engenharia civil da referida instituição mais uma alternativa para o estudo inicial dos conceitos básicos edo cálculo de estruturas.

CAPÍTULO I

1. Conceito e definições elementares

1.1 Estrutura

Na engenharia civil, consideramos estrutura como sendo um conjunto de um ou mais elementos resistentes interligados entre si e ao meio externo formando uma composição capaz de suportar cargas. Um prédio , por exemplo, é sustentado pela sua estrutura a qual é geralmente formada por um conjunto de elementos estruturais interligados, tais como: lajes, vigas, pilares, fundações etc.

A figura 1 abaixo mostra elementos estruturais interligados (pilares, vigas e lajes) que em conjunto formam a estrutura de um edfício em concreto armado e a figura 2 mostra a estrutura metálica de outro edifício

Figura 1- Estrutura em concreto armado de um edificio



Fonte: internet(fepex.com. br).

Figura 2- Estrutura matálica de um edifício



Fonte:internet (Amplaestrutura.com .br)

As figuras **3** e **4** a seguir mostram respectivamente a estrutura em madeira de um edifício e a estrutura em elementos pre fabricados de concreto armado utilizados para construir uma ponte.

Figura 3 – Estrutura em madeira de um edifício



Fonte:internet(hometeca.com.br

Figura 4 – Ponte de elementos pre fabricado



Fonte: digitalconcreteshow

1.2 Elementos estruturais

As peças individuais que isoladamente ou em conjunto compõem uma estrutura, por exemplo, vigas, lejes, pilares são chamadas de elementos estruturais e devem ser dotados de resistência e rigidez suficientes para suportar as cargas previstas sem sofrerem rupturas ou deformações excessivas. Considera-se como excessiva uma deformação suficientemente grande capaz de afetar a estética, o desempenho ou a integridade (segurança) de um elemento estrutural. Os conceitos de resistência e rigidez são muito importantes e devem ser bem compreendidos.

• **Resistência**: capacidade de um elemento estrutural para suportar uma certa carga sem sofrer ruptura.

• **Rigidez:** capacidade de um elemento para suportar uma certa carga sem sofrer deformações excessivas.

1.3 Classificação dos elementos estruturais quanto a geometria

Quanto a geometria,(Cascão, Maria 2009), classifica os elementos estruturais em: uni, bi e tridimensionais, enquanto (Junior, Eloy 1999) os classifica respectivamente como estruturas lineares, estruturas de superfície e estruturas de volume. As definições de elementos estruturais a seguir foram adaptadas dos referidos autores.

1.4 Elementos estruturais unidimencionais ou lineares

Elementos unidimensionais ou lineares são aqueles em que o comprimento é muito maior que as outras duas dimensões, largura e profundidade, ou seja, são elementos tipo barra (vigas, pilares)

As figuras 5 e 6 abaixo mostram exemplos de elementos estruturais lineares.

Figura 5 - Viga (elemento linear)



Fonte:(solvebrasilconcreto.com.br)

Figura 6 – vigas e pilares (elementos lineares)



Fonte: lages.com.br

Peças estruturais formados pela união de duas ou mais barras são chamadas de estruturas reticuladas. A treliça de madeira da figura 7 e a grelha de vigas de concreto da laje nervurada da figura 8 abaixo são exemplos de estruturas reticuladas.

Figura7-Treliçaplana(estrutura reticulada



Fonte:internet(mapadaobra.com.br)

Figura 8 - Grelhas (elemento estrutural reticulado bidimensional)



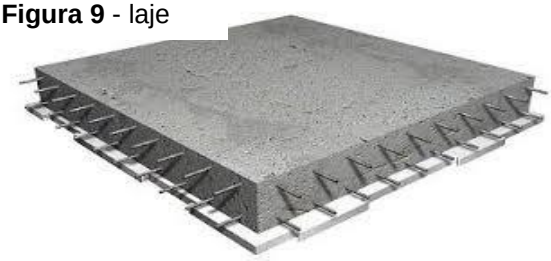
Fonte:internet(guiadaengenharia.com.br)

1.5 Elementos estruturais bidimencionais ou de superfície

Aqueles em que duas de suas dimensões,comprimento e largura, são muito maiores que a terceira, espessura

As figuras 9 e 10 a seguir mostram exemplos de elementos estruturais bidimensionais.

Figura 9 - laje



Fonte: internet(andaimesmodular.com.br)

Figura 10 - Casca



Fonte: internet(docomomo.gov.br)

1.6 Elementos estruturais tridimensionais ou de volume

São aqueles em que as três dimensões possuem a mesma ordem de grandeza, ou seja, são comparáveis.

As figuras 11 e 12 abaixo mostram exemplos de elementos estruturais tridimensionais ou de volume.

Figura 11- Grandes blocos de



Fonte: internet(geoscan.com.br)

Figura 12: Barragem



Fonte: internet(geoscan.com.br)

Segundo (Júnior, Eloy 1999) força é a ação de um ou mais corpos sobre outro, ou seja, as forças resultam de interações entre os corpos e podem causar deformação e ou aceleração. As forças são grandezas vetorias sendo, portanto, representadas por vetores. Assim para uma força ficar perfeitamente caracterizada é necessário definir:

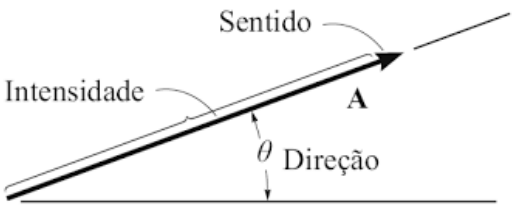
a) módulo→ (tamanho do vetor numa certa escala)

b) direção→ (ângulo entre o vetor força e uma direção de referência)

c) sentido→ indicado pela ponta da seta

d) ponto de aplicação→ Ponto onde uma força está aplicada

Figura 13- Representação de intensidade, sentido e direção de uma força



Fonte:internet(eletrica.ufpr.br

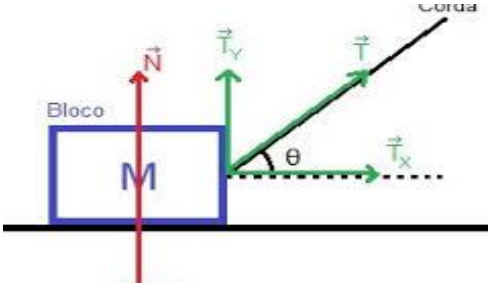
A unidade de força no sistema internacional (S.I) é o newton (N), porém frequentemente iremos trabalhar com um múltiplo do newton, o quilonewton (KN).Quanto ao modo de atuação as forças são classificadas em : forças de contato e forças de ação a distância.

1°) forças de contato: São aquelas que aparecem nos pontos de contato entre os corpos. Geralmente são aquelas chamadas de força normal e força de atrito

a) forças normais: são forças ou componentes que atuam perpendicularmente as superfícies de contato pruduzindo tração ou compressão.

b) força de atrito: força que surge quado uma superfície tende a deslizar sobre outra. A força de atrito se opõe ao deslizamento relativo entre as superfícies de contato e atua paralelamente a elas.

Figura 14- forças e componentes atuantes sobre o bloco M.



Fonte: internet(Querobolsa.com.br)

Considerando um sistema de eixos cartesiano, temos:

T→ força aplicada no bloco na direção θ em relação ao eixo x (horizontal)

T_x→ componente da força **T** na direção x e normal à face vertical direita do bloco)

T_y→ componente da força **T** na direção y e paralela (tangente) à face vertical direita do bloco)

N→ força normal propriamente dita exercida pela superfície de apoio

P→ força peso do bloco (a força peso é sempre vertical e para baixo)

F_{at}→ força de atrito entre a superfície do bloco e a base de apoio

1.7 Linha de ação de uma força $\vec{F}$

Linha de ação de uma força $\vec{F}$ aplicada em um ponto P é a linha infinita nos dois sentidos e que contem o vetor $\vec{F}$ o qual representa a força analisada. Um fato importante a ser lembrado e que uma força é um vetor deslizante, ou seja, ela pode

ser aplicada em qualquer ponto ao longo de sua linha de ação e mesmo assim produzirá os mesmos efeitos externos tais como: deslocamentos, deformações, momentos, reações.

Figura 15- Vetores força F, T e Q

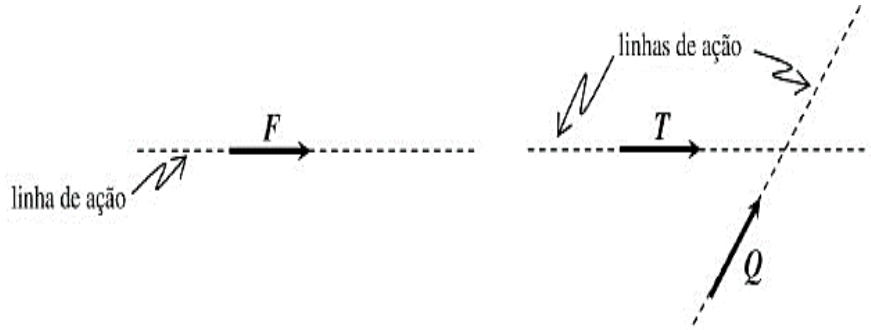


Figura 1 - Ilustração dos vetores força **F**, **T** e **Q** e suas respectivas linhas de ação. **F** e **T** colineares, e os pares **T** e **Q**, **F** e **Q** são concorrentes.

Fonte: internet

1.8 Equilibrio de um corpo

O equilíbrio de um corpo é uma condição caracterizada pela constância da velocidade, ou seja, um corpo está em equilíbrio quando sua velocidade permanence constante no tempo. A condição para que um corpo entre ou permaneça em equilíbrio é que a soma das forças que atuam sobre ele seja nula. Matematicamente, temos:

$$\sum_i^n \boldsymbol{F_i} = \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2} + \boldsymbol{F_3} \ldots + \boldsymbol{F_n} = \mathbf{0} \quad \textbf{eq. 01}$$

Onde:

$\boldsymbol{F_1}, \boldsymbol{F_2}, \boldsymbol{F_3} \ldots \boldsymbol{F_n}$ *são as forças atuantes no corpo em estudo*

Adaptado de Sampaio e Calçada (Física 1) 2005

1.9 Tipos de equilíbrios

Segundo Sampaio e Calçada (2005) o equilíbrio de um corpo pode ser estático e dinâmico.

A) Equilíbrio dinâmico

Quando o corpo se desloca com velocidade constante caracterizando um movimento retilíneo uniforme (MRU)

B) Equilíbrio estático

Quando o corpo está em repouso. Na engenharia civil, estamos interessados no equilíbrio do tipo estático, visto que, garantir o repouso das estruturas frente as ações que atuarão ou poderão atuar sobre elas, geralmente é um dos objetivos dos engenheiros e um dos grandes desafios da engenharia.

1.10 Forças ou ações solicitantes sobre uma estrutura

Forças solicitantes sobre uma estrutura são as forças que outros corpos exercem sobre ela.

1.11 Classificação das forças solicitantes

A classificação das ações solicitantes a seguir foi adaptada de (Cascão, Maria 2009 e Júnior, Eloy 1999) e apesar de simplificada será suficiente para o nosso estudo.

1.11.1 Quanto a natureza

Quanto a natureza as forças solicitantes são classificadas em forças externas e forças internas

1.11.2 Forças externas

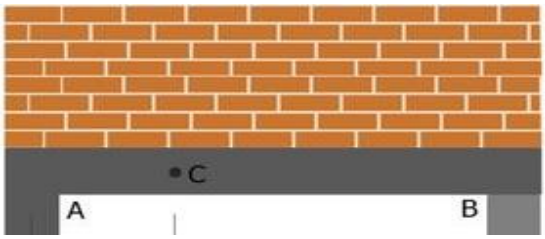
Forças externas são forças que outros corpos exercem sobre a estrutura e podem ser ativas e reativas

1.11.3 Forças externas ativas

São forças ou momentos (tendência de giro) aplicados sobre uma estrutura por outros corpos ou agentes e que tendem a tirá-la de seu equilíbrio estático podendo provocar translação ou rotação. Na prática, são as cargas externas atuantes sobre a estrutura (carregamento).

O peso da parede sobre a viga mostrada na figura abaixo é um exemplo de força externa ativa solicitante sobre um elemento estrutural, a viga

Figura 16- Peso de uma parede sobre uma viga (força externa ativa)

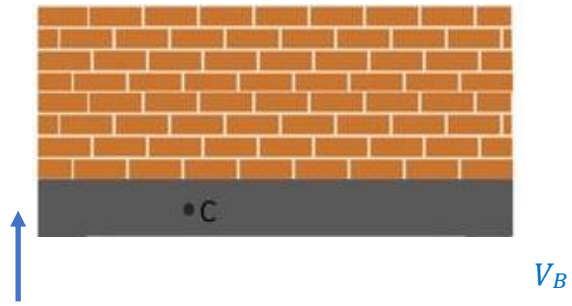


Fonte: internet(br.pinterest.com)

1.11.4 Forças externas reativas

São forças ou momentos que aparecem nos vínculos e em pontos de restrição de movimento ou rotação quando forças externas ativas solicitantes agem sobre uma estrutura tendendo a tirá-la do equilíbrio. Um exemplo típico de forças externas reativas são as chamadas reações de apoios.

Figura 17 -V_A e V_B . Forças externas reativas (reaçoes de apoios)



Fonte: Adaptado da internet(br.pinterest.com)

As forças V_A e V_B são as reações dos apoios A e B e o cálculo dessas reações é um dos objetivos dessa apostila

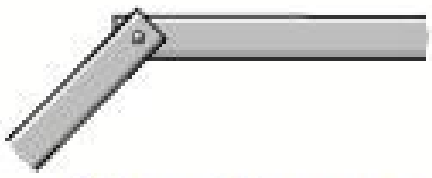
1.11.5 Forças Internas

São forças que uma parte da estrutura exerce sobre outra parte da própria estrutura

1.11.6 Forças Internas Reativas

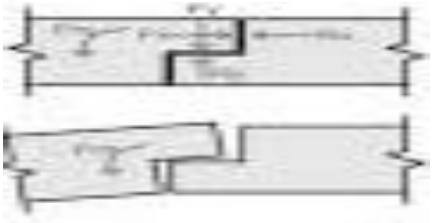
São forças de reação que uma parte da estrutura exerce sobre a outra parte. Essa reações surgem em vínculos internos tais como pinos e dentes Geber genericamente chamados de rótulas

Figura 18- Pinos



Fonte:internet(miscelaniadoconhecimento.com)

Figura 19 -Dentes Geber



Fonte:internet(miscelaniadoconhecimento.com)

1.11.7 Classificação das forças solicitantes quanto a forma de aplicação

Quanto a forma de aplicação as forças solicitantes classificam-se em forças concentradas e forças distribuídas.

1.11.8 Forças Concentradas

Força ou carga concentrada é uma simplificação de cálculo que adotamos quando a dimensão, por exemplo o comprimento, de aplicação da força é muito pequeno comparado ao comprimento da estrutura.

A força (carga) aplicada pela viga transversal sobre a viga mostrada em primeiro plano na figura abaixo pode ser considerada como concentrada, uma vez que, seu comprimento de aplicação é muito menor que o comprimento da viga de apoio em que está atuando.

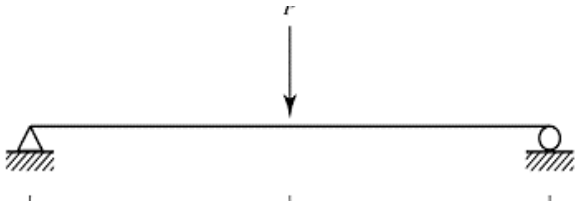
Figura 20- Exemplo de força concentrada exercida sobre uma viga



Fonte: internet(bimestrutural.com.br)

O modelo estrutural para a viga vista em primeiro plano na figura 20 é mostrado abaixo.

Figura 21- modelo estrutural para uma força concentrada aplicada em uma viga

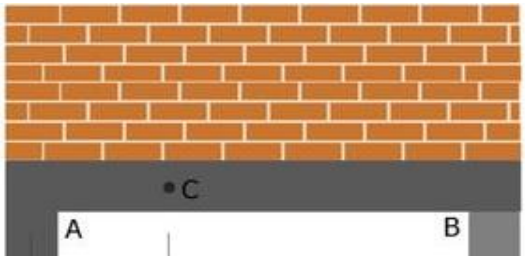


Fonte: internet(estruturas.ufpr.br)

1.11.9 Forças Distribuídas

Considera-se uma força (carga) como distribuída quando ela se estende ao longo de um comprimento, de uma área ou de um volume relativamente grandes quando comparados às dimensões da estrutura, tal que, não possa mais ser considerada como uma carga concentrada. O peso da parede sobre a viga mostrada abaixo é um exemplo de uma força distribuída ao longo de um comprimento.

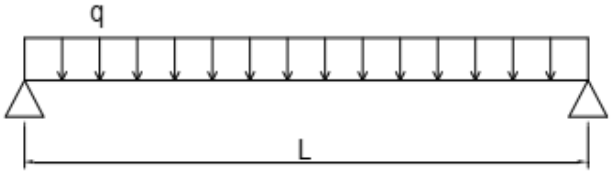
Figura 21- peso de uma parede sobre uma viga (exemplo de força distribuída)



Fonte: inter¬net(br.pinterest.com)

O modelo estrutural para representar o peso **q** da parede, vista na figura acima, distribuído ao longo do comprimento **L** da viga AB.

Figura 22- modelo estrutural para uma força distribuída sobre uma viga



Fonte: internet(qconcursos.com)

CAPÍTULO II

2. MOMENTO DE UMA FORÇA

2.1 Conceito de momento de uma força

De modo prático podemos entender o momento de uma força como sendo a tendência da força para fazer um corpo girar em torno de um ponto (polo) ou eixo de referência.

O momento é uma grandeza vetorial, portanto para ficar perfeitamente caracterizado necessita de:

a) direção

b) sentido

c) módulo

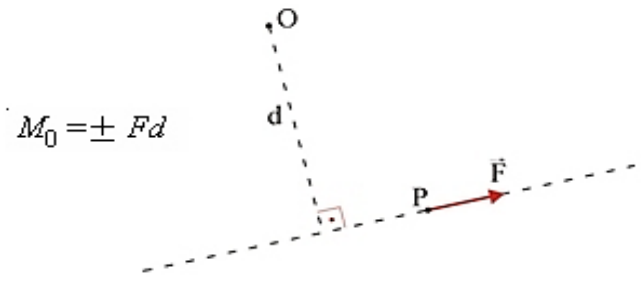
d) ponto de aplicação

Graficamente representarmos um momento em torno de um eixo por uma seta curva. 

2.2 Valor (M) do momento de uma força

O valor **M** do momento de uma força $\vec{\mathbf{F}}$ em relação a um ponto ou eixo de referência é definido como sendo o produto do módulo da força pela distância **d** perpendicular entre a linha de ação da força e o ponto ou eixo de referência. Na figura abaixo ($\boldsymbol{M_0}$) é o momento da força $\vec{\boldsymbol{F}}$ em relação ao ponto **O** e **d** é a distância perpendicular entre o ponto **O** e a linha de ação da força $\vec{\boldsymbol{F}}$**.**

Figura 23- Momento aplicado por uma força



Fonte: internet(infoescola.com)

Matematicamente o valor do momento da força $\vec{\boldsymbol{F}}$ em relação ao ponto O é:

$\boldsymbol{M = F\,x\,d \quad eq.02}$

onde:

$\boldsymbol{F} \rightarrow$ é $o\ modulo\ da\ força\ \vec{F}$

$\boldsymbol{d}\ (braço\ de\ alavanca) \rightarrow$ é $o\ comprimento\ da\ linha\ com\ origem\ no\ ponto\ ou\ eixo\ de\ referência\ e\ que\ intercepta\ a\ linha\ de\ ação\ da\ força\ formando\ um$ ângulo $de\ 90°$

Em nosso estudo vamos adotar como positivo o giro (momento) no sentido anti-horário e negativo no sentido horário.

Analisando a equação 01 concluímos imediatamente que:

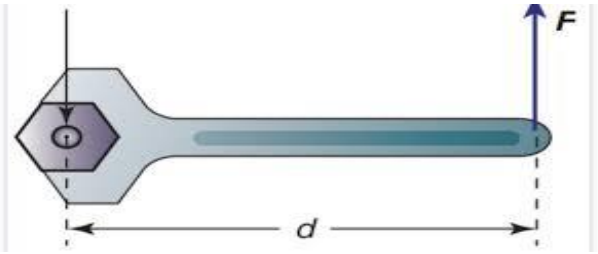
a) o valor do momento de uma força depende do módulo da força e da distância até o ponto ou eixo de referência.

b) quando a linha de ação da força passa pelo ponto de giro temos (d = 0), logo o momento dessa força em relação ao ponto é nulo.

Exemplo 1: Calcule o momento da força $\vec{F}$ em relação ao centro **O** do parafuso.

Dados**:** $\boldsymbol{F = 100\ N \quad e \quad d = 0,2\ m}$

Figura 24- Exemplo 1



Fonte: brainly.com.br

RESP:

$\boldsymbol{M_o} = 100 * 0,2 = \boldsymbol{20\ N.m}$ $(O\ momento\ resultou\ positivo\ indicando\ que\ a\ força\ tende\ a\ girar\ o\ parafuso\ no\ sentido\ antihorário\ adotado\ como\ positivo\ no\ cálculo)$

2.3 Valor do momento resultante de um sistema de duas ou mais forças

Para duas ou mais forças o valor do momento resultante ($\boldsymbol{M}$) produzido, em relação a um ponto ou eixo de referência, é dado pela soma algébrica dos momentos das forças. Matematicamente, temos:

$\boldsymbol{M = F_1 * d_1 + F_2 * d_2 + F_3 * d_3 \ldots . + F_n * d_n \quad eq.03}$

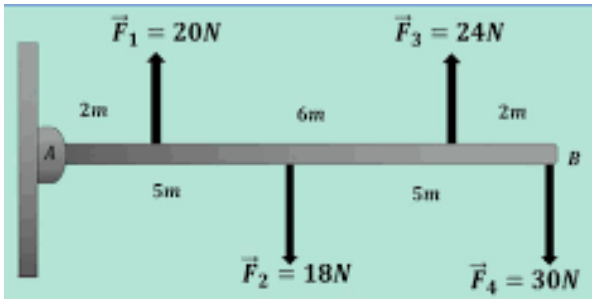
$onde$:

- $F1, F2, F3 \ldots Fn \rightarrow$ $são\ os\ valores\ das\ forças$
- $d1, d2, d3, \ldots d \rightarrow são\ as\ respectivas\ distâncias\ perpendiculares$

$entre\ a\ linha\ de\ ação\ de\ cada\ força\ e\ o\ ponto\ ou\ eixo\ \ de\ referência.$

Exemplo 2: Determine o momento resultante $\boldsymbol{M_A}$ produzido pelas forças em relação ao ponto **A**

Figura 25: Exemplo 2



Fonte: vocepergunta.com

RESP:

$\boldsymbol{M_A} = 20 * 2 - 18 * 5 + 24 * 8 - 30 * 10 = \boldsymbol{-158\ N.m}$ $(o\ sinal\ negativo\ indica\ que\ a\ a\ barra\ tende\ a\ ser\ girada\ no\ sentido\ horário\ adotado\ como\ negativo\ no\ cálculo)$

2.4 Princípio dos momentos ou de varignon

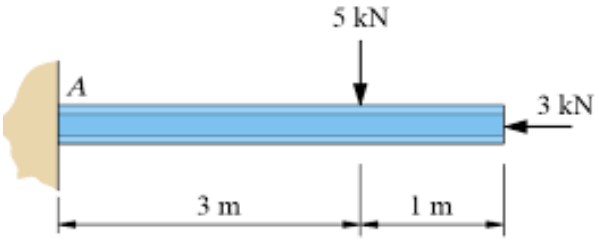
O pricípio de Varignon nos diz que: o momento da força resultante em relação a um ponto ou eixo de referência é igual a soma dos momentos das componentes, ou seja, podemos calcular o momento de uma força $\vec{F}$ como a soma dos momentos de suas componentes.

2.5 CALCULANDO MOMENTOS

Para fixar melhor o conceito de momento vamos resolver e analisar alguns exemplos.

1°) Calcule e represente o momento resultante **M_A** no apoio **A** da barra mostrada a seguir.

Figura 26 -Exemplo 1



Fonte: internet(engenheiraco.com.br)

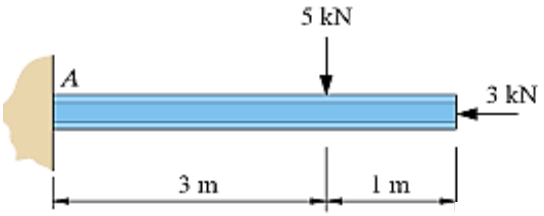
RESP:

a) Aplicando a equação 03 (item 2.1.2), temos:

$M_A = F_1 * d_1 + F_2 * d_2 = -5 * 3 + 3 * 0 = -15\ KN.m \quad (d_2 = 0, pois\ a\ linha\ de\ ação\ da\ força\ 3KN\ passa\ pelo\ ponto\ de\ referência\ e\ o\ fato\ do\ momento\ ser\ negativo\ indica\ giro\ no\ sentido\ horário)$

b) Representando o momento resultante **M_A** no apoio A da estrutura

Figura 27 - Figura de exemplo

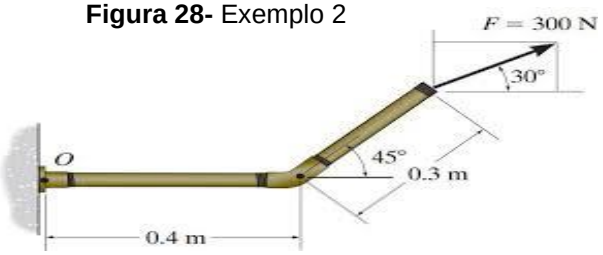


3 m 1 m

Fonte: internet(engenheiraco.com.br)

2°) calcule e represente o momento resultante M_O aplicado pelas forças em relação ao apoio O.

Figura 28- Exemplo 2

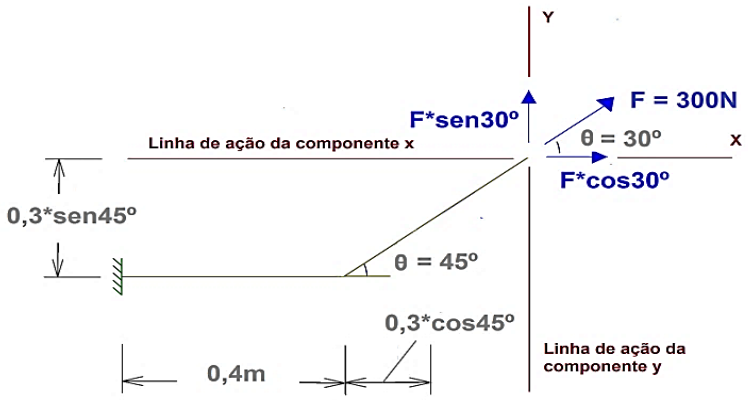


Fonte: internet(ftp.demec.ufpr.br)

RESP:

a) Nesse caso, o modo mais simples é obter as componentes da força $\vec{F}$ na direção paralela e perpendicular ao eixo da barra diretamente ligada ao ponto O, a distância d perpendicular entre o ponto de giro (ponto O) e a linha de ação de cada componente e em seguida aplicar o princípio de Varignon somando os momentos das componentes para obter o momento resultante aplicado pela força $\vec{F}$.

Figura 29- Exemplo 2



Fonte: autor

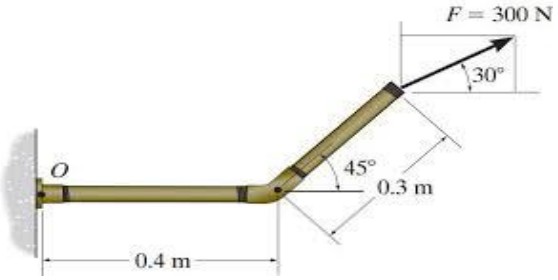
$M_O \circlearrowleft = F.sen30° * dx - F_x.cos30° * dy$

$M_O \circlearrowleft = 300sen30° * (0{,}4 + 0{,}3\ cos45°) - 300cos30° * (0{,}3\ sen45°)$

$M_O \circlearrowleft = 150 * (0{,}4 + 0{,}21) - 259{,}8 * 0{,}21 = \mathbf{36{,}94\ N.m}$ (o sinal positivo indica que o momento resultante produzido pela força $\vec{F}$ tem sentido anti-horário o qual foi adotado como positivo no cálculo)

b) representando o momento resultante M_O no ponto O da estrutura

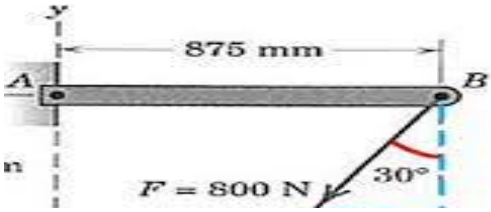
Fig. 30: Exemplo 2



Fonte: internet(ftp.demec.ufpr.br)

3°) calcule e represente o momento resultante M_A em relação ao apoio A da estrutura abaixo.

Figura 31: Exemplo 3

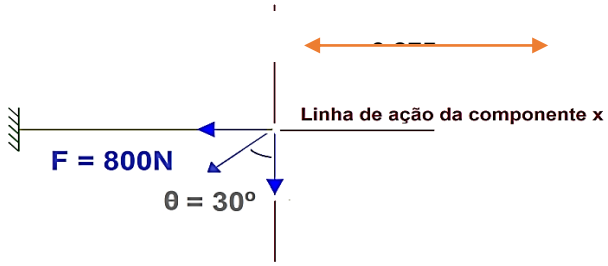


Fonte: internet(respondeai.com.br)

RESP:

a) Aqui resolvemos como o exemplo anterior obtendo a componente da força $\vec{F}$ na direção perpendicular e na direção paralela ao eixo da barra e em seguida calculando a soma dos momentos das componentes para obter o momento resultante aplicado pela força $\vec{F}$.

Figura 32: Exemplo 3



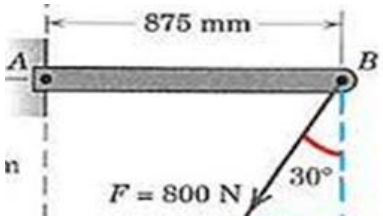
Fonte: autor

• Observe que alinha de ação da componente F_X passa pelo ponto de giro (apoio), logo $d_x = 0$

$M_A = -F.cos30° * 0.875 + F.\sin 30° * 0 = -800cos30° * 0.875 + 800 \sin 30° * 0 = -\mathbf{606,22\ N.m}$ (o sinal negativo indica que o momento resultante aplicado pela força $\vec{F}$ tende a girar a barra no sentido horário adotado como negativo no cálculo)

b) Representando o momento resultante M_A no apoio A

Figura 33: Exemplo 3



Fonte: internet(respondeai.com.br)

CAPÌTULO III

3. Possibilidades de movimento e vinculaçâo das estruturas

3.1 Graus de liberdade

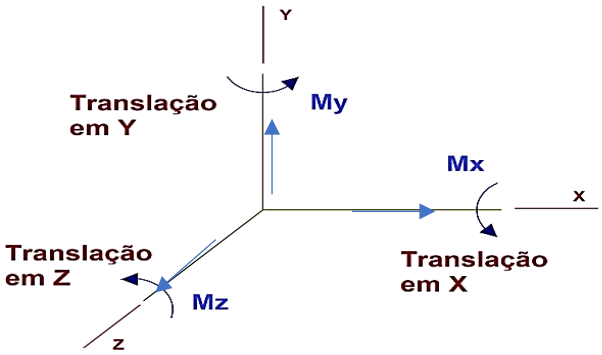
Segundo (Cascão, Maria 2009) podemos entender graus de liberdade de uma estrutura como possibilidades de movimento seja translação seja rotação.

As definições seguintes, sobre graus de liberdade foram adaptadas do livro da referida autora.

3.2 Graus de liberdade no espaço

No espaço existem seis graus de liberdade: uma translação e um momento em x, uma translação e um momento em y e uma translação e um momento em z.

Figura 34: Graus de liberdade

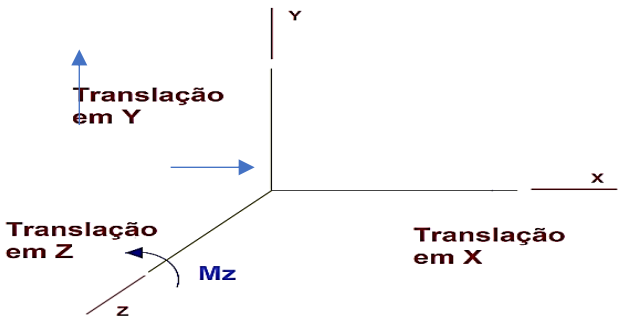


Fonte: Adaptado de: Cascão, Maria (2009)

3.3 Graus de liberdade no plano

No plano são três os graus de liberdade: translação na direção x, translação na direção y e um momento (giro) em torno do eixo z.

Figura 35: Grau de liberdade no plano



Fonte: Adaptado de: Cascão, Maria (2009)

Portanto, no plano, são possíveis três movimentos: duas translações e uma rotação.

3.4 Tipos de vínculos de estruturas

No item (1.1) vimos que as estruturas são formadas por um conjunto de elementos interligados entre si e externamente ao meio. Segundo (Júnior, Eloy 1999), essas ligações genericamente chamadas de vínculos, podem ser classificadas como: rótulas internas (articulações) e apoios externos (apoios)

3.5 Rótulas internas ou articulações

São ligações internas entre elementos estruturais, tais como, barras, chapas, vigas que permitem a rotação relativa entre eles funcionando como rótulas.

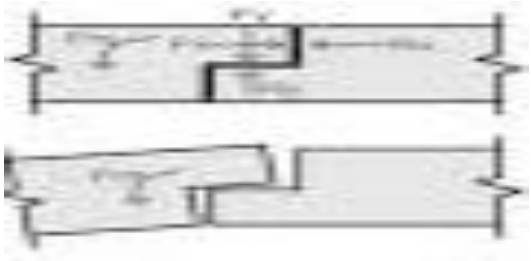
O pino e o dente Geber mostrados nas figuras abaixo são exemplos de rótulas internas.

Figura 36: Pino



Fonte:internet(miscelaniadoconhecimento.com)

Figura 37: Dente Geber



Fonte:internet(miscelaniadoconhecimento.com)

Como as rótulas não impedem a rotação entre as partes a reação momento em uma rótula é sempre nula, logo podemos escrever:

$$\sum \boldsymbol{M_{Rót} = 0} \quad \boldsymbol{eq.04}$$

3.6 Apoios externos (apoios)

São os vínculos que conectam a estrutura ao meio externo. Esse meio externo pode ser o solo, uma rocha, outro elemento estrutural etc

(Adaptado de: Almeida, Maria 2009 e Júnior, Eloy 1999).

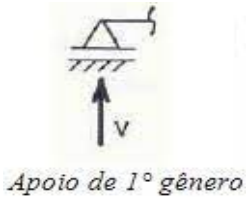
3.7 Tipos de apoios no plano e suas representações

Segundo (Cascão, Maria 2009) em função do número de deslocamentos, translação ou rotação que impedem os apoios das estruturas são classificados em apoio simples ou de primeiro gênero, apoio articulado ou de segundo gênero e engaste ou apoio de terceiro gênero.

A) Apoio simples, móvel ou de primeiro gênero

Impede apenas o deslocamento (translação) em uma das direções permitindo a translação na outra direção e também a rotação da estrutura. Nesse tipo de apoio a única reação é uma força na direção em que o movimento é impedido.

Figura 38: Apoio Simples



Fonte: internet(didaticaeditorial.com.br)

Apoios de 1° gênero são utilizados, por exemplo, em pontes e estruturas metálicas para permitir pequenas movimentações, por dilatação térmica, evitando assim o surgimento de forças adicionais de tração ou compressão nos componentes da estrutura.

As figuras abaixo mostram uma ponte metálica e um de seus apoios de 1° gênero.

Figura 39: ponte metálica



Figura 40: apoio simples em ponte



Na figura 41 a seguir vemos mais um exemplo da utilização de apoio de 1° gênero em pontes.

Figura 41: Apoio de 1º gênero em ponte



Fonte: fazerporsalvaterra.wordpress.com

B) Apoio de segundo gênero ou rotulado

Impede o deslocamento em duas direções (X e Y), mas permite a rotação da estrutura em torno do eixo Z, perpendicular a folha do papel. Nesse tipo de apoio surgem duas forças como reações sendo uma na direção X e outra na direção Y.

Figura 42: Apoio do 2° gênero



Fonte: internet(docplayer.com.br)

As figuras abaixo mostram alguns exemplos de apoios do 2° gênero em estruturas metálicas

Figura 43: Apoio do 2° gênero



Fonte: internet(docplayer.com.br)

Figura 44: Apoio do 2° gênero



Fonte: internet(pt.slideshare.net)

As figuras abaixo mostram exemplo de apoios do 2° gênero em estruturas de concreto.

Figura 45: Apoio do 2° gênero



Fonte: internet(docplayer.com.br)

Figura 46: Apoio do 2° gênero



Fonte: internet (Pinterest.com)

C) Apoio de terceiro gênero ou engaste

Impede o deslocamento nas duas direções (X e Y) e também a rotação da estrutura em torno do eixo Z (eixo saindo do papel). Nesse tipo de apoio surgem três reações sendo: uma força na direção X, uma força na direção Y e um momento em torno do eixo Z.

Figura 47: Apoio de 3 ° gênero



Fonte: internet(didaticaeditorial.com.br)

As figuras abaixo são exemplos de apoios de 3° gênero.

Figura 48: Engaste ou apoio de 3° gênero



Fonte: internet(docplayer.com.br)

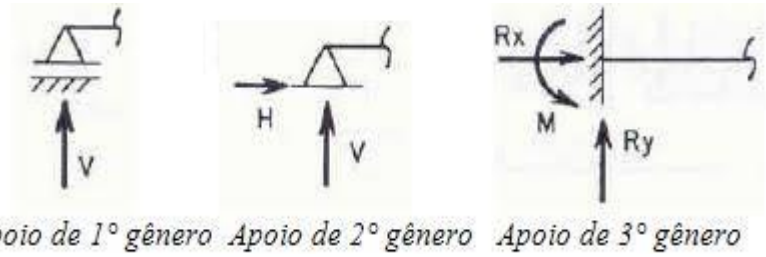
Figura 49: Engaste ou apoio de 3° gênero



Fonte: internet(guiadaengenharia.com)

A figura abaixo mostra a representação dos principais tipos de apoios e de suas respectivas reações.

Figura 50: Reações de apoio



Fonte: internet(didaticaeditorial.com.br)

CAPÍTULO IV

4. SISTEMAS DE FORÇAS COPLANARES E PARALELAS

4.1 Definição de sistema de forças coplanares e paralelas

Um sistema de forças coplanares e paralelas é um conjunto de duas ou mais forças atuando num mesmo plano e paralelas entre si.

4.2 Força resultante $(\overrightarrow{\mathbf{F_R}})$ de um sistema de forças coplanares e paralelas.

A força resultante $(\overrightarrow{\mathbf{FR}})$ de um sistema de forças coplanares e paralelas, seja ele discreto ou contínuo, é a força única capaz de produzir os mesmos efeitos externos, por exemplo, reações de apoios, translações e rotações, produzidos pelo sistema de forças original.

4.3 Sistema equivalente de um sistema de forças

É o sistema obtido quando substituímos um sistema de forças pela sua força resultante $(\overrightarrow{\boldsymbol{F_R}})$. Diz-se que esse sistema é equivalente porque a força resultante única aplicada em um ponto $\bar{\mathbf{x}}$ gera os mesmos efeitos externos, tais como, mesmas translações, rotações e mesmas reações de apoios produzidas pelo sistema de forças original.

4.4 Classificação dos sistemas de forças quanto ao número (n) de forças que os compõem.

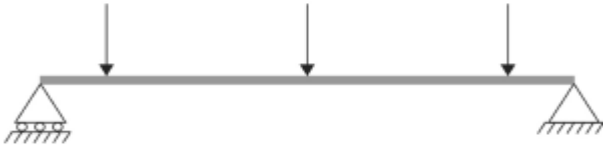
Quanto ao número de forças que os compões os sistemas de forças classificam-se em sistemas discretos e sistemas contínuos

4.5 Sistemas discretos de forças coplanares e paralelas.

São sistemas formados por um número (**n**) finito de forças coplanares e paralelas, tal que, podemos conta-las ou enumerá-las.

A figura abaixo representa um sistema discreto de forças coplanares e paralelas formado por três forças atuando sobre uma viga.

Figura 51: Sistema discreto



Fonte:tecconcurso.com.br

4.6 Valor (F_R) da força resultante de um sistema discreto de forças coplanares e paralelas

Para um sistema discreto de forças coplanares e paralelas o valor $(\boldsymbol{F_R})$ da força resultante é obtido pela soma algébrica das forças que formam o sistema, logo:

$$\boldsymbol{F_R = \sum_{i=1}^{n}(Fi) = F_1 + F_2 + F_3 \ldots\ldots\ldots + F_n} \qquad \boldsymbol{eq.05}$$

Onde:

$F_R \rightarrow$ é $o\ valor\ da\ força\ resultante\ do\ sistema\ dado$

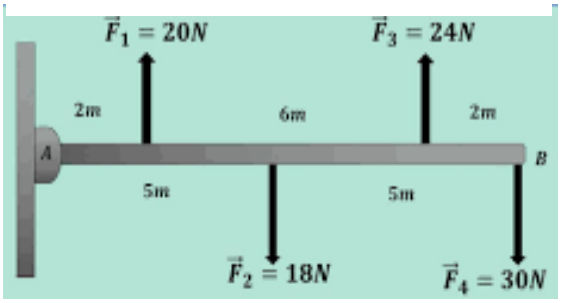
$F_1,$ $F_2,$ F_3, F_n $\rightarrow$ $são\ os\ valores\ das\ respectivas\ forças\ que\ compõem\ o\ sistema$

Adaptado de: (Leet, Kenneth; Uang, Chia-ming e Anne, Gilbert 2009)

Para empregarmos a equação 04 devemos adotar as forças em um dos sentidos como positivas e as forças no sentido oposto como negativas.

Exemplo 1: determine o valor da força resultante para o sistema discreto de forças coplanares e paralelas sobre a barra representada abaixo.

Figura 52: Exemplo 1



Fonte: vocepergunta.com

RESP

Empregando a eq. 05 e adotando como positivo o sentido para cima, temos:

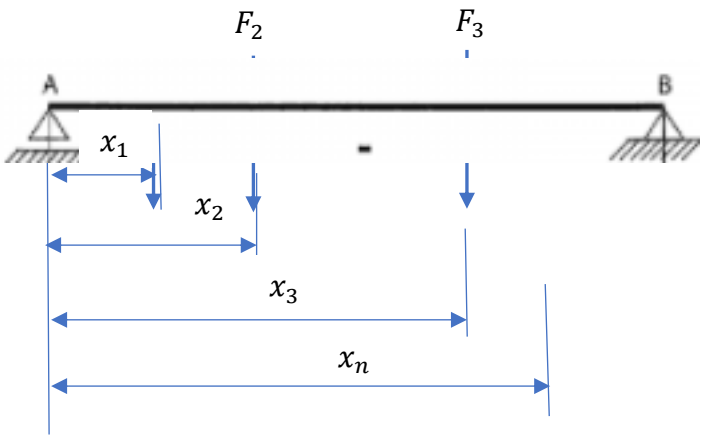
$$\boldsymbol{F_R} = 20 - 18 + 24 - 30 = \boldsymbol{-4\ KN}$$

(o fato da resultante ser negativa indica que ela tem sentido para baixo contrário ao sentido para cima adotado como positivo no cálculo).

4.7 Coordenada $(\bar{x})$ do ponto de aplicação da força resultante de um sistema discreto de forças coplanares e paralelas

Observe o sistema discreto de forças coplanares e paralelas sobre a barra abaixo cujas forças têm valores $F_1, F_2, F_3 \ldots F_n$ e estão aplicadas respectivamente nas distancias $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ em relação ao apoio **A** tomado como referência.

Figura 53: Sistema discreto de forças coplanares e paralelas



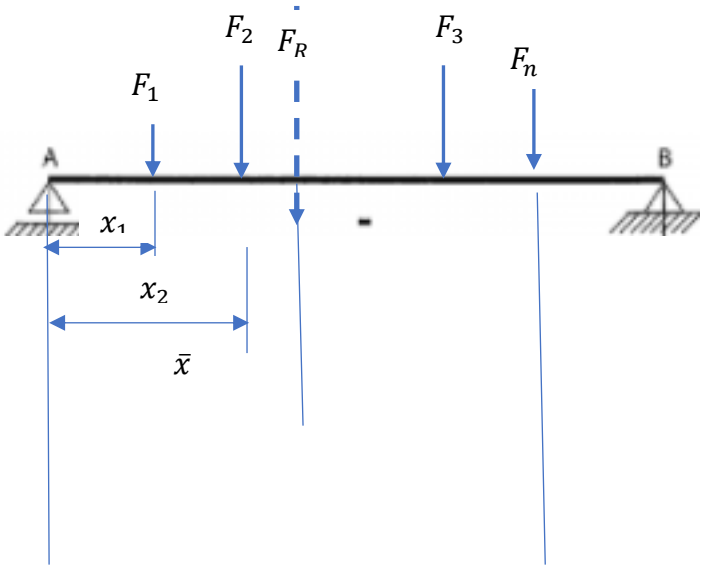
Fonte: autor

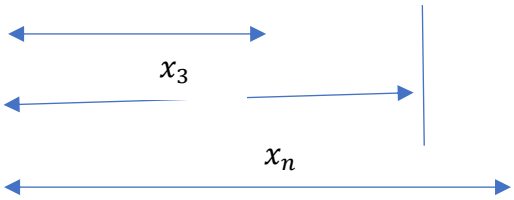
Lembrando que momento é "força x distância", então o momento resultante $\boldsymbol{M_A}$ produzido no ponto **A** pelas **n** forças do carregamento (n sendo um número finito) pode ser calculado escrevendo-se a equação 03 do item 2.1.2 como mostrada abaixo

$$\boldsymbol{M_A = F_1 * x_1 + F_2 * x_2 + F_3 * x_3 \ldots . + F_n * x_n} \qquad \boldsymbol{eq.03}$$

Imagine agora que a força resultante do sistema de forças tem valor $(\boldsymbol{F_R})$ e está aplicada a uma distância $(\bar{x})$ do ponto **A**, como mostra a figura a seguir

Figura. 54: Sistema discreto de forças coplanares e paralelos





Fonte: autor.

Assim o momento da resultante em relação ao ponto A, é:

$$\boldsymbol{M_{FR,\ A} = F_R * \bar{x}} \qquad \boldsymbol{eq.06}$$

Aplicando o princípio dos momentos ou de Varignon, segundo o qual o momento da resultante em relação a um ponto ou eixo de referência é igual à soma dos momentos das componentes em relação a esse mesmo ponto ou eixo, podemos escrever:

$$\boldsymbol{F_R * \bar{x} = F_1 * x_1 + F_2 * x_2 + F_3 * x_3 \ldots . + F_n * x_n} \qquad \mathbf{eq.07}$$

Isolando $\bar{x}$, vem:

$$\boldsymbol{\bar{x} = \frac{F_1 * x_1 + F_2 * x_2 + F_3 * x_3 \ldots \ldots + F_n * x_n}{F_R}} \qquad \boldsymbol{eq.08}$$

Sendo o valor da força resultante dado pela soma das forças podemos escrever:

$$\boldsymbol{\bar{x} = \frac{F_1 * x_1 + F_2 * x_2 + F_3 * x_3 \ldots \ldots + F_n * x_n}{F_1 + F_2 + F_3 \ldots \ldots + F_n}} \qquad \boldsymbol{eq.09}$$

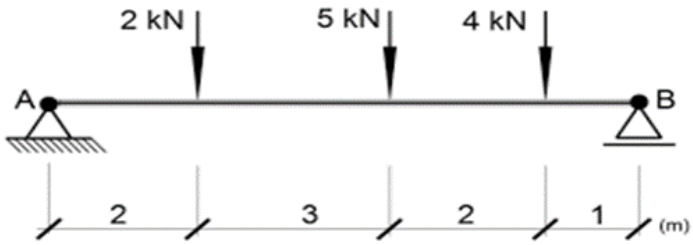
A equação 09 diz que*: a coordenada $\bar{X}$ do ponto de aplicação da resultante de um sistema discreto de forças coplanares e paralelas é obtida dividindo- se a soma dos momentos das forças pelo valor da força resultante.*

Adaptado de: (Leet, Kenneth; Uang, Chia-ming e Anne, Gilbert 2009)

Veja a resolução do exemplo abaixo

1°) Encontre o valor ($\boldsymbol{F_R}$) da força resultante, a coordenada ($\bar{x}$) do seu ponto de aplicação em relação ao apoio A e mostre o sistema equivalente.

Figura 55: - Exemplo 1



Fonte: internet(docente.ifrn.edu.br)

RESP:

a) Valor ($\boldsymbol{F_R}$) da força resultante:

Empregando a equação 05 (item 4.1.4.1.1) e adotando o sentido para cima como positivo, temos:

$$\boldsymbol{F_R} = \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2} + \boldsymbol{F_3} = -2 - 5 - 4 = \boldsymbol{-11\ KN}$$

(o fato da resultante ser negativa indica que ela tem sentido para baixo contrário ao sentido para cima adotado como positivo no cálculo).

b) Coordenada ($\bar{x}$) do ponto de aplicação da resultante.

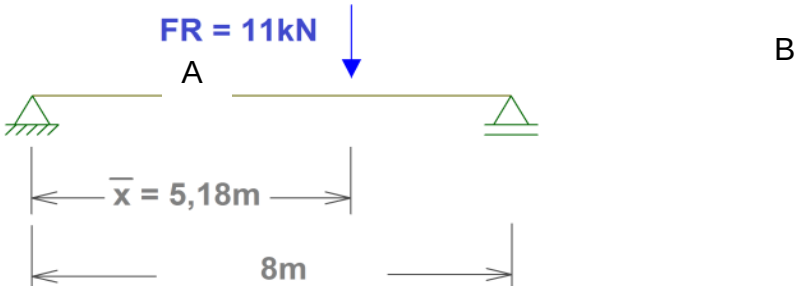
Adotando o ponto **A** como referência e empregando a equação 09, temos:

$$\bar{x} = \frac{\boldsymbol{F_1} * \boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{F_2} * \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{F_3} * \boldsymbol{x_3} \ldots\ldots + \boldsymbol{F_n} * \boldsymbol{x_n}}{F_1 + F_2 + F_3 \ldots\ldots + F_n} = \frac{2 * 2 + 5 * 5 + 4 * 7}{2 + 5 + 4} = \frac{57}{11} = \mathbf{5,18\ m}$$

Portanto, a força resultante vale $\boldsymbol{F_R} = \mathbf{11}\ \boldsymbol{KN}$ e está aplicada a **5,18 m** do apoio **A**.

c) O sistema equivalente é mostrado abaixo

Figura 56: Exemplo 1



Fonte: autor

Apesar do sistema inicial formado por três forças ter sido substituído pela sua força resultante única a viga AB, na figura anterior, continua sujeita aos mesmos esforços externos, tais como, translações, rotações e também às mesmas reações de apoios, produzidas pelo sistema de forças inicial.

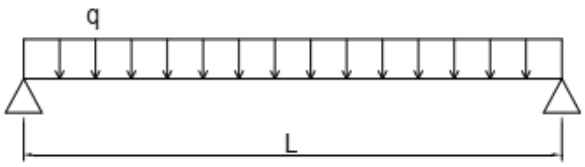
4.8 Sistemas contínuos de forças coplanares e paralelas

Sistemas contínuos de forças coplanares e paralelas são aqueles formados por um número (**n**) tão grande de forças coplanares e paralelas, tal que, não podemos mais contá-las ou enumerá-las. Dizemos, então, que o sistema é formado por um número **n** infinito de forças **(n→∞).**

Adaptado de: (Leet, Kenneth; Uang, Chia-ming e Anne, Gilbert 2009)

O peso **q** de uma parede ou de uma laje distribuído sobre uma viga pode ser representado como mostra a figura abaixo (item 1.5.1.2.2), assim é um exemplo de sistema contínuo de forças coplanares e paralelas.

Figura 57: Peso (carga) distribuído sobre uma viga



Fonte: autor

4.9 Valor (F_R) da força resultante de um sistema contìnuo de forças coplanares e paralelas

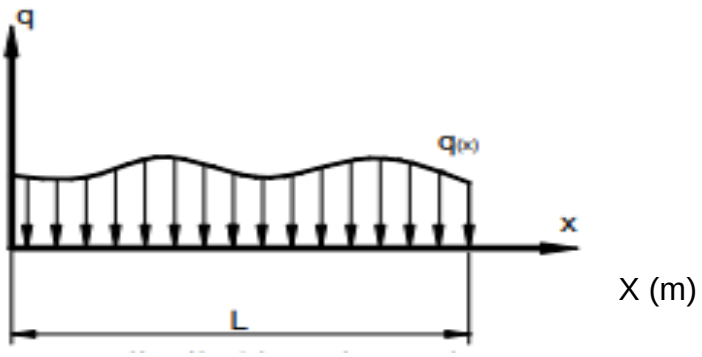
Vimos no item anterior que um sistema contínuo de forças coplanares e paralelas é aquele formado por um número **n** infinito daquelas forças, tal que, a soma de todas elas, ou seja, o valor (F_R) da força resultante é uma soma com um número infinito de parcelas (as forças) e, portanto, uma integra definida. Então se o sistema contínuo de forças for descrito por uma função **q(x)** ao longo de um comprimento **L** o valor (F_R) da força resultante será a integral definida da função **q(x)** ao longo do comprimento **L,** ou seja, o valor da resultante é numericamente igual a área A formada pelo carregamento. Matematicamente, temos:

$$F_R = A\int_0^L q(x)\,dx \quad eq.10$$

Para confirmar o resultado e permitir uma visualização gráfica facilitando a compreensão do que foi explicado vamos analisar o problema do ponto de vista geométrico.

Veja a figura abaixo mostrando um sistema contínuo de forças coplanares e paralelas dado por uma função q(x) distribuído ao longo de um comprimento L

Figura 58: Forças coplanares e paralelas disbruídas por um comprimento



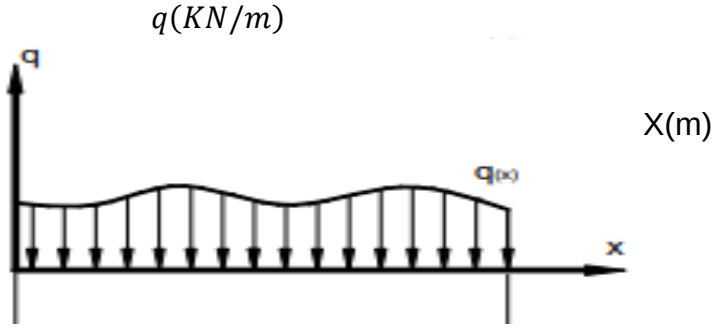
Fonte: Adaptada da internet (Prof. José C. Morilla

Observando as unidades e multiplicando um comprimento $\boldsymbol{b}\ (\boldsymbol{m})$ no eixo horizontal por uma altura $\boldsymbol{h}\ (\frac{\boldsymbol{KN}}{\boldsymbol{m}})$ no eixo vertical, temos:

$$\boldsymbol{b}\ (\boldsymbol{m}) * \boldsymbol{h}\left(\frac{\boldsymbol{KN}}{\boldsymbol{m}}\right) = (\boldsymbol{b} * \boldsymbol{h})\boldsymbol{KN}$$

Note que geometricamente o produto $(\boldsymbol{b} * \boldsymbol{h})$ é a área do retângulo de base **b** e altura **h** (não mostrado na figura), mas a quantidade $(\boldsymbol{b} * \boldsymbol{h})\boldsymbol{KN}$ tem dimensão de força, isso significa que as grandezas área e força são numericamente iguais, ou seja, podemos obter o valor de uma força calculando a área correspondente. Então imaginando a área **A** do carregamento distribuído como sendo formada por um número infinito de retângulos de áreas infinitesimais $\boldsymbol{dA}$ e considerando o retângulo infinitesimal localizado na posição **x** e sua força infinitesimal correspondente $\boldsymbol{dF}$ ficamos com o esquema mostrado na figura a seguir:

Figura 59: Forças coplanares e paralelas disbruídas por um comprimento



Fonte: Adaptada da internet (Prof. José C. Morilla)

Analisando a figura acima concluímos que a área $\boldsymbol{dA}$ do retângulo infinitesimal localizado na posição $\boldsymbol{x}$ e que tem altura $\boldsymbol{q(x)}$ **(**valor da função na abscissa x) e largura $\boldsymbol{dx}$, é:

$$\boldsymbol{dF = dA = q(x)dx} \qquad \boldsymbol{eq\ 11}$$

Integrando os dois membros, temos:

$$\int \boldsymbol{dF} = \int \boldsymbol{dA} = \int_0^L \boldsymbol{q(x)dx} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{F_R = A = \int_0^L q(x)dx} \quad \boldsymbol{eq.12}$$

Observe que a **eq.12** obtida usando geometria é equivalente a **eq.10** como queríamos mostrar

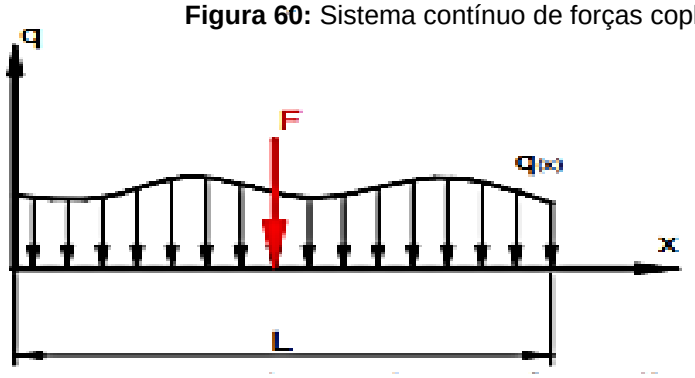
Adaptado de: (Leet, Kenneth; Uang, Chia-ming e Anne, Gilbert 2009)

• **Observação**: *a palavra infinitesimal nesse contexto significa "pequeno", tão pequeno quanto conseguirmos imaginar, porém maior do que zero.*

Obviamente, para um sistema de forças coplanares e paralelas em que todas as forças têm o mesmo sentido o vetor força resultante $\overrightarrow{\boldsymbol{F_R}}$ tem a mesma direção e o mesmo sentido das forças do sistema.

A figura a seguir mostra um sistema contínuo de forças coplanares e paralelas dado por uma função **q(x)** qualquer distribuído ao longo de um comprimento **L** e o vetor força resultante **($\overrightarrow{\boldsymbol{FR}}$)** cujo valor ($\boldsymbol{F_R}$) é numericamente igual a área **(A)** formada pelo sistema de forças.

Figura 60: Sistema contínuo de forças coplanares e paralelas



Fonte: internet (Prof. José C. Mor

$$\boldsymbol{F_R \overset{n}{=} A}$$

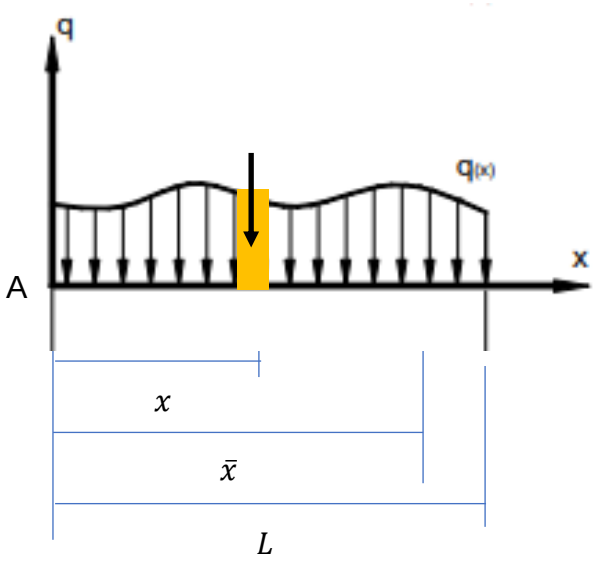
4.10 Ponto $(\overline{X})$ de aplicação da força resultante $(\overrightarrow{FR})$ de um sistema contínuo de forças coplanares e paralelas

Sabemos, do item anterior, que o valor (F_R) da força resultante de um sistema contínuo é numericamente igual a área **A** formada pelo sistema e vimos que se dividirmos a área **A** em um número infinito de retângulos de áreas infinitesimais dA, então a cada área dA corresponderá uma força infinitesimal dF.

A gora vamos aprender a determinar a coordenada $\overline{X}$ do ponto de aplicação do vetor força resultante $\overrightarrow{F_R}$ de sistemas contínuos de forças coplanares e paralelas

Observe a figura abaixo.

Figura 61: Ponto de aplicação da força resultante



Fonte: Adaptado da internet (Prof. José C. Morilla)

Analisando a figura anterior e lembrando que momento é “força x distância" percebemos que o momento infinitesimal dM_A, em relação ao ponto **A**, produzido pela força infinitesimal $\overrightarrow{dF}$ correspondente a área **dA** e aplicada a uma distância **x** do ponto **A**, é:

$$dM_A = x * dF \quad eq.13$$

Integrando ao longo do comprimento **L,** temos:

$$M_A = \int_0^L x\, dF \qquad eq.14$$

Ainda observando a figura anterior vemos que o momento $\mathbf{M_{FR}}$, em relação ao ponto A, produzido pelo vetor força resultante $\overrightarrow{\mathbf{FR}}$, aplicada no ponto $\bar{\mathbf{x}}$ (x barra) é:

$$\boldsymbol{M_{FR} = F_R * \bar{x}} \quad \boldsymbol{eq.15}$$

Lembrando do princípio de Varignon segundo o qual o momento da força resultante é igual à soma dos momentos das componentes, podemos igualar as equações 15 e 14, logo**:**

$$\boldsymbol{F_R * \bar{x} = \int_0^L q(x)\, dF}$$

Isolando $\boldsymbol{\bar{X}}$**,** temos:

$$\boldsymbol{\bar{x} = \frac{\int_0^L x * dF}{F_R}} \quad \boldsymbol{eq.16}$$

Vimos no item (4.1.4.2.1) que $\boldsymbol{dF = dA = q(x)\, dx}$ e $\boldsymbol{FR = A = \int_0^L q(x)\, dx}$, assim podemos escrever:

$$\boldsymbol{\bar{x} = \frac{\int_0^L x.q(x)\, dx}{F_R}} \quad \boldsymbol{eq.17}$$

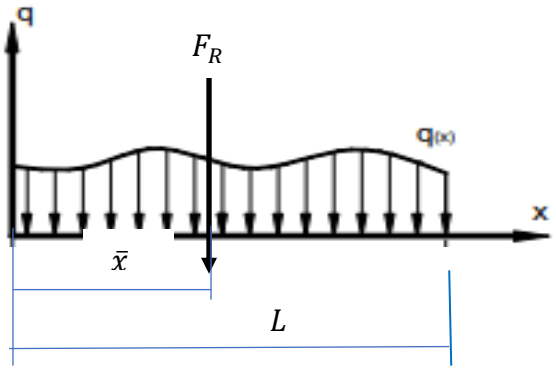
Também podemos ainda escrever:

$$\boldsymbol{\bar{x} = \frac{\int_0^L x * q(x)\, dx}{\int_0^L q(x)\, dx}} \quad \boldsymbol{eq.18}$$

Adaptado de: (Leet, Kenneth; Uang, Chia-ming e Anne, Gilbert 2009)

A figura abaixo mostra a representação de um carregamento distribuído genérico, a força resultante e seu ponto ($\bar{x}$) de aplicação.

Figura 62 - Carregamento distríbuido e seu ponto de aplicação



Fonte: Adaptado da internet (Prof. José C. Morilla)

CAPÌTULO V

5. CARREGAMENTOS, FORÇAS RESULTANTES E SEUS PONTOS DE APLICAÇÃO

5.1 Conceito de carregamento

De modo prático podemos entender “carregamento” como sendo um conjunto de uma ou mais forças externas ativas aplicadas sobre uma estrutura.

Para uma melhor compreensão didática de conceitos vamos dividir os carregamentos em discretos, distribuídos e combinados.

Adaptado de (Júnior, Eloy 1999)

5.2 Carregamentos discretos

São carregamentos formados exclusivamente por um sistema discreto de forças, ou seja, são aqueles formados exclusivamente por n cargas concentradas sendo n um número finito.

A carga (força) aplicada pela viga transversal sobre a viga mostrada em primeiro plano, na figura abaixo pode ser considerada como uma carga concentrada formando um carregamento discreto constituído por uma única carga (n=1).

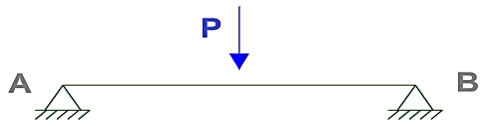
Figura 63: carregamento discreto



Fonte: internet(bimestrutural.com.br)

O modelo estrutural para representar o carregamento sobre a viga vista em primeiro plano na figura anterior é mostrado na figura a seguir:

Figura 64: Modelo estrutural de carregamento discreto



Fonte: autor

5.3 Valor (F_R) da força resultante de um carregamento discreto

Os Carregamentos discretos que vamos estudar são exemplos de sistemas discretos de forças coplanares e paralelas, assim o valor (F_R) da força resultante é obtido empregando-se a equação dada abaixo como foi mostrado no item 4.1.4.1.1

$$F_R = F_1 + F_2 + F_3 \ldots\ldots\ldots + F_n \qquad eq.05$$

A equação 05 diz que: ***o valor*** (F_R) ***da resultante de um carregamento discreto de forças coplanares e paralelas é dado pela soma algébrica das forças que formam o carregamento.***

Adaptado de: (Leet, Kenneth; Uang, Chia-ming e Anne, Gilbert 2009)

5.4 Coordenada $(\bar{x})$ do ponto de aplicação da força resultante de um carregamento discreto

O ponto $(\bar{x})$ de aplicação da força resultante é obtido empregando-se a eq. 09 dada abaixo como foi mostrado no item 4.1.4.1.2

$$\bar{x} = \frac{F_1 * x_1 + F_2 * x_2 + F_3 * x_3 \ldots\ldots + F_n * x_n}{F_1 + F_2 + F_3 \ldots\ldots + F_n} \qquad eq.09$$

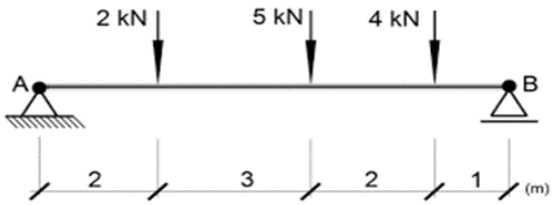
A equação 09 diz que: *a coordenada* $\bar{X}$ *do ponto de aplicação da resultante de um carregamento discreto de forças coplanares e paralelas é obtida dividindo- se a soma dos momentos das forças, em relação à um ponto de referência, pelo valor da força resultante.*

Adaptado de: (Leet, Kenneth; Uang, Chia-ming e Anne, Gilbert 2009)

Exemplo

1°) Encontre o valor (F_R) da força resultante, a coordenada $(\bar{x})$ do seu ponto de aplicação em relação ao apoio A e mostre a viga (sistema) equivalente.

Figura 65: Exemplo 1



Fonte: internet(docente.ifrn.edu.br)

RESP:

a) Valor ($\boldsymbol{F_R}$) da força resultante:

Empregando a equação 05 mostrada no item 4.1.4.1.1 e adotando o sentido para cima como positivo, temos:

$\boldsymbol{F_R = F_1 + F_2 + F_3 = -2 - 5 - 4 = -11\ KN}$(o fato da resultante ser negativa indica que ela tem sentido para baixo contrário ao sentido para cima adotado como positivo no cálculo)

b) Coordenada ($\bar{x}$) do ponto de aplicação da resultante.

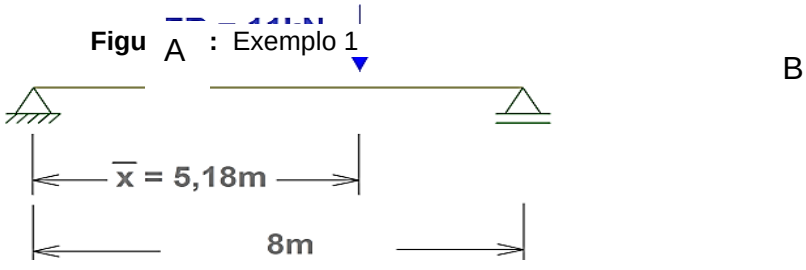
Adotando o ponto **A** como referência e empregando a equação 09 dada no item 4.1.4.1.2, temos:

$$\bar{x} = \frac{F_1 * x_1 + F_2 * x_2 + F_3 * x_3 \ldots\ldots + F_n * x_n}{F_1 + F_2 + F_3 \ldots\ldots + F_n} = \frac{2 * 2 + 5 * 5 + 4 * 7}{2 + 5 + 4} = \frac{57}{11} = \mathbf{5,18\ m}$$

Portanto, a força resultante vale $\boldsymbol{F_R = 11\ KN}$ e está aplicada a **5,18 m** do apoio **A**.

c) Viga equivalente é mostrada abaixo

Figu **:** Exemplo 1

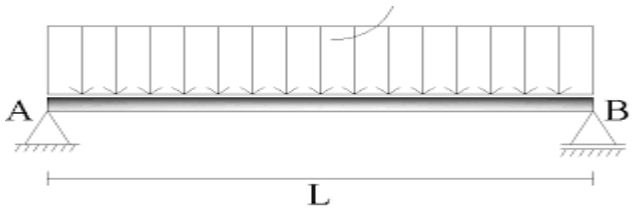


Fonte: autor

5.5 Carregamentos distribuídos

São carregamentos formados por um número infinito de forças, portanto, são sistema contínuo e como exemplo, podemos citar o peso q de uma parede ou de uma laje distribuído sobre uma viga o qual pode ser representado como na figura a seguir.

Figura 67: Carregamento distribuído



Fonte: internet(lyceumonline.com.br)

5.6 Tipos mais frequentes de carregamentos distribuídos

Neste item vamos conhecer os tipos de carregamentos distribuídos mais frequentes com os quais iremos trabalhar

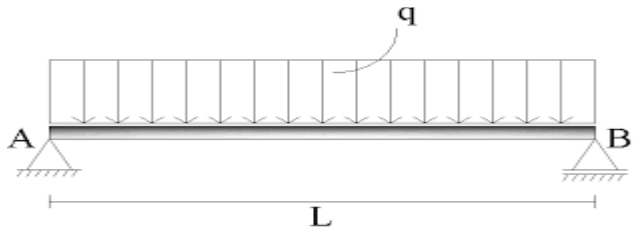
A) Carregamento uniformemente distribuído:

Carregamento dado por uma função de valor constante, $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}$, distribuído ao longo de um comprimento **L** formando uma área (**A**) retangular.

Exemplos: o peso próprio de uma viga homogênea e de seção transversal constante, o peso de uma parede homogênea e de altura constante ao longo de uma viga.

A figura abaixo mostra o modelo estrutural para representar o peso **q** de uma parede ao longo do comprimento **L** de uma viga como exemplo de um carregamento uniformemente distribuído.

Figura 68-Carregamento uniformemente distribuído



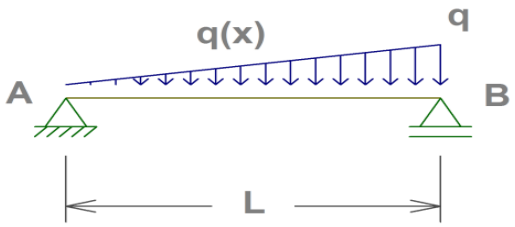
Fonte: internet(xdocs.com.br)

B) Carregamento linearmente distribuído ou triangular

São carregamentos que variam linearmente de zero até um valo **q** ao longo de um comprimento **L** de acordo com uma função **q (x)** do 1° grau, formando uma área (**A**) triangular.

Um carregamento triangular pode ser usado, por exemplo, para representar o peso de uma parede de espessura constante, mas cuja altura varia linearmente ao longo do comprimento **L** de uma viga. Veja a figura abaixo.

Figura 69: Carregamento linearmente distribuído



Fonte: autor

C) Carregamentos trapezoidais:

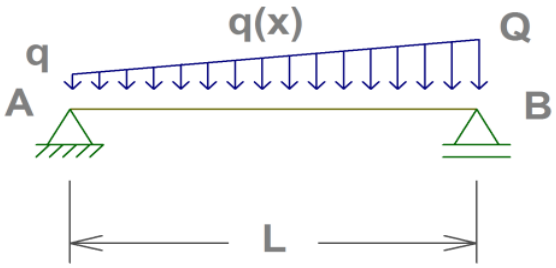
Para fins didáticos vamos considerar dois tipos de carregamentos trapezoidais: o tipo 1 e o tipo 2.

C.1) Carregamento trapezoidal tipo 1

São carregamentos que variam linearmente de um valor inicial até um valor final ao longo de um comprimento **L** de acordo com uma função **q(x)** qualquer do 1° grau, formando uma área (**A**) trapezoidal.

Um carregamento trapezoidal tipo 1 pode ser usado, por exemplo, para representar o peso de uma parede sobre uma viga como mostrado na figura abaixo

Figura 70: Carregamento trapezoidal tipo 1



Fonte: autor

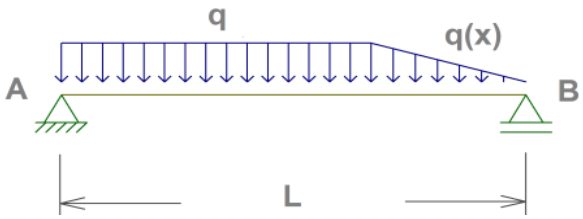
$q \rightarrow$ é *sempre a carga de valor mínimo*; $Q \rightarrow$ é *sempre a carga de valor máximo*

C.2) Carregamento trapezoidal tipo 2

São carregamentos que se distribuem com um valor constante **q** ao longo de um certo trecho e com um valor que varia linearmente, de acordo com uma função **q(x)** do 1° grau, ao longo do outro trecho de modo a formar um trapézoida **(A)** como mostra a figura abaixo.

A função **R(x)** desse carregamento é definida por duas sentenças.

Figura 71: Carregamento trapezoidal tipo 2



Fonte: autor

5.7 Valor (F_R) da força resultante para os carregamentos distribuídosmais frequentes e coordenada $(\bar{x})$ de seu ponto de aplicação

Os Carregamentos distribuídos que vamos estudar são exemplos de sistemas contínuos de forças coplanares e paralelas distribuídas ao longo de um comprimento **L**, assim o valor (F_R) da força resultante é obtido aplicando-se a eq.10 deduzida no item 4.1.4.2.1 e a coordenada $\bar{x}$ de seu ponto de aplicação é obtida pela eq. 18 do item 4.1.4.2.2

• Força resultante

$$F_R = A = \int_0^L q(x)dx \quad eq.10$$

A equação 10 diz que: *o valor (F_R) da resultante de um carregamento distribuído formado por forças coplanares e paralelas é numericamente igual a área (A) formada pelo carregamento.*

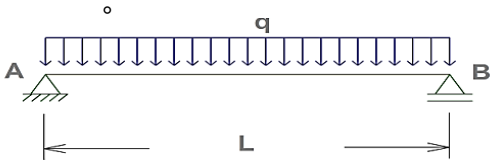
• Ponto $(\bar{X})$ de aplicação da força resultante $(\overrightarrow{FR})$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^L x * q(x)\,dx}{\int_0^L q(x)\,dx} \quad eq.18$$

Acompanhe a resolução para os carregamentos distribuídos genéricos dados a seguir.

1°) Carregamento uniformemente distribuído

Figura 72: - Exemplo 1



Fonte: autor

RESP:

a) Função constante que define o carregamento

$$\boldsymbol{q(x) = q} \qquad se \quad (0 \leq x \leq L)$$

b) Valor ($\boldsymbol{F_R}$) da resultante

$$\boldsymbol{F_R = A_{Ret} = (q * L)} \qquad \boldsymbol{eq.10 \;\; item\,(4.1.4.2.1)}$$

c) Ponto ($\overline{x}$) de aplicação da força resultante $\overrightarrow{\mathbf{FR}}$ em relação ao apoio **A.**

$$\overline{\boldsymbol{x_A}} = \frac{\int_0^{\mathbf{L}} \boldsymbol{x * q(x)\, dx}}{\boldsymbol{F_R}} \qquad \mathbf{eq.17} \qquad \mathbf{item(4.1.4.2.2)}$$

Substituindo **q(x)** e resolvendo o numerador da eq.17 isoladamente, temos

$$\int_0^L x.q(x)\,dx = \int_0^L x.q.dx = q.\frac{x^2}{2}\Big]_0^L = \frac{q}{2}(L^2 - 0) = \boldsymbol{\frac{q.L^2}{2}}$$

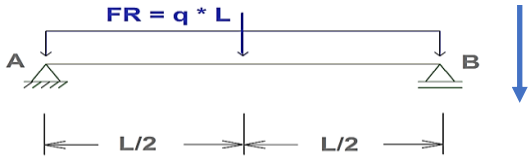
d) substituindo na equação 17, os valores encontrados em b e c**,** vem:

$$\overline{\boldsymbol{x_A}} = \frac{\int_0^{\mathbf{L}} \boldsymbol{x * q(x)\, dx}}{\boldsymbol{F_R}} = \frac{\frac{q.L^2}{2}}{q.L} = \frac{q.L^2}{2} * \frac{1}{q.L} = \boldsymbol{\frac{L}{2}}$$

Estes resultados foram obtidos para um carregamento distribuído genérico, assim são válidos para qualquer carregamento uniformemente distribuído.

e) Viga equivalente

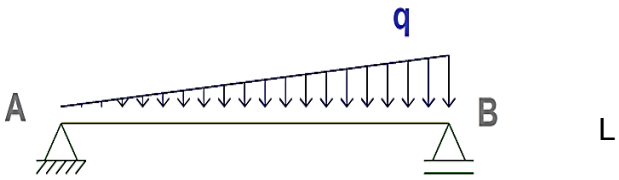
Figura 73: Viga equivalente



Fonte: autor

2°) Carregamento triangular

Figura 74: - Exemplo 2 **q**



Fonte: autor

RESP:

a) Função que define o carregamento

$$\boldsymbol{q(x) = \frac{q}{L} * x} \qquad (0 \leq x \leq L)$$

b) Valor ($\boldsymbol{F_R}$) da resultante:

$$\boldsymbol{F_R = A_{Tri} = \frac{q * L}{2}} \quad \boldsymbol{eq.12} \quad \boldsymbol{item\ (4.1.4.2.1)}$$

c) Ponto $\overline{\boldsymbol{X_0}}$ de aplicação da força resultante $\overrightarrow{\mathbf{FR}}$ em relação ao vértice de carga ZERO.

$$\boldsymbol{\overline{X_0} = \frac{\int_0^L x * q(x)\, dx}{F_R}} \quad \boldsymbol{eq.17} \quad \boldsymbol{item\ (4.1.4.2.2)}$$

Substituindo **q(x)** e resolvendo o numerador da eq.15 isoladamente, temos:

$$\int_0^L x.q(x)\, dx = \int_0^L x\left(\frac{q}{L}x\right) dx = \frac{q}{L}\int_0^L x^2\, dx = \frac{q}{L} * \frac{x^3}{3}]_0^L = \frac{q}{3.L}(L^3 - 0) = \frac{q.L^3}{3.L} = \boldsymbol{\frac{q.L^2}{3}}$$

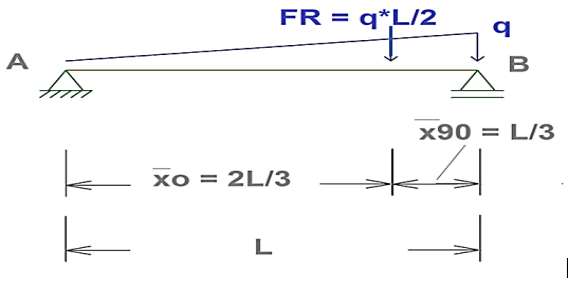
d) Substituindo na equação 15, os valores encontrados nas letras **b** e **c,** vem:

$$\boldsymbol{\overline{X_0} = \frac{\int_0^L x * q(x)\, dx}{F_R} = \frac{\frac{q.L^2}{3}}{\frac{q.L}{2}} = \frac{q.L^2}{3} * \frac{2}{q.L} = \frac{2.L}{3}}$$

Estes resultados foram obtidos para um carregamento triangular genérico, assim são válidos para qualquer carregamento triangular.

e) viga equivalente

Figura 75: Viga equivalente



Fonte: autor

Portanto, em um carregamento triangular o vetor força resultante ($\overrightarrow{FR}$) está aplicado no ponto:

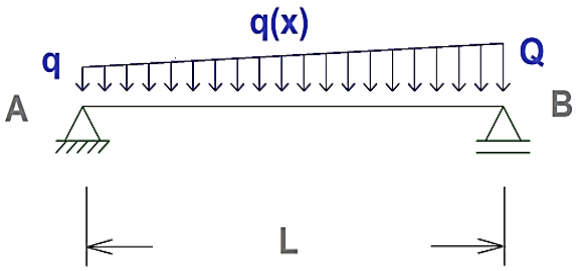
$\overline{X_0} = {2L}/{3}$ em relação ao vértice de carga zero (ângulo agudo)

e no ponto:

$\overline{X_{90}} = {L}/{3}$ em relação ao vértice da carga máxima q (ângulo de 90°).

3°) Carregamento trapezoidal tipo 1

Figura 76: Exemplo 3°



Fonte: autor

RESP:

a) Função que define o carregamento

$$q(x) = \frac{(Q-q)}{L} * x + q \qquad (0 \leq x \leq L)$$

b) Valor F_R da força resultante

$$F_R = A_{Trap} = \frac{(Q+q) * L}{2}$$

c) ponto $\overline{X_q}$ de aplicação da força resultante $\overrightarrow{FR}$ em relação ao vértice de carga mínima q

$$\overline{x_A} = \frac{\int_0^L x * q(x)\, dx}{F_R} \qquad \text{eq.17} \qquad \text{item}(4.1.4.2.2)$$

Substituindo **q(x)** e resolvendo o numerador da eq.17 isoladamente, temos:

$$\int_0^L x.q(x)\, dx = \int_0^L x\left(\frac{(Q-q)}{L}x + q\right)dx = \frac{(Q-q)}{L}\int_0^L x^2.dx + q\int_0^L x\,.dx \Rightarrow$$

$$\int_0^L x * q(x)dx = \frac{(Q-q)}{L} * \frac{x^3}{3}]_0^L + q\,\frac{x^2}{2}]_0^L = \frac{(Q-q)}{3.L} * (L^3 - 0^3) + \frac{q}{2} * (L^2 - 0^2)$$

$$\int_0^L x * q(x)dx = \frac{Q.L^3 - q.L^3}{3.L} + \frac{q.L^2}{2} = \frac{Q.L^2 - q.L^2}{3} + \frac{q.L^2}{2} = \frac{2.QL^2 - 2qL^2 + 3q.L^2}{6}$$

$$\int_0^L x * q(x)dx = \frac{2.QL^2 + q.L^2}{6} = \frac{\boldsymbol{L^2(2Q+q)}}{\boldsymbol{6}}$$

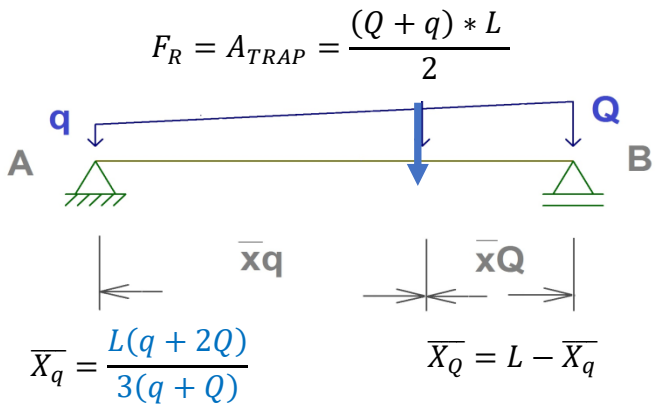
d) Substituindo na equação 15, os valores encontrados nas letras **b** e **c,** vem:

$$\overline{X_q} = \frac{\int_0^L \mathbf{x} * \boldsymbol{q(x)}\, \boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{F_R}} = \frac{\frac{L^2(2Q+q)}{6}}{\frac{L(Q+q)}{2}} = \frac{L^2(2Q+q)}{6} * \frac{2}{L(Q+q)} = \frac{\boldsymbol{L(q+2Q)}}{\boldsymbol{3(q+Q)}}$$

Estes resultados foram obtidos para um carregamento trapezoidal genérico, assim são válidos para qualquer carregamento trapezoidal do tipo 1

e) Viga equivalente

Figura 77: Viga equivalente



Fonte: autor

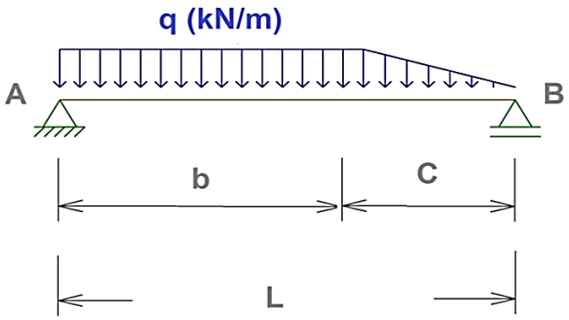
Quando o carregamento iniciar com a carga máxima **Q** usamos as expressões abaixo.

$\boldsymbol{a}$) $\overline{X_Q} = \frac{L(Q+2q)}{3(Q+q)} \rightarrow ponto\ de\ aplicaça\ da\ resultante\ em\ relação$ à $carga\ mínima\ q$

(A diferença é que no numerador a carga a partir da qual estamos medindo a distância $\overline{X}$ de aplicação da resultante nunca é multiplicada por 2)

4°) Carregamento trapezoidal tipo 2

Figura 78: Carregamento trapezoidal tipo 2



Fonte: autor

RESP:

a) Função que define o carregamento:

Nesse caso temos uma função definida por duas sentenças.

$$\mathbf{q(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{q} & \boldsymbol{se} \quad (\mathbf{0} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}) \\ \dfrac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{C}} * (\mathbf{L} - \mathbf{x}) & \mathbf{se} \quad (\mathbf{b} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{L}) \end{cases}$$

$b \rightarrow comp.do\ carreg.uniforme; \qquad c \rightarrow comp.do\ carreg.triangular$

b) valor F_R da força resultante

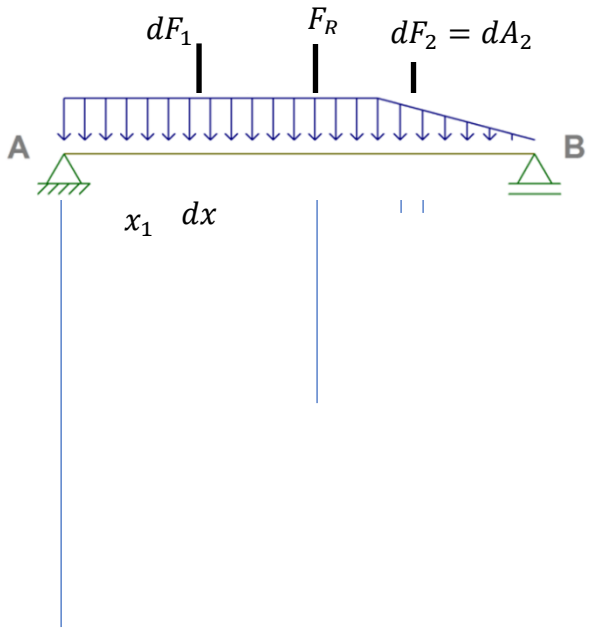
$$\boldsymbol{F_R = A = (L + b).q\ /\ 2}$$

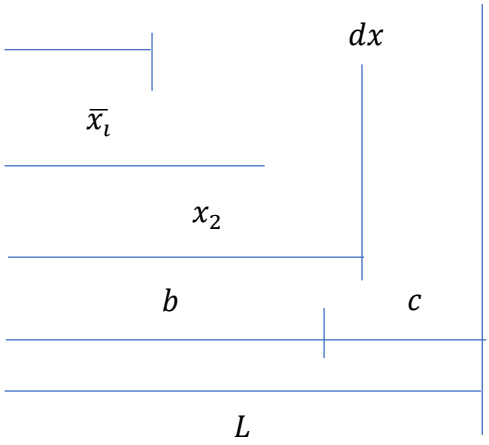
c) ponto $\overline{X_t}$ de aplicação da força resultante $\overrightarrow{\mathbf{FR}}$ em relação ao início do carregamento uniformemente distribuído (ponto A)

Aqui temos uma função definida por duas sentenças tornando mais difícil a resolução, assim vamos mostrar detalhadamente o procedimento geral de cálculo

Observe a figura abaixo:

Fig. 79: Carregamento trapezoidal tipo 2





Fonte: autor

b → comp. do carreg. uniforme; c → comp. do carreg. triangular

• Aplicando o princípio de Varignon (Teorema dos momentos), vem:

$$\boldsymbol{F_R * \bar{x}_i = \int_0^b x_1 . dF_1 + \int_b^L x_2 . dF_2} \qquad mas$$

$$dF_1 = dA_1 = q(x_1).dx = q.dx \quad e \quad dF_2 = dA_2 = q(x_2).dx = \frac{q}{c} * (L - x_2)$$

Logo:

$$\boldsymbol{F_R * \bar{x}_i} = \int_0^b x_1 . q . dx + \int_b^L x_2 . [\frac{q}{c} * (L - x_2)]dx = \frac{q{x_1}^2}{2}]_0^b + \frac{q}{c}\int_b^L x_2(L - x_2)dx$$

$$\boldsymbol{F_R * \bar{x}_i} = \frac{q}{2} * (b^2 - 0^2) + \frac{q.L}{c}\int_b^L x_2\, dx - \frac{q}{c}\int_b^L {x_2}^2 . dx = \frac{q.b^2}{2}] + \frac{q.L.{x_2}^2}{2.c} - \frac{q.{x_2}^3}{3.c}]_b^L$$

$$\boldsymbol{F_R * \bar{x}_i} = \frac{qb^2}{2} + \frac{qL(L^2 - b^2)}{2c} - \frac{q(L^3 - b^3)}{3c}, \qquad mas\ \ c = (L - b), então$$

$$\boldsymbol{F_R * \bar{x}_i} = \frac{qb^2}{2} + \frac{qL(L^2 - b^2)}{2(L - b)} - \frac{q(L^3 - b^3)}{3(L - b)} \qquad expandindo\ os\ produtos\ notáveis, vem$$

$$\boldsymbol{F_R * \bar{x}_i} = \frac{qb^2}{2} + \frac{qL(L - b)(L + b)}{2(L - b)} - \frac{q(L - b)(L^2 + Lb + b^2)}{3(L - b)} \qquad simplificando, fica:$$

$$\boldsymbol{F_R * \bar{x}_i} = \frac{qb^2}{2} + \frac{qL(L + b)}{2} - \frac{q(L^2 + Lb + b^2)}{3}$$

$$\boldsymbol{F_R * \bar{x}_i} = \frac{3qb^2 + 3qL^2 + 3qLb - 2qL^2 - 2qLb - 2qb^2}{6}$$

$$\boldsymbol{F_R * \bar{x}_i} = \frac{qb^2 + qL^2 + qLb}{6} = \boldsymbol{\frac{q(L^2 + Lb + b^2)}{6}}$$

Isolando $(\bar{x}_i)$ e substituindo o valor (F_R) da resultante obtido na letra b, temos:

$$\bar{x}_i = \frac{\frac{q(L^2+Lb+b^2)}{6}}{F_R} = \frac{\frac{q(L^2+Lb+b^2)}{6}}{\frac{q(L+b)}{2}} = \frac{\cancel{q}(L^2+Lb+b^2)}{\cancel{6}} * \frac{\cancel{2}}{\cancel{q}(L+b)} =$$

$$\frac{(L^2+Lb+b^2)}{3(L+b)} \qquad multiplicando\ por\ (L-b), fica$$

$$\bar{x}_i = \frac{(L^2+Lb+b^2)}{3(L+b)} * \frac{(L-b)}{(L-b)}, \qquad assim\ podemos\ escrever:$$

$$\bar{x}_i = \frac{(\boldsymbol{L^3-b^3})}{\boldsymbol{3(L^2-b^2)}},$$

Onde:

$\bar{x}_i \rightarrow$ é *o ponto de aplicação da resultante partindo do inicio do carreg.retangular*

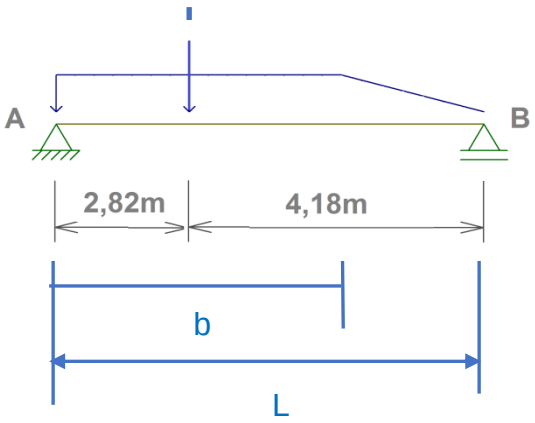
$L \rightarrow$ é *o comprimento total do carregamento*

$b \rightarrow$ *comprimento do carregamento uniformemente distribuído (retangular)*

d) Viga equivalente

Figura 80: Viga equivalente

$$F_R = A_{TRAP} = \frac{(L+b)*q}{2}$$



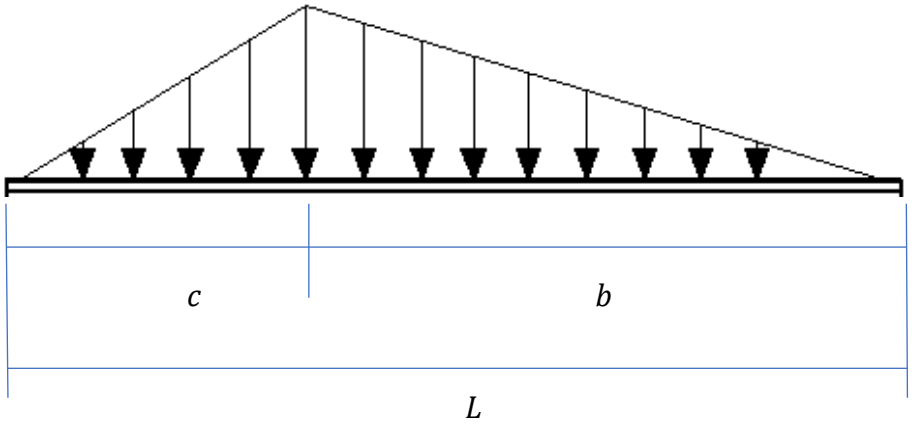
Fonte: autor

Estes resultados foram obtidos para um carregamento genérico, assim são válidos para qualquer carregamento trapezoidal do tipo 2.

5°) Carregamento triangular duplo

Figura 81: Carregamento triangular duplo

q



Fonte: Adaptado de: engenheiraco.blogspot.com

RESP:

a) Função que define o carregamento:

Nesse caso temos uma função definida por duas sentenças.

$$\mathbf{q(x)} = \begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{c}} * \boldsymbol{x} & (\mathbf{0} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{C}) \\ \dfrac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{b}} * (\mathbf{L} - \mathbf{x}) & (\mathbf{C} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{L}) \end{cases}$$

b) Valor F_R da força resultante

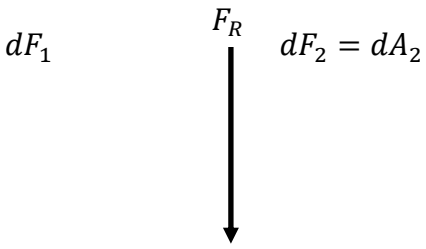
$$\boldsymbol{F_R = A_{Tri} = \frac{q * L}{2}}$$

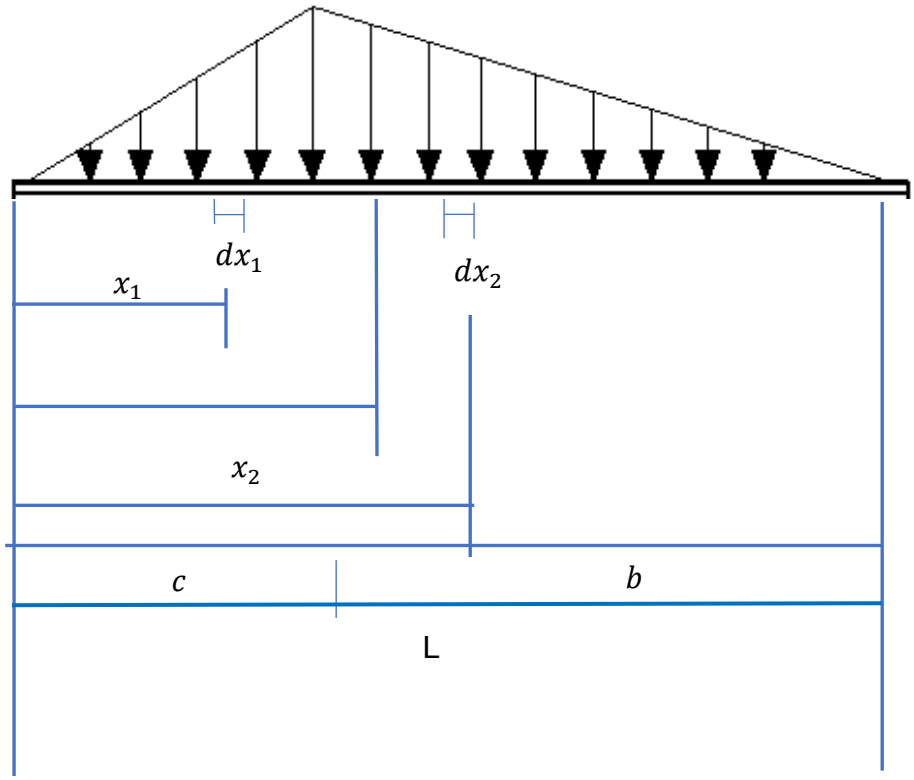
c) ponto $\overline{\boldsymbol{X_m}}$ de aplicação da força resultante $\overrightarrow{\mathbf{FR}}$ em relação ao início do menor triângulo

Aqui temos uma função definida por duas sentenças tornando mais difícil a resolução, assim vamos mostrar detalhadamente o procedimento geral de cálculo

Observe a figura abaixo:

Fig. 82: Carregamento triangular duplo





Fonte: Adaptado de: engenheio.blogspot.com

Aplicando o princípio de Varignon (Teorema dos momentos), vem:

$$\boldsymbol{F_R * \overline{x_m}} = \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{x_1 . dF_1} + \int_{\boldsymbol{c}}^{\boldsymbol{L}} \boldsymbol{x_2 . dF_2} \qquad mas$$

$$\boldsymbol{dF_1 = dA_1 = q(x_1).dx = \frac{q}{c} * x_1} \qquad e \qquad \boldsymbol{dF_2 = dA_2 = q(x_2).dx = \frac{q}{b} * (L - x_2)}$$

Logo:

$$\boldsymbol{F_R * \overline{x_m}} = \int_0^c x_1 . \left(\frac{q}{c} x_1\right) . dx + \int_c^L x_2 . \left[\frac{q}{b} * (L - x_2)\right] . dx$$

$$\boldsymbol{F_R * \overline{x_m}} = \int_0^c \frac{q}{c} {x_1}^2 . dx + \int_c^L \frac{qL}{b} x_2 . dx - \int_c^L \frac{q}{b} {x_2}^2 . dx$$

$$\boldsymbol{F_R * \overline{x_m}} = \frac{q}{c} * \frac{{x_1}^3}{3}\Big]_0^c + \frac{qL}{b} * \frac{{x_2}^2}{2}\Big]_c^L - \frac{q}{b} * \frac{{x_2}^3}{3}\Big]_c^L$$

$$\boldsymbol{F_R * \overline{x_m}} = \frac{q}{3c}(c^3 - 0^3) + \frac{qL}{2b}(L^2 - c^2) - \frac{q(L^3 - c^3)}{3b}$$

$$\boldsymbol{F_R * \overline{x_m}} = \frac{qc^3}{3c} + \frac{qL(L^2 - c^2)}{2b} - \frac{q(L^3 - c^3)}{3b}, \quad mas \quad b = (L - c), \quad logo$$

$$\boldsymbol{F_R} * \overline{\boldsymbol{x_m}} = \frac{qc^2}{3} + \frac{qL(L^2 - c^2)}{2(L-c)} - \frac{q(L^3 - c^3)}{3(L-c)}$$

$$\boldsymbol{F_R} * \overline{\boldsymbol{x_m}} = \frac{qc^2}{3} + \frac{qL(L-c)(L+c)}{2(L-c)} - \frac{q(L-c)(L^2 + Lc + c^2)}{3(L-c)} \qquad simplificando, fica$$

$$\boldsymbol{F_R} * \overline{\boldsymbol{x_m}} = \frac{qc^2}{3} + \frac{qL(L+c)}{2} - \frac{q(L^2 + Lc + c^2)}{3}$$

$$\boldsymbol{F_R} * \overline{\boldsymbol{x_m}} = \frac{2qc^2 + 3qL^2 + 3qLc - 2qL^2 - 2qLc - 2qc^2}{6}$$

$$\boldsymbol{F_R} * \overline{\boldsymbol{x_m}} = \frac{qL^2 + qLc}{6} = \frac{\boldsymbol{qL(L+c)}}{\boldsymbol{6}}$$

Isolando ($\overline{\boldsymbol{x_m}}$) e substituindo o valor (F_R) da resultante obtido na letra b, temos:

$$\overline{\boldsymbol{x_m}} = \frac{\frac{qL(L+c)}{6}}{F_R} = \frac{\frac{qL(L+c)}{6}}{\frac{qL}{2}} = \frac{qL(L+c)}{6} * \frac{2}{qL} \Rightarrow \qquad \overline{\boldsymbol{x_m}} = \frac{\boldsymbol{(L+c)}}{\boldsymbol{3}}$$

Onde:

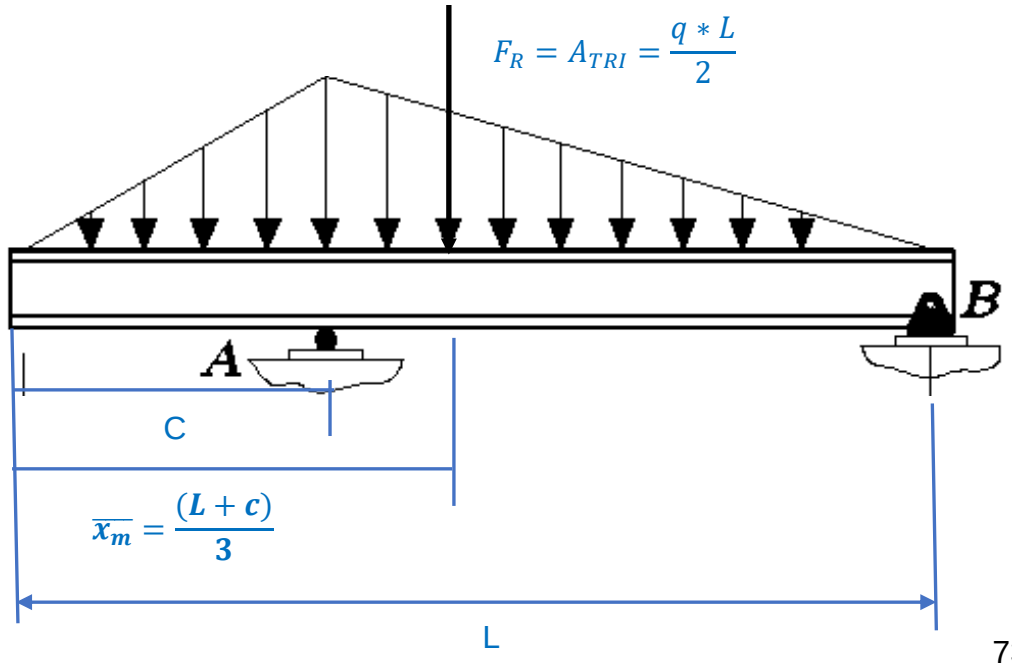
$\overline{\boldsymbol{x_m}} \rightarrow$ é *o ponto de aplicação da resultante partindo do inicio do menor triângulo*

$L \rightarrow$ é *o comprimento total do carregamento*

$c \rightarrow$ *comprimento do carregamento do menor triângulo*

c) Viga equivalente:

Figura 83: Viga Equivalente

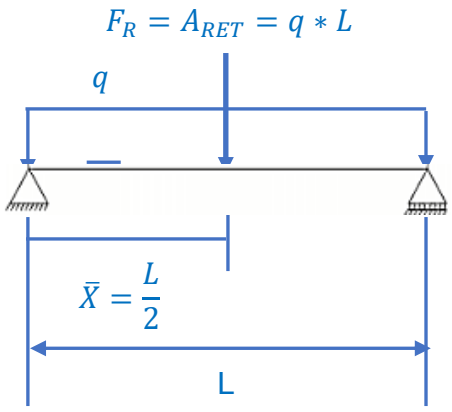
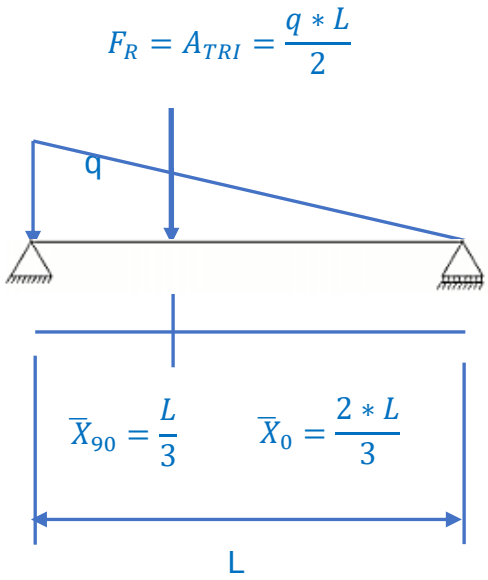


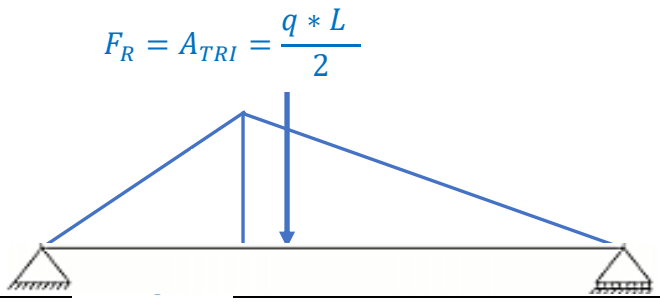
Adaptado de: engenheiraco.blogspot.com

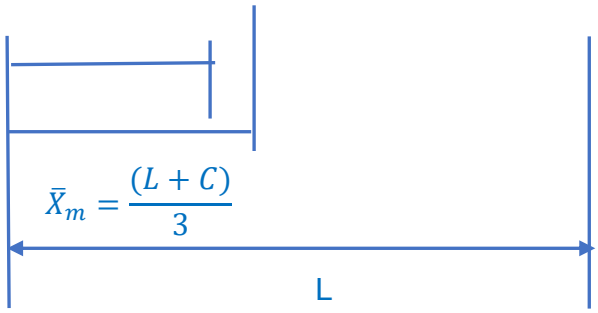
Estes resultados foram obtidos para um carregamento genérico, assim são válidos para qualquer carregamento triangular duplo.

Usando os resultados obtidos vamos construir uma tabela mostrando as expressões para calcular a força resultante e o seu ponto de aplicação para os carregamentos distribuídos mais frequentes.

TABELA 01

<table>
<tr><td>Carregamento Uniformemente Distribuído (Retangular)</td><td>Carregamento linearmente Distribuído (Triangular tipo 1)</td></tr>
<tr><td> 
</td><td> 

• $\bar{X}_{90} \rightarrow medido\ a\ partir\ do\ \hat{a}ngulo\ de\ 90°$
• $\bar{X}_0 \rightarrow medido\ a\ partir\ do\ \hat{a}ngulo\ 0°$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Carregamento triangular tipo 2</td></tr>
<tr><td colspan="2"> 
</td></tr>
</table>



Onde:

$\overline{x_m}$

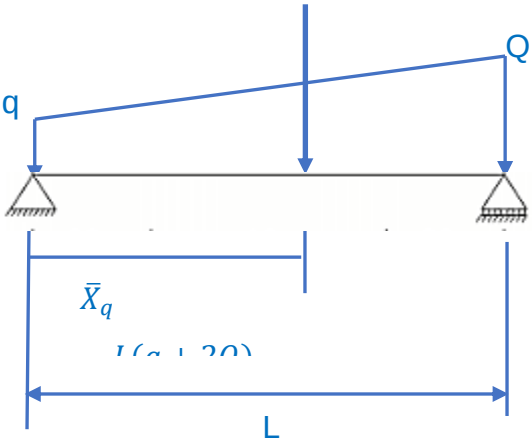
→ é *o ponto de aplicação da resultante partindo do inicio do menor triângulo*

$L \rightarrow$ é *o comprimento total do carregamento*

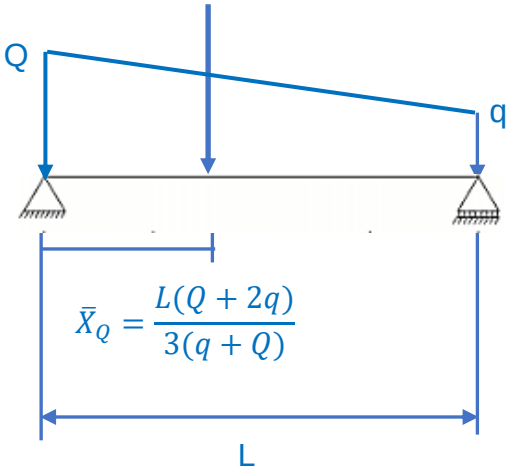
$C \rightarrow$ *comprimento do carregamento (base) do menor triângulo*

Carregamento Trapezoidal Tipo 1

$$F_R = A_{TRAP} = \frac{(Q+q)*L}{2}$$



$$F_R = A_{TRAP} = \frac{(Q+q)*L}{2}$$



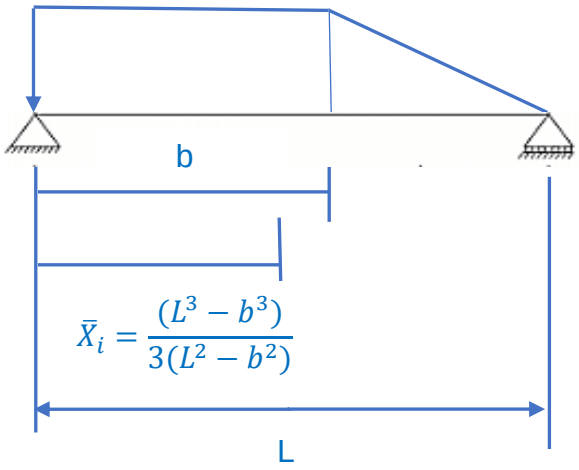
(A diferença é que no numerador a carga a partir da qual estamos medindo a distância $\overline{X}$ de aplicação da resultante nunca é multiplicada por 2)

Carregamento trapezoidal tipo 2

$$F_R = A_{TRAP} = \frac{(L+b)*q}{2}$$

q





$\boldsymbol{q} \rightarrow$ $valor\ do\ carregamento\ uniformemente\ distribuído$

$\boldsymbol{\bar{x}_i} \rightarrow$ é $o\ ponto\ de\ aplicação\ da\ resultante\ partindo\ do\ inicio\ do\ carreg.retangular$

$\boldsymbol{L} \rightarrow$ é $o\ comprimento\ total\ do\ carregamento$

$\boldsymbol{b} \rightarrow$ $comprimento\ do\ carregamento\ uniformemente\ distribuído\ (retangular)$

Fonte: autor

Portanto, para encontrar o valor ($\boldsymbol{F_R}$) da resultante de um carregamento distribuído e a coordenada $\bar{\boldsymbol{x}}$ do seu ponto de aplicação podemos adotar o seguinte roteiro de cálculo

a) Se o carregamento dado constar na tabela 01 acima use as equações pertinentes dadas na tabela

b) Quando o carregamento dado não constar na tabela acima use a decomposição de área se o carregamento formar uma área poligonal, porém se o carregamento formar uma área curva siga os seguintes passos

b.1) Se a função q(x) que define o carregamento não for dada o primeiro passo será encontrá-la e depois aplicar a eq.10 para encontrar o valor ($\boldsymbol{F_R}$) da força resultante

$$\boldsymbol{F_R = A = \int_0^L q(x)\,dx} \qquad \textbf{eq. 10} \qquad \textbf{item } (4.1.4.2.1)$$

b.2) Para encontrar a coordenada $(\overline{\boldsymbol{x}})$ do ponto de aplicação da resultante resolva isoladamente o numerador da eq.17 mostrada abaixo

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{\int_0^L \boldsymbol{x}.\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{F_R}} \qquad \boldsymbol{eq.17} \qquad \boldsymbol{item}\ (\mathbf{4.1.4.2.2})$$

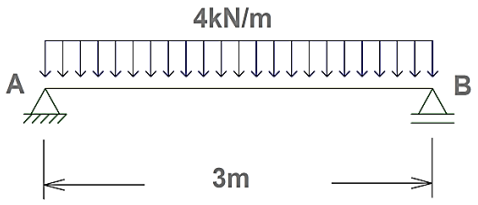
b.3) Substitua, na eq.17, os valores encontrados em b.1 e b.2 e em seguida resolva a divisão

b.4) Desenhe a viga equivalente mostrando a força resultante $\overrightarrow{\boldsymbol{FR}}$ e o ponto $\overline{\boldsymbol{x}}$ onde ela está aplicada

Acompanhe os exemplo numéricos a seguir resolvidos usando o roteiro descrito acima

1°) Encontre o valor da força resultante, o seu ponto de aplicação e represente a viga equivalente para o carregamento uniformemente distribuído mostrado abaixo.

Figura 84: Exemplo 1



Fonte: autor

RESP:

Usando a tabela 01 temos

a) Valor (F_R) da força resultante.

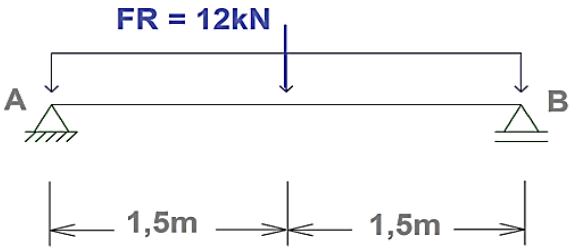
$$\boldsymbol{F_R} = \boldsymbol{A_{Ret}} = (q * L) = (4 * 3) = \mathbf{12\ KN}$$

b) Ponto $\overline{\boldsymbol{x_A}}$ de aplicação da resultante em relação ao apoio **A**

$$\overline{\boldsymbol{x_A}} = \frac{L}{2} = \frac{3}{2} = \mathbf{1,5\ m}$$

c) Viga equivalente

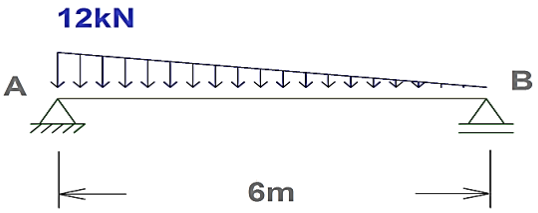
Figura 85: Viga equivalente



Fonte: autor

2°) Encontre o valor da força resultante, o seu ponto de aplicação e represente a viga equivalente para o carregamento triangular mostrado abaixo.

Figura 86: Exemplo 2



Fonte: autor

RESP:

Usando a tabela 01, temos:

a) Valor F_R da força resultante

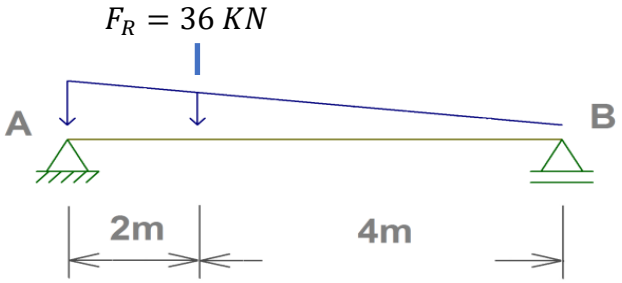
$$\boldsymbol{F_R = A_{Tri}} = \frac{q * L}{2} = \frac{12 * 6}{2} = \boldsymbol{36\ KN}$$

b) Ponto de aplicação em relação ao ângulo de 90°

$$\boldsymbol{\bar{x}_{90}} = \frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{3}} = \frac{6}{3} = \boldsymbol{2\ m}$$

c) Viga equivalente

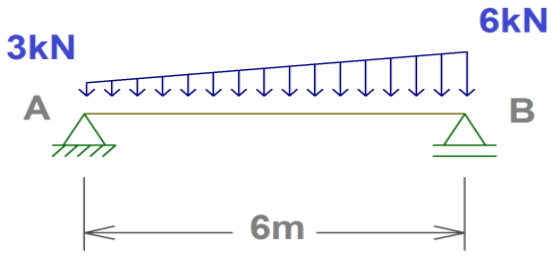
Fig. 87: Viga equivalente



Fonte: autor

3°) Encontre o valor da força resultante, o seu ponto de aplicação e represente a viga equivalente para o carregamento trapezoidal tipo 1 mostrado abaixo.

Figura 88: Exemplo 3°



Fonte: autor

RESP:

Usando a tabela 01, temos

a) Valor F_R da força resultante

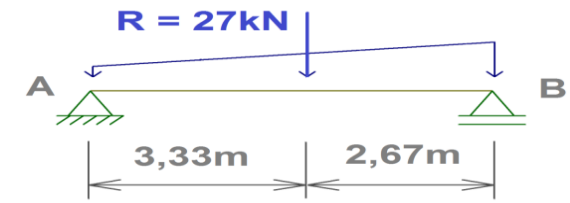
$$\boldsymbol{F_R = A_{Trap} = \frac{(Q+q)*L}{2} = \frac{(6+3)*6}{2} = 27\ KN}$$

b) Ponto de aplicação em relação a carga mínima q:

$$\boldsymbol{\overline{X_q} = \frac{L(q+2Q)}{3(q+Q)} = \frac{6*(3+2*6)}{3(3+6)} = 3,33\ m}$$

c) Viga equivalente:

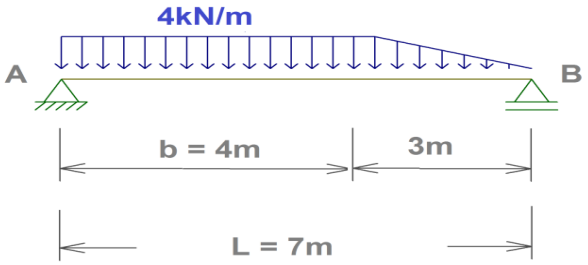
Figura 89: Viga equivalente



Fonte: autor

4°) Encontre o valor da força resultante, o seu ponto de aplicação e represente a viga equivalente para o carregamento trapezoidal tipo 1 mostrado abaixo.

Figura 90: Exemplo 4°



Fonte: autor

RESP:

Usando a tabela 01, temos

a) Valor F_R da força resultante

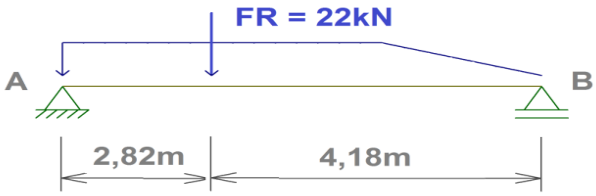
$$\boldsymbol{F_R = A_{Trap} = \frac{(L+b)*q}{2} = \frac{(7+4)*4}{2} = 22\ KN}$$

b) Ponto de aplicação em relação ao início do carregamento retangular

$$\boldsymbol{\overline{X_i} = \frac{(L^3 - b^3)}{3(L^2 - b^2)} = \frac{(7^3 - 4^3)}{3(7^2 - 4^2)} = 2,82\ m}$$

c) Viga equivalente:

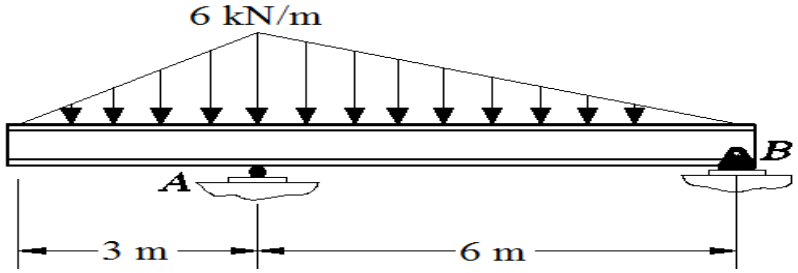
Figura 91: Viga equivalente



Fonte: autor

5°) Encontre o valor da força resultante, o seu ponto de aplicação e represente a viga equivalente para o carregamento triangular duplo mostrado abaixo.

Figura 92: Exemplo 5°



Fonte: engenheiraco.blogspot.com

RESP:

Usando a tabela 01, temos:

a) Valor ($\boldsymbol{F_R}$) da força resultante

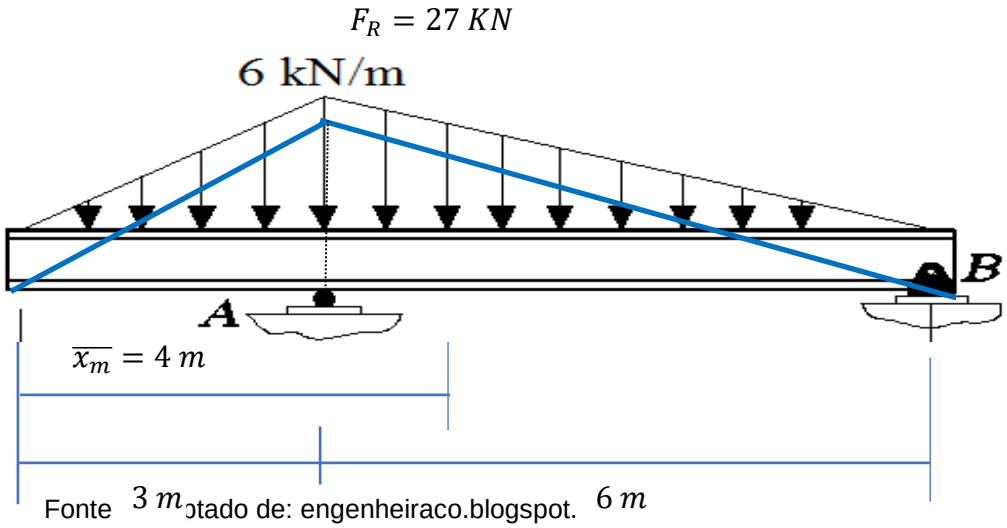
$$\boldsymbol{F_R = A_{Tri} = \frac{(q * L)}{2} = \frac{(6 * 9)}{2} = 27\ KN}$$

b) Ponto ($\boldsymbol{\overline{x_m}}$) de aplicação em relação ao início do menor triângulo

$$\boldsymbol{\overline{X_m} = \frac{L + c}{3} = \frac{9 + 3}{3} = \frac{12}{3} = 4\ m}$$

c) Viga equivalente

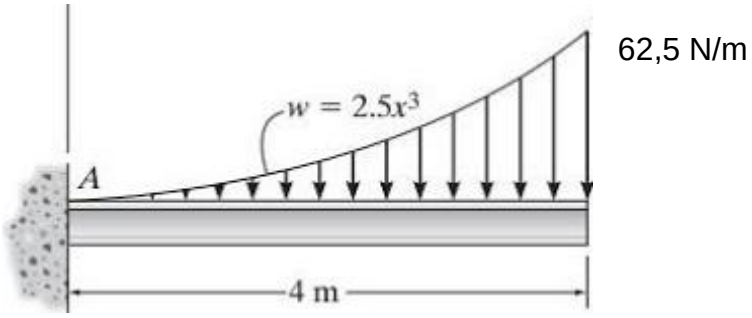
Figura 93: Viga equivalente



Fonte: Adaptado de: engenheiraco.blogspot.

6°) Encontre o valor da força resultante, o seu ponto de aplicação e represente a viga equivalente para o carregamento mostrado abaixo.

Figura 94: Exemplo 6



Fonte: Adaptada do livro Estática **(**Hibbeler)

RESP:

1) Valor $(\boldsymbol{F_R})$ da força resultante

Nesse caso, o carregamento não consta na tabela 01 e tem área **A** desconhecida, porém a função q(x) que o define foi dada, então devemos aplicar eq. 10 mostrada abaixo

$$\boldsymbol{F_R = A = \int_0^L q(x)\, dx} \qquad \boldsymbol{eq.10 \quad item\,(4.1.4.2.1)}$$

Logo:

$$\boldsymbol{F_R = A} = \int_0^L q(x)\, dx = \int_0^5 0{,}5\mathrm{x}^3\ \mathrm{dx} = 0{,}5\int_0^5 x^3\,\mathrm{dx} = \frac{0{,}5\mathrm{x}^4}{4}\,]_0^5$$

$$\boldsymbol{F_R} = \frac{0{,}5}{4}(5^4 - 0^4) = \frac{0{,}5 * 5^4}{4} = \frac{0{,}5 * 625}{4} = \boldsymbol{78{,}125\ KN}$$

2) Para encontrar o ponto $(\boldsymbol{\bar{X}})$ de aplicação da resultante em relação ao apoio A (origem do sistema) usamos a eq. 17 abaixo

$$\boldsymbol{\bar{x} = \frac{\int_0^L x\ *\ q(x)\, dx}{F_R}} \qquad \boldsymbol{eq.17 \quad item(4.1.4.2.2)}$$

Já conhecemos a o valor $\boldsymbol{F_R}$ da força resultante, assim vamos resolver o numerador isoladamente

$$\int_0^5 x * q(x)\, dx = \int_0^5 x * 0{,}5x^3 = 0{,}5\int_0^5 x^4\, dx = \frac{0{,}5\mathrm{x}^5}{5}\,]_0^5 = \frac{0{,}5}{5}(5^5 - 0^5) = \frac{0{,}5 * 5^5}{5}$$

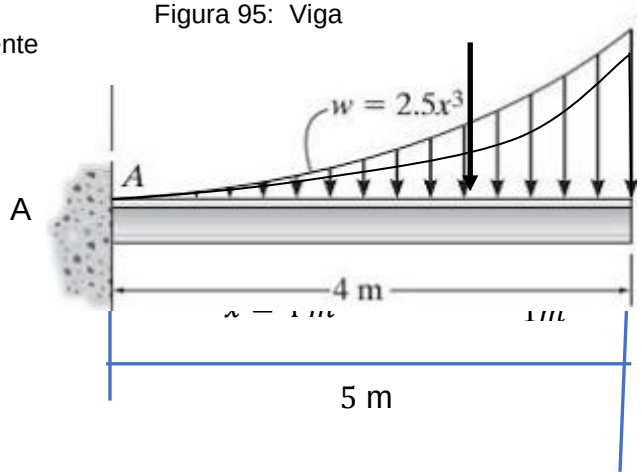
$$\int_0^5 x * q(x)dx = \frac{0{,}5 * 3125}{5} = 312{,}5\ KN.m$$

Substituindo, na eq. 17, os valores encontrados em 1 e 2, temos

$$\boldsymbol{\bar{x} = \frac{\int_0^L x\ *\ q(x)\, dx}{F_R}} = \frac{312{,}5}{78{,}125} = \boldsymbol{4\ m}$$

c) Viga equivalente

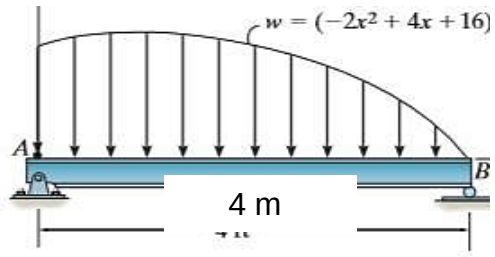
Figura 95: Viga equivalente



Fonte: Adaptada do livro Estática (Hibbeler)

7°) Calcule o valor ($\boldsymbol{F_R}$) da força resultante do carregamento distribuído mostra abaixo:

Figura 96 - Exemplo 7



Fonte: (brainly.com.br).

RESP:

1) Força resultante

Nesse caso, a área **A** do carregamento é desconhecida, porém foi dada a função que define o carregamento. Então devemos aplicar a eq. 10 dada abaixo

$$\boldsymbol{F_R = A = \int_0^L q(x)\,dx} \qquad \textbf{eq. 10}, \qquad \textbf{item } (4.1.4.2.1)$$

Logo:

$$\boldsymbol{F_R = A = \int_0^L w(x)\,dx = \int_0^4 (-2x^2 + 4x + 16)\,dx = \frac{-2x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + 16x\Big]_0^4}$$

$$\boldsymbol{F_R = \frac{-2}{3}(4^3 - 0^3) + \frac{4}{2}(4^2 - 0^2) + 16(4 - 0) \quad \therefore \quad F_R = 53,33\ KN}$$

2) ponto $\bar{x}$ de aplicação da resultante

Aplicando a eq. 17, temos

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{\int_0^{\mathbf{L}} \boldsymbol{x} * \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{F_R}} \qquad \mathbf{eq.17} \quad \mathbf{item(4.1.4.2.2)}$$

Já conhecemos a o valor $\boldsymbol{F_R}$ da força resultante, assim vamos resolver o numerador isoladamente

$$\int_0^4 x * q(x)\, dx = \int_0^4 x.(-2\mathrm{x}^2 + 4\mathrm{x} + 16)\, \mathrm{dx} = \int_0^4 (-2\mathrm{x}^3 + 4x^2 + 16\mathrm{x})\, \mathrm{dx}$$

$$= \frac{-2x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + \frac{16x^2}{2} = \frac{-x^4}{2} + \frac{4x^3}{3} + 8x^2]_0^4$$

$$= \frac{-1}{2}(4^4 - 0^4) + \frac{4}{3}(4^3 - 0^3) + 8(4^2 - 0^2)$$

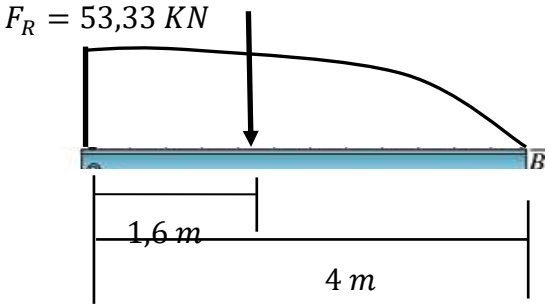
$$= (-128 + \frac{256}{3} + 128 = \mathbf{\frac{256}{3}}$$

Substituindo, na eq. 17, os valores encontrados em 1 e 2, temos

$$\overline{\boldsymbol{x_A}} = \frac{\int_0^{\mathbf{L}} \boldsymbol{x} * \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{F_R}} = \frac{\frac{256}{3}}{53{,}33} = \frac{256}{3} * \frac{1}{53{,}33} = \mathbf{1{,}60\ m}$$

3) Viga equivalente

Figura 97- Exemplo 7



Adaptado de brainly.com.br

5.8 Valor e ponto (x) de aplicação da força resultante, de composição de áreas, para os carregamentos distribuído

Podemos encontrar o valor ($\boldsymbol{F_R}$) da resultante e o seu ponto ($\bar{\mathbf{x}}$) de aplicação para carregamentos distribuídos que formam áreas poligonais decompondo a área

(A) do carregamento em retângulos e triângulos e usando as equações abaixo para calcular e localizar a resultante de cada carregamento e assim trabalharmos como num sistema discreto

a) Força resultante

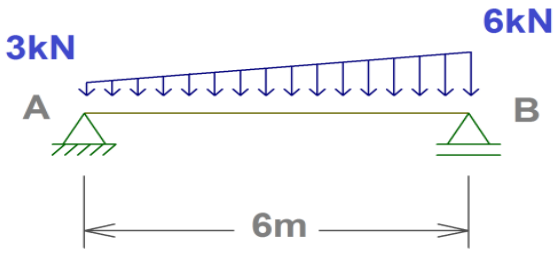
- $\boldsymbol{F_R = A_1 + A_2 + A_3 \ldots = F_{R1} + F_{R2} + F_{R3} \ldots}$ $\quad \boldsymbol{eq.05} \quad \boldsymbol{item\ (4.1.4.1.1)}$

b) Ponto $(\bar{x})$ de aplicação da resultante

- $\boldsymbol{\bar{x} = \dfrac{F_{R1} * x_1 + F_{R2} * x_2 + F_{R3} * x_3 \ldots + F_{Rn} * x_n}{F_{R1} + F_{R2} + F_{R3} \ldots + F_{Rn}}}$ $\quad \boldsymbol{eq.09} \quad \boldsymbol{item\ (4.1.4.1.2)}$

1°) Veja a seguir a resolução do carregamento trapezoidal tipo 1 do exemplo 3 do item anterior usando a decomposição de áreas

Figura 98: Exemplo 1°

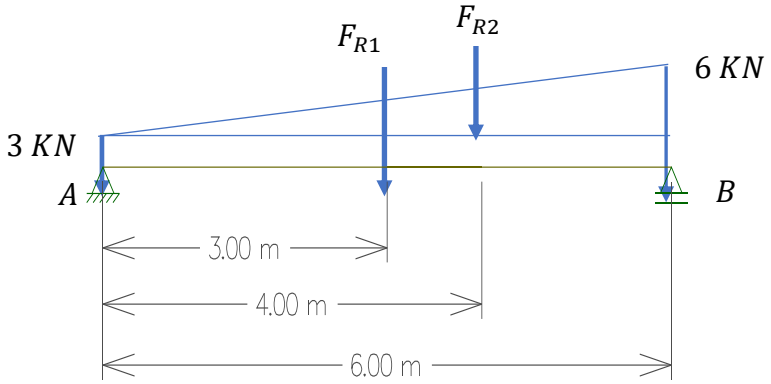


Fonte: autor

RESP

a) Decompondo o trapézio em um retângulo e em um triângulo e calculando e posicionando a resultante correspondente a cada área obtida:

Figura 99: Exemplo 1



Fonte: autor

$$\boldsymbol{F_{R1} = A_{Ret} = (6 * 3) = 18\ KN} \qquad \boldsymbol{\overline{x_{1,A}} = \frac{6}{2} = 3\ m}$$

$$\boldsymbol{F_{R2} = A_{Tri} = \frac{[6 * (6 - 3)]}{2} = 9\ KN} \qquad \boldsymbol{\overline{x_{2,A}} = \frac{2 * 6}{3} = 4\ m}$$

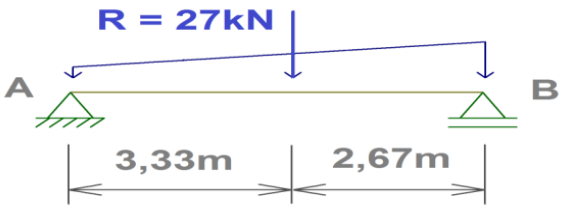
b) Ponto de aplicação $(\overline{x_A})$ da resultante total em relação ao apoio A

Agora resolvemos como um sistema discreto aplicando a equação 09 do item (4.1.4.1.2)

$$\boldsymbol{\overline{X_A} = \frac{F_{R1} * \overline{x}_1 + F_{R2} * \overline{x}_2}{F_{R1} + F_{R2}} = \frac{18 * 3 + 9 * 4}{18 + 9} = \frac{90}{27} = 3,33\ m}$$

c) viga equivalente

Figura 100 - Viga equivalente

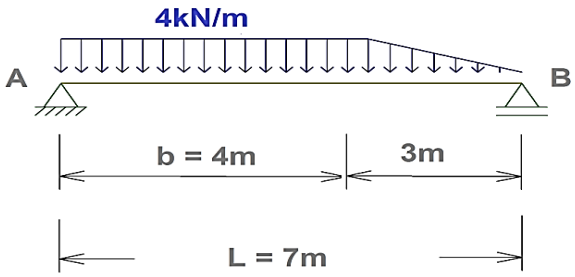


Fonte: autor

Observe que esse resultado é igual ao obtido anteriormente usando as fórmulas.

2°) Veja a seguir a resolução do carregamento trapezoidal tipo 2 do exemplo 4 do item anterior usando a decomposição de áreas.

Figura 101: Exemplo 2°

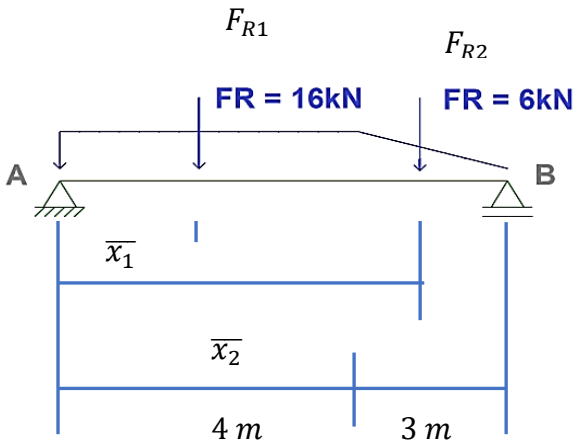


Fonte: autor

RESP:

a) Decompondo o trapézio em um retângulo e em um triângulo e calculando e posicionando a resultante correspondente a cada área obtida.

Fig. 102: Exemplo 3



Fonte: autor

$$\boldsymbol{F_{R1} = A_{Ret} = (4 * 4) = 16\ KN} \qquad \boldsymbol{\overline{x_{1,A}} = \frac{4}{2} = 2\ m}$$

$$\boldsymbol{F_{R2} = A_{Tri} = \frac{4 * 3}{2} = 6\ KN} \qquad \boldsymbol{\overline{x_{2,A}} = 4 + \frac{L_{Tri}}{3} = 4 + \frac{3}{3} = 5\ m}$$

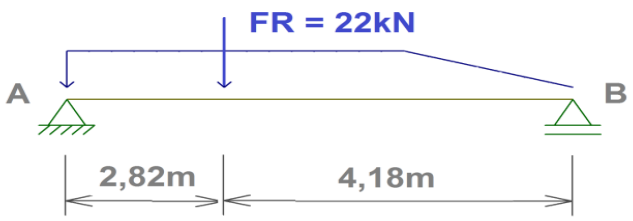
b) Ponto de aplicação da resultante em relação ao apoio A

Agora resolvemos como um sistema discreto aplicando a eq. 09 do item (4.1.4.1.2).

$$\boldsymbol{\overline{X_A} = \frac{F_{R1} * X_1 + F_{R2} * X_2}{F_{R1} + F_{R2}}} = \frac{16 * 2 + 6 * 5}{22} = \frac{62}{22} = \boldsymbol{2,82\ m}$$

b) Viga equivalente

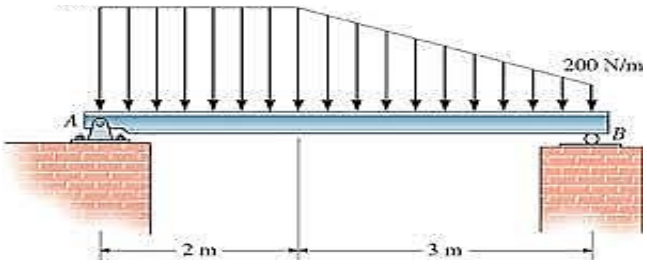
Figura 103- Viga equivalente



Fonte: autor

3°) Determine o valor da força resultante e seu ponto de aplicação para o carregamento abaixo.

Figura 104- Exemplo 3

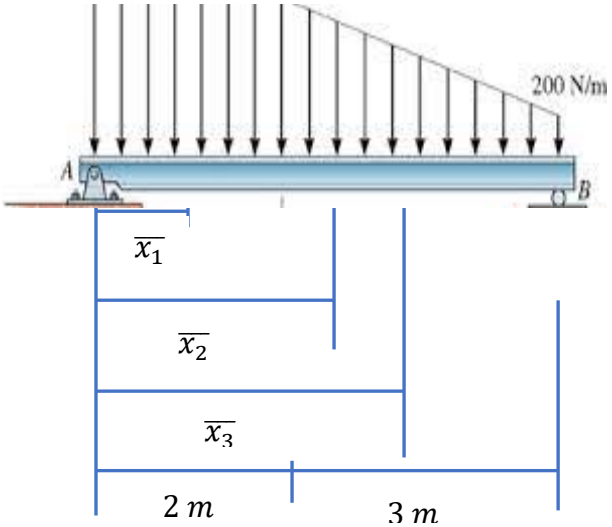


Fonte: Joinville.ifsc.edu.br

RESP:

a) Decompondo o trapézio em dois retângulos e em um triângulo e calculando e posicionando a resultante correspondente a cada área obtida

Figura 105: Exemplo 3°



Fonte: Adaptado de: Joinville.ifsc.edu.br

$$\boldsymbol{F_{R,1} = A_1 = } \ (800 * 2) = \boldsymbol{1600\ N} \qquad \overline{\boldsymbol{x_1}} = \frac{2}{2} = \boldsymbol{1\ m}$$

$$\boldsymbol{F_{R,2} = A_2 = } \frac{3 * (800 - 200)}{2} = \boldsymbol{900\ N} \qquad \overline{\boldsymbol{x_{,2}}} = \boldsymbol{2} + \frac{\boldsymbol{L_{Tri}}}{\boldsymbol{3}} = 2 + \frac{3}{3} = \boldsymbol{3\ m}$$

$$\boldsymbol{F_{R,3} = A_3 = } (3 * 200) = \boldsymbol{600\ N} \qquad \overline{\boldsymbol{x_{,2}}} = \boldsymbol{2} + \frac{\boldsymbol{L_{Ret,2}}}{\boldsymbol{3}} = 2 + \frac{3}{2} = \boldsymbol{3,5\ m}$$

b) Ponto de aplicação da resultante em relação ao apoio A

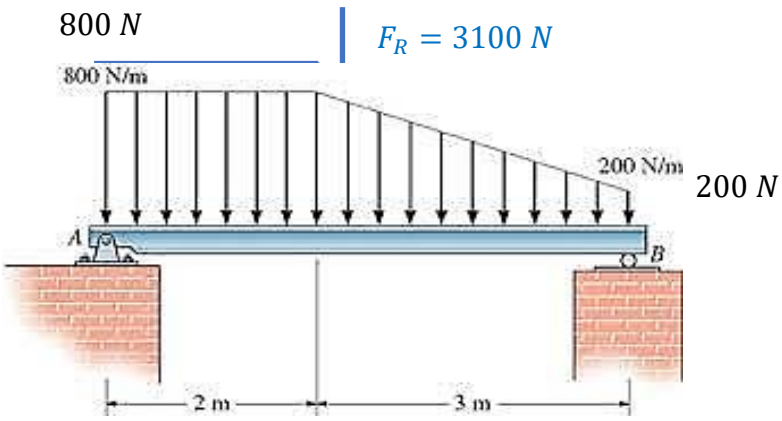
Agora resolvemos como um sistema discreto aplicando a equação 09 do item (4.1.4.1.2).

$$\overline{\boldsymbol{X_A}} = \frac{\boldsymbol{F_{R,1} * \overline{x_1} + F_{R,2} * \overline{x_2} + F_{R,3} * \overline{x_3}}}{\boldsymbol{F_{R,1} + F_{R,2} + F_{R,3}}} = \frac{1600 * 1 + 900 * 3 + 600 * 3{,}5}{1600 + 900 + 600} = \frac{6400}{3100}$$

$$\overline{\boldsymbol{X_A}} = \boldsymbol{2,06\ m}$$

c) Viga equivalente

Figura 106: - Viga equivalente



Fonte: Adaptado de: Joinville.ifsc.edu.br

Portanto, para encontrar o valor F_R e o ponto de aplicação da resultante de carregamentos distribuídos tenha sempre em mente o seguinte:

• Use a tabela 01 do item 5.1.4.2

• Para carregamentos poligonais que não constem na tabela 01 e que possam ser decompostos em triângulos e retângulos use a decomposição de áreas.

• Para carregamentos formando áreas curvas definidas por uma função q(x) qualquer use a integração aplicando as equações abaixo.

$$\boldsymbol{A)\ F_R = A = \int_0^L q(x)\,dx} \qquad \boldsymbol{eq.12\ \ item\ \ (4.1.4.2.1)}$$

$$\mathbf{B)}\ \boldsymbol{\overline{x} = \frac{\int_0^L x\ *\ q(x)\,dx}{F_R}} \qquad \mathbf{eq.17 \quad item\ (4.1.4.2.2)}$$

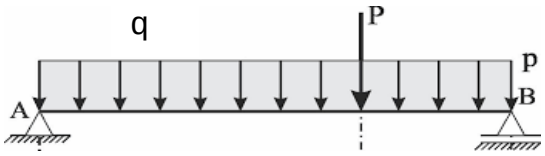
Saber calcular o valor, o ponto de aplicação da força resultante e também representar o sistema equivalente é necessário para calcular reações de apoios sempre que algum carregamento distribuído estiver presente.

5.5 Carregamentos combinados

São aqueles formados por uma combinação de carregamentos concentrados e distribuídas.

Na figura abaixo vemos a representação de um carregamento combinado formado por um carregamento q uniformemente distribuído e por uma carga concentrada p

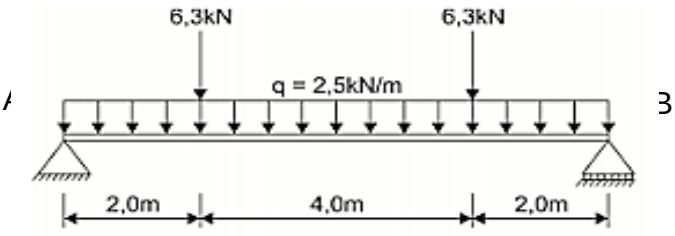
Figura 107: Carregamento



Fonte: internet(docplayer.com.br)

1°) Encontre o valor F_R, o ponto $\bar{X}$ de aplicação da força resultante e mostre a viga equivalente para a estrutura representada abaixo.

Figura 108: Exemplo 1°



Fonte: internet(questõesgratis)

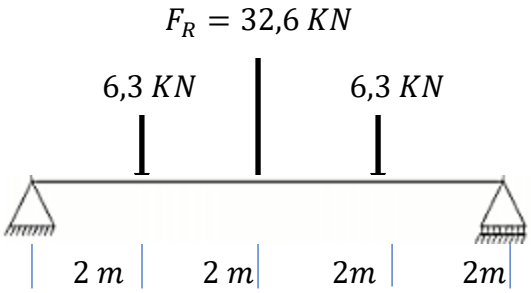
RESP:

a) Valor $\boldsymbol{F_R}$ e ponto $\overline{x_A}$ de aplicação da resultante do carregamento uniformemente distribuído

$$\boldsymbol{F_R = A_{Ret} = 32,6\ KN}\ , \qquad \boldsymbol{\overline{x_A} = \frac{8}{2} = 4\ m}$$

b) Localizando as forças concentradas sobre a viga

Figura 109: Exemplo 1°



Fonte: autor

Agora observando a figura e aplicando a eq.09 resolvemos como um sistema discreto de forças coplanares e paralelas

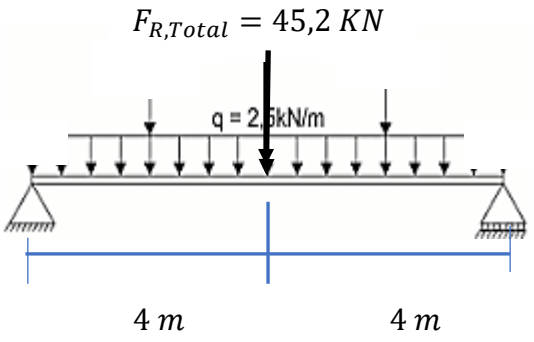
$$\boldsymbol{\overline{x} = \frac{F_1 * x_1 + F_2 * x_2 + F_3 * x_3 \ldots\ldots + F_n * x_n}{F_1 + F_2 + F_3 \ldots\ldots + F_n}} \qquad \boldsymbol{eq.09 \quad item\ (4.1.4.1.2)}$$

Portanto

$$\boldsymbol{\overline{x}_A = \frac{6,3 * 2 + * 32,6 * 4 + 6,3 * 6}{6,3 + 32,6 + 6,3} = \frac{180,8}{45,2} = 4\ m}$$

d) Viga equivalente

Figura110: Viga equivalente



Fonte: Autor

Portanto, a força resultante total vale 45,2 KN e está aplicada no meio da viga. Esse resultado era previsto, pois a estrutura é simétrica.

CAPÍTULO 6

6. EQUILÍBRIO ESTÁTICO NO PLANO E REAÇÕES DE APOIOS

6.1 Equilíbrio estático das estruturas no plano

No item 1.4 vimos que o equilíbrio de um corpo pode ser dinâmico ou estático e que na engenharia civil estamos interessados em garantir o equilíbrio estático das estruturas. Vimos também que a condição para que um corpo entre e ou permaneça em equilíbrio é que a soma das forças que agem sobre ele seja nula ($(\sum F = 0)$.

No item (3.1.2) aprendemos que no plano (X, Y) existem três possibilidades de movimento que são: translação na direção x, translação na direção y e um momento (giro) em torno do eixo z, eixo saindo da folha do papel. Assim para garantir o equilíbrio estático de uma estrutura no plano é necessário impedir aqueles três possíveis movimentos, portanto a força resultante em cada direção deve ser nula e a soma dos momentos em torno do eixo Z em relação a qualquer ponto também deve se nula satisfazendo simultaneamente as três equações abaixo.

$$\sum F_H = 0 \ \ (somatório\ das\ forças\ horizontais\ igual\ a\ ZERO)$$

$$\sum F_V = 0 \ \ (somatório\ das\ forças\ verticais\ igual\ a\ ZERO)$$

$$\sum M = 0\ (soma\ dos\ momentos\ em\ relação\ a\ qualquer\ ponto\ ou\ eixo\ igual\ a\ ZERO)$$

As três equações acima garantem o equilíbrio das estruturas no plano e são conhecidas como “equações de equilíbrio” ou ainda como “as três equações da estática”. São elas que iremos utilizar no cálculo das reações de apoios das estruturas isostáticas. Mais adiante conceituaremos “estruturas isostáticas”.

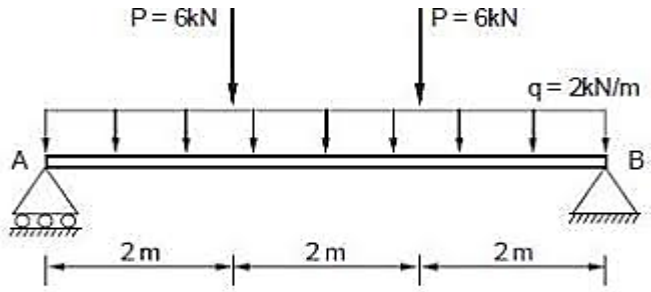
Adaptado de: Leet, Kenneth; Uang, Chia-ming e Anne, Gilbert 2009.

6.2 Diagrama de corpo livre inicial (DCLI) e final (DCLF)

Diagrama de corpo livre inicial (DCL INICIAL) é um desenho usado no cálculo das reações de apoios no qual representamos a estrutura pelo seu eixo médio mostrando todas as forças externas que atuam sobre ela, tais como, cargas concentradas, forças resultantes de carregamentos distribuídos e as reações de apoios.

Abaixo estão representados uma viga sob um carregamento combinado e o correspondente DCL inicial.

Figura 111: Viga AB

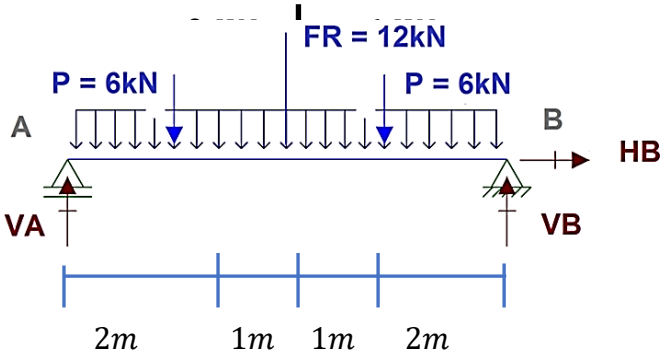


Fonte: internet(aprovaconcurso.com.br)

DCL inicial

Figura 112: DCL inicial da viga AB

$$F_R = 12\ KN$$



Fonte: autor

• V_A→ reação vertical no apoio A, V_B→ reação vertical no apoio B, H_B→ reação horizontal no apoio B, FR→ resultante do carregamento uniformemente distribuído

Nessa apostila, vamos adotar como positivos os sentidos para a direita e para cima, assim as reações de apoios a serem calculadas serão sempre desenhadas nesses sentidos como mostrado no DCL inicial acima, então se uma reação resultar negativa ela deverá ser desenhada com sentido contrário no DCL final

Os momentos (giros) são positivos no sentido anti-horário e se o resultado for negativo devem ser desenhados no sentido horário no DCL final.

Diagrama de corpo livre final (DCL final é um desenho feito após o cálculo das reações mostrando a estrutura com o carregamento inicial e todas as reações aplicadas com os valores e os sentidos corretos.

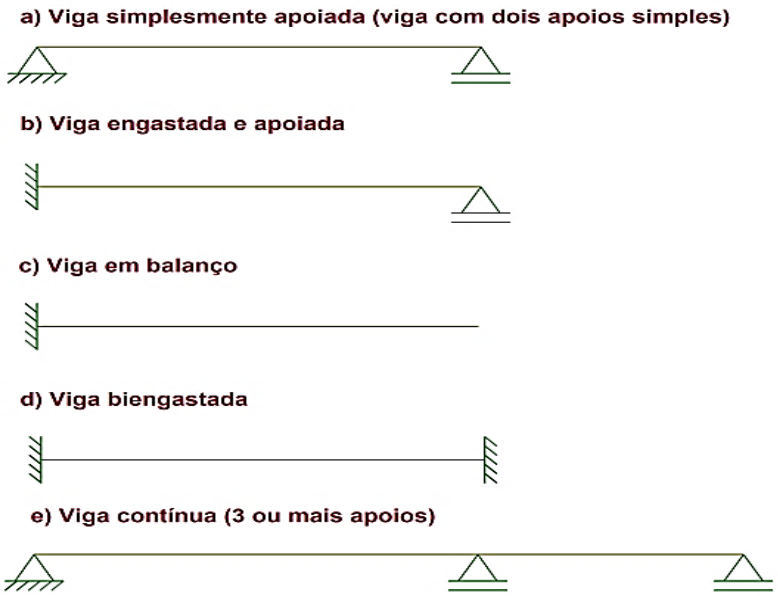
6.3 Vigas

As vigas são os elementos estruturais lineares mais simples de todos sendo constituídas por uma única barra e geralmente projetadas para suportar cargas transversais ao próprio eixo longitudinal.

6.4 Tipos mais frequentes de vigas quanto as condições de apoio

Quanto as condições de apoio os tipos de vigas que aparecem com maior frequência são mostrados abaixo.

Figura 113: Frequentes condições de apoio



Fonte: autor

Nesta apostila vamos estudar as vigas simplesmente apoiadas e as vigas em balanço sempre adotando como positivos, para o cálculo das reações de apoios, o giro no sentido anti-horário e os sentidos para a direita e para cima

6.5 Roteiro para o cálculo de reações de apoios

Para calcular as reações de apoios de uma estrutura devemos construir o DCL inicial e em seguida aplicar as equações de equilíbrio da estática (item 6.1) mostradas abaixo

$$\sum F_H = 0 \ (somatório\ das\ forças\ horizontais\ igual\ a\ ZERO)$$

$$\sum F_V = 0 \ (somatório\ das\ forças\ verticais\ igual\ a\ ZERO)$$

$\sum M = 0 (soma\ dos\ momentos\ em\ relação\ a\ qualquer\ ponto\ ou\ eixo\ igual\ a\ ZERO)$

Depois representamos a estrutura resolvida construindo o DCL final mostrando a estrutura com o carregamento inicial e as reações desenhadas com os valores e os sentidos corretos.

6.6 Reações de apoios para vigas em balanço

1°) Calcule as reações de apoios para a viga em balanço abaixo e mostre o DCL final.

Figura114: Exemplo 1°

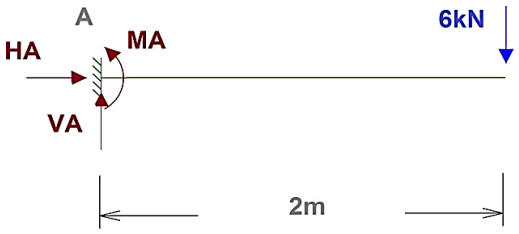


Fonte: autor

RESP:

DCL inicial

Figura 115: Exemplo 1°



Fonte: autor

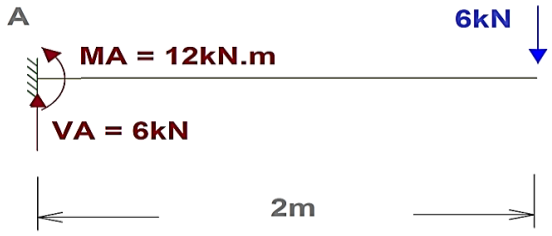
Aplicando as equações de equilíbrio da estática, vem:

$\sum F_H = 0 \therefore \boldsymbol{H_A = 0\ KN}$ (Não existe força aplicada na direção horizontal)

$\sum M_A = 0 \ \therefore \ MA - 6 * 2 = 0 \ \Rightarrow MA - 12 = 0 \ \Rightarrow \boldsymbol{MA = 12\ KN.m}$

$\sum F_V = 0 \quad \therefore \ V_A - 6 = 0 \ \Rightarrow \ \boldsymbol{V_A = 6\ KN}$

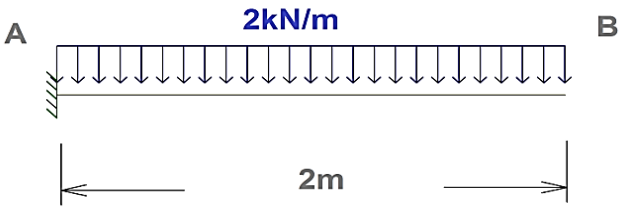
Figura 116: Exemplo 1



Fonte: autor

2°) Calcule as reações de apoios para a viga em balanço abaixo e mostre o DCL final

Figura 117: Exemplo 2°



Fonte: autor

RESP:

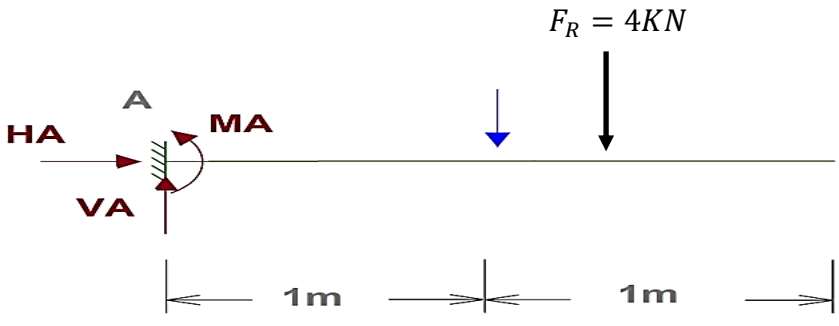
DCL inicial:

Dos exemplos anteriores e da tabela 01 (item 5.1.4.2.2), vem:

a) $\boldsymbol{F_R = A_{Ret} = 2 * 2 = 4\ KN}$

b) $\overline{X_A}$ = L / 2 = 2 / 2 = **1 m**

Figura 118:



Fonte: autor

Aplicando as equações de equilíbrio da estática, vem:

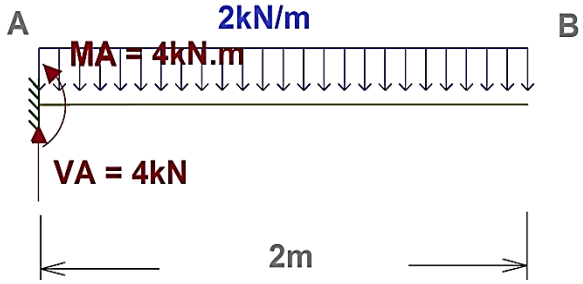
$$\sum F_H = 0 \therefore H_A = 0 \Rightarrow \boldsymbol{H_A = 0\ KN}$$

$$\sum M_A = 0 \therefore MA - 4 * 1 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{MA = 4\ KN.m}$$

$$\sum F_V = 0 \therefore V_A - FR = 0 \Rightarrow V_A - 4 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{V_A = 4\ KN}$$

DCL final:

Figura 119: Exemplo 2°



Fonte: autor

6.7 Reações de apoios em vigas simplesmente apoiadas exclusivamente sob cargas concentradas (carregamento discreto)

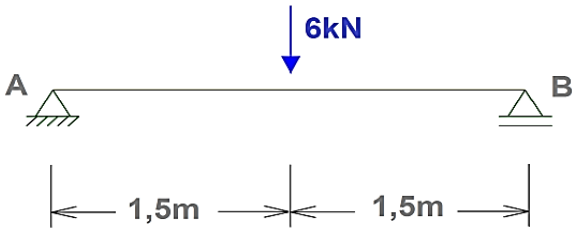
Em vigas simplesmente apoiadas é conveniente sempre calcular os momentos em relação ao apoio que apresenta um maior número de reações.

Veja a resolução dos exemplos a seguir

1°) Calcule as reações de apoios para a viga simplesmente apoiada abaixo e mostre o DCL final.

OBSERVAÇÃO: a estrutura é simétrica e quando isso ocorre as reações verticais são iguais e valem a metade da força resultante total.

Figura 120: Exemplo 1°

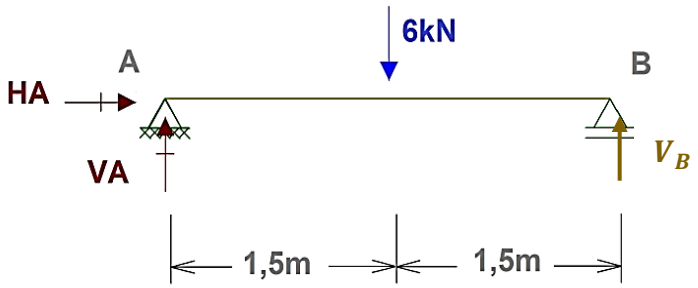


Fonte: autor

RESP:

DCL inicial:

Figura 121: Exemplo 1°



Fonte: autor

Aplicando as equações de equilíbrio estático, temos:

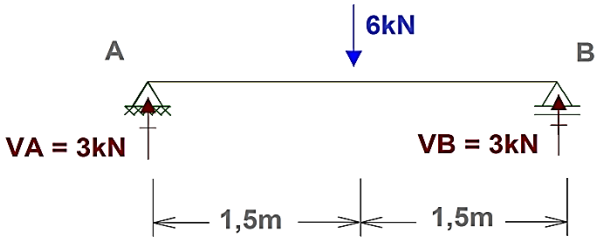
$$\sum F_H = 0 \ \therefore \ \boldsymbol{H_A = 0\ KN} (Não\ existem\ cargas\ externas\ horizontais)$$

$$\sum M_A = 0 \ \therefore \ 3V_A - 1{,}5 * 6 = 0 \ \Rightarrow 3V_A = 9 \ \Rightarrow \ \boldsymbol{V_A = 3KN}$$

$$\sum F_V = 0 \ \therefore \ V_A + V_B - 6 = 0 \ \Rightarrow 3 + V_B = 6 \ \Rightarrow \ \boldsymbol{V_B} = 6 - 3 = \boldsymbol{3KN}$$

DCL final

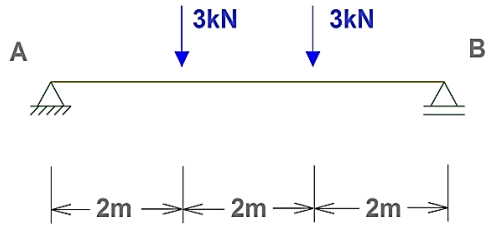
Figura 122: - Exemplo 1°



Fonte: autor

2°) Calcule as reações de apoios para a viga simplesmente apoiada abaixo e mostre o DCL final.

Figura 123: Exemplo 2°

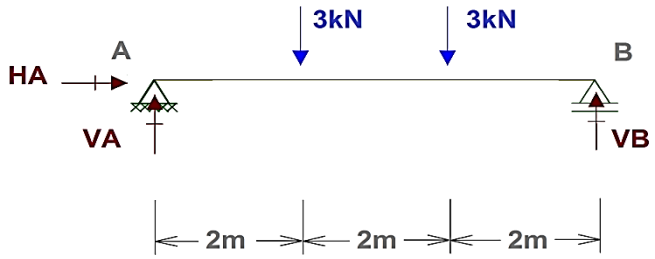


Fonte: autor

RESP:

DCL inicial:

Figura 124: Exemplo 2°



Fonte: autor

Aplicando as equações de equilíbrio estático, temos

$$\sum F_V = 0 \ \therefore \ \boldsymbol{H_A = 0\ KN}$$

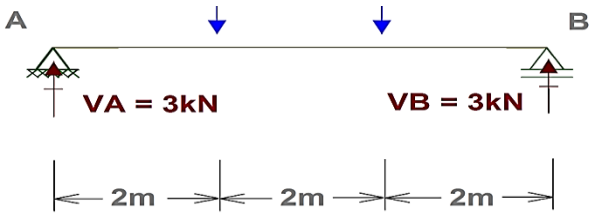
$$\sum M_A = 0 \ \therefore \ 6V_B - 3*4 - 3*2 = 0 \ \Rightarrow 6V_B - 18 = 0 \ \Rightarrow \ 6V_B = 18 \ \Rightarrow \boldsymbol{V_B = 3\ KN}$$

$$\sum F_V = 0 \ \therefore \ V_B + V_A - 3 - 3 = 0 \ \Rightarrow \ V_A + 3 - 3 - 3 = 0 \ \Rightarrow V_A - 3 = 0 \ \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{V_A = 3\ KN}$$

DCL final:

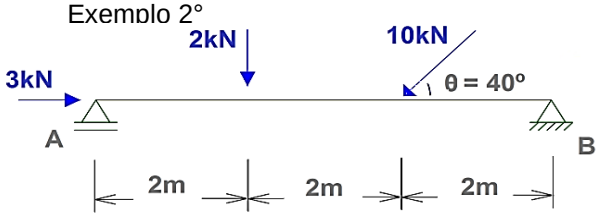
Figura 125: Exemplo 2°



Fonte: autor

3°) Calcule as reações de apoios para a viga abaixo e mostre o DCL final.

Figura 126: Exemplo 2°



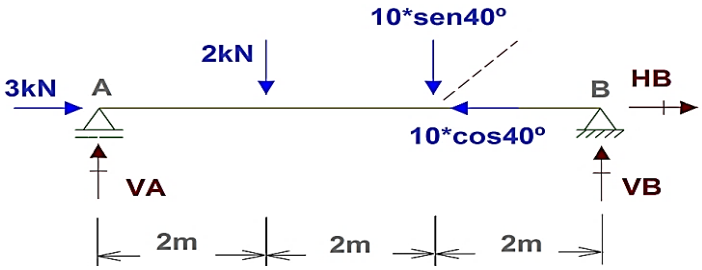
Fonte: autor

RESP:

DCL inicial:

Sempre que existirem forças inclinadas devemos obter suas respectivas componentes nas direções das reações de apoios.

Figura 127: Exemplo 3°



Fonte: autor

Observe que a reação V_A, a força de 3KN, a componente horizontal $10\cos 40°$ e a reação H_B têm suas linhas de ação passando pelo ponto A, assim não produzem momento em relação a esse ponto.

Aplicando as equações de equilíbrio da estática, temos:

$$\sum F_H = 0 \therefore H_B + 3 - 10 * \cos 40° = 0 \Rightarrow H_B + 3 - 7{,}66 = 0 \Rightarrow H_B - 4{,}66 = 0$$

$$\boldsymbol{H_B = 4{,}66\ KN}$$

$$\sum M_A = 0 \therefore 6V_B - 4 * 10 \sin 40° - 2 * 2 = 0 \Rightarrow 6V_B - 29{,}71 = 0 \Rightarrow 6V_B - 29.71 = 0$$

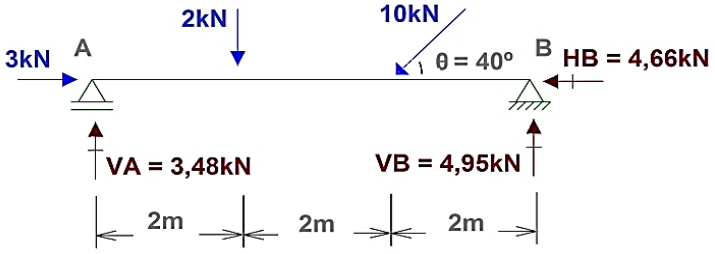
$$6V_B = 29.71 \Rightarrow \boldsymbol{V_B = 4{,}95\ KN}$$

$$\sum F_V = 0 \therefore V_A + V_B - 2 - 10 \sin 40° = 0 \Rightarrow V_A + 4.95 - 2 - 6{,}43 = 0 \Rightarrow V_A - 3{,}4 = 0$$

$$\boldsymbol{V_A = 3{,}48\ K}$$

DCL final

Figura 128:
Exemplo 3°



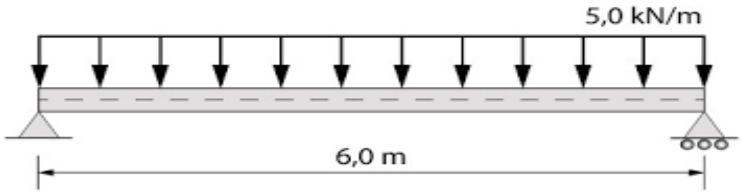
Fonte: autor

6.8 Reações de apoios em vigas simplesmente apoiadas sujeitas exclusivamente a carregamentos distribuídos

Neste item vamos aprender o cálculo de reações para vigas exclusivamente sob carregamento distribuído como mostram os exemplos abaixo

1°) Calcule as reações de apoios para a viga simplesmente apoiada mostrada abaixo e represente o DCL final.

Figura 129: Exemplo 3°



Fonte: internet(guiadaengenharia.com)

Viga simétrica: as reações verticais são iguais e valem a metade da carga total aplicada

RESP:

DCL inicial:

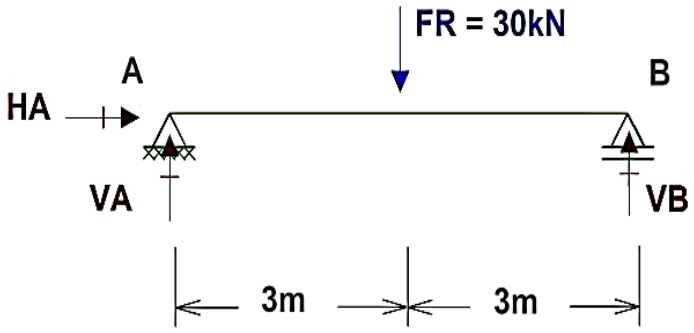
Dos exemplos anteriores e da tabela 01 (item 5.1.4.2.2) sabemos que:

a) **FR** = A = 5 x 6 = **30 KN**

b) $\bar{X}$ = L / 2 = 6 / 2 = **3 m**

Logo:

Figura 130: Exemplo 1°



Fonte: autor

Aplicando as equações de equilíbrio da estática, vem:

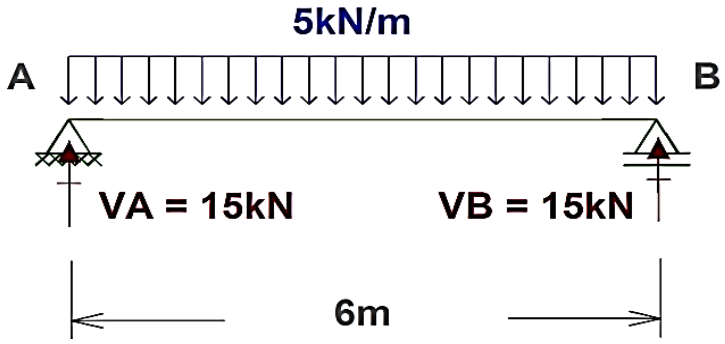
$$\sum F_H = 0 \therefore \boldsymbol{H_A = 0\ KN}$$

$$\sum M_A = 0 \ \therefore \ 6V_B - 30 * 3 = 0 \ \Rightarrow 6V_B - 90 = 0 \ \Rightarrow 6V_B = 90 \ \Rightarrow \boldsymbol{V_B = 15KN}$$

$$\sum F_V = 0 \quad \therefore \ V_A + V_B - 30 = 0 \ \Rightarrow \ V_A + 15 - 30 = 0 \ \Rightarrow V_A - 15 = 0 \ \Rightarrow \boldsymbol{V_A = 15KN}$$

DCL final:

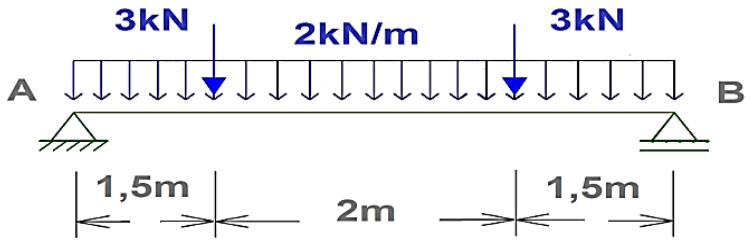
Figura 131:Exemplo 1°



Fonte: autor

2°) Calcule as reações de apoios para a viga simplesmente apoiada mostrada abaixo e represente o DCL final.

Figura 132: - Exemplo 2°



Fonte: autor

Viga simétrica: as reações são iguais e valem a metade da carga total aplicada

RESP:

DCL inicial:

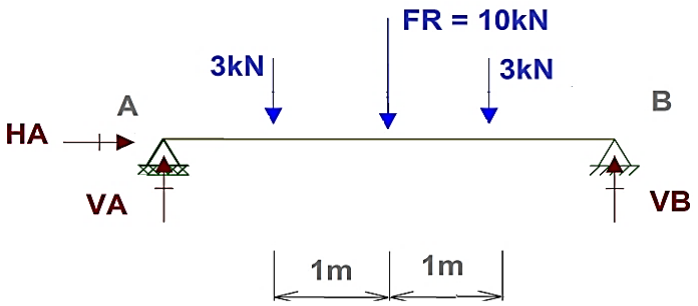
Dos exemplos anteriores e da tabela 01 (item 5.1.4.2.2) sabemos que:

a) $\boldsymbol{F_{R,ret} = A_{Ret}} = (5 * 2) = \boldsymbol{10\ KN}$ $(resultante\ do\ carreg.unif.distribuído)$

b) Ponto $\overline{X_A}$ de aplicação da resultante FR em relação ao apoio A:

$\boldsymbol{\overline{X_A}}$ = L / 2 = 5 / 2 = **2,5 m**

Figura 133: Exemplo 2°



Fonte: autor

Aplicando as equações de equilíbrio da estática, vem:

$$\sum F_H = 0 \therefore \boldsymbol{H_A = 0\ KN}$$

$$\sum M_A \circlearrowleft = 0 \ \therefore \ 5V_B - 3 * 3{,}5 - 10 * 2{,}5 - 3 * 1{,}5 = 0 \ \Rightarrow 5V_B - 40 = 0 \ \Rightarrow 5V_B = 40$$

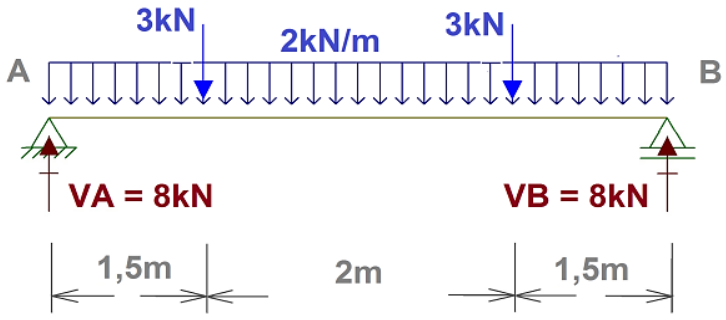
$$\boldsymbol{V_B = 8\ KN}$$

$$\sum F_V = 0 \ \therefore \ V_A + V_B - 3 - 10 - 3 = 0 \ \Rightarrow \ V_A + 8 - 16 = 0 \ \Rightarrow V_A - 8 = 0 \ \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{V_A = 8\ KN}$$

DCL final:

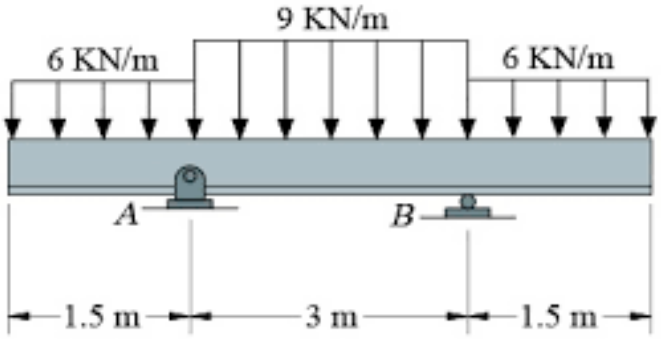
Figura 134: Exemplo 2°



Fonte: autor

3°) Calcule as reações de apoios para a viga simplesmente apoiada mostrada abaixo e represente o DCL final.

Figura 135: Exemplo 3°



Fonte: (engenheiraco.blogspot.com)

RESP:

Observe que a viga é simétrica (cada reação deve ser a metade da resultante total)

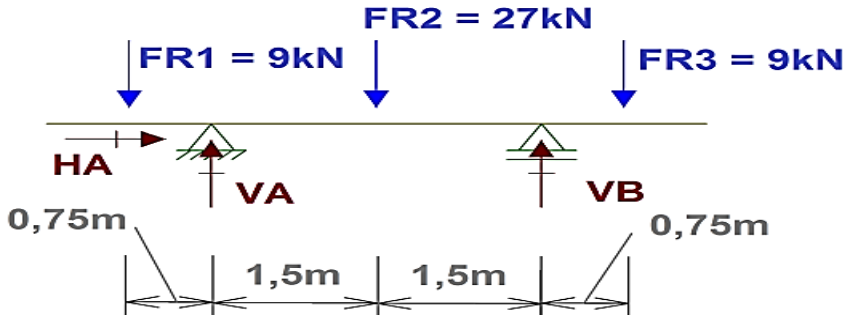
DCL inicial:

Observe que o carregamento pode ser dividido em três áreas retangulares. Assim dos exemplos anteriores e da tabela 01 do item (5.1.4.2.2), vem que:

a) $\boldsymbol{F_{R1} = A_1 = (1{,}5 * 6)9\ KN;}$ $\boldsymbol{F_{R2} = A_2 = (3\ x\ 9) = 27\ KN;}$ $\boldsymbol{F_{R3} = A_3 = 9KN}$

b) $\overline{x_1} = 1{,}5 / 2 = \mathbf{0,75\ m;}$ $\overline{\boldsymbol{X_{2,A}}} = \frac{3}{2} = \mathbf{1,5\ m}$; $\overline{\boldsymbol{X_{3,B}}} = \mathbf{0,75\ m}$

Figura 136: Exemplo 3



Fonte: autor

Aplicando as equações de equilíbrio da estática, vem:

$\sum F_H = 0 \therefore \boldsymbol{H_A = 0\ KN}$

$\sum M_A = 0 \ \therefore -9 * 3{,}75 + 3V_B - 27 * 1{,}5 + 9 * 0{,}75 = 0 \Rightarrow 3V_B - 67{,}5 = 0 \Rightarrow$

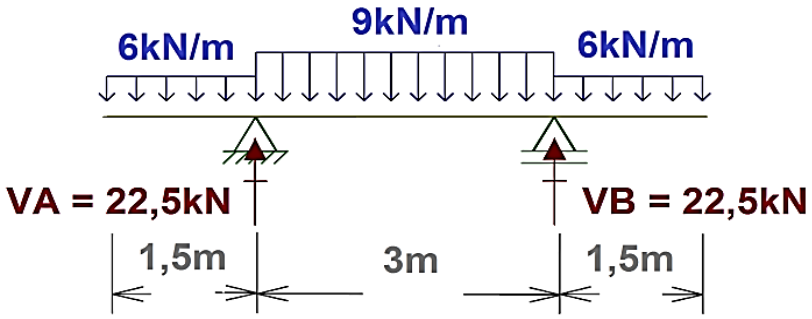
$3V_B = 67{,}5 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_B = 22{,}5\ KN}$

$\sum F_V = 0 \therefore V_A + V_B - 9 - 27 - 9 = 0 \Rightarrow V_A + 22{,}5 - 45 = 0 \Rightarrow V_A - 22{,}5 = 0$

$\boldsymbol{V_A = 22{,}5\ KN}$

DCL final

Figura 137: Exemplo 3°



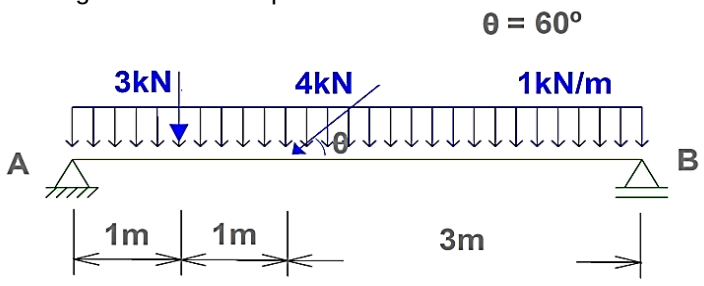
Fonte: autor

6.9 Reações de apoios em vigas simplesmente apoiadas sujeitas a um carregamento combinado.

Neste item vamos aprender o cálculo de reações de apoios para vigas sob carregamento combinado. Acompanhe a resolução dos exemplos a seguir

1°) Calcule as reações de apoios para a viga abaixo e mostre o DCL final.

Figura 138: Exemplo 1



Fonte: autor

RESP:

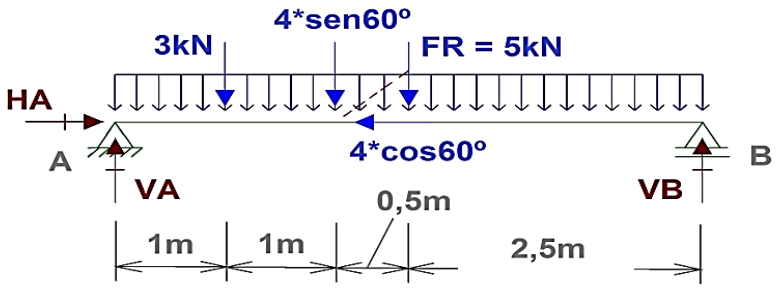
DCL inicial:

Dos exemplos anteriores e da tabela 01 (item 5.1.4.2.2), vem:

a) F_R = A = 5 x 1 = **5 KN**

b) $\overline{X_A}$ = L / 2 = 5 / 2 = **2,5 m**

Figura.139: Exemplo 1



Fonte: notas de aula (Estrut. Isostáticas)

Aplicando as equações de equilíbrio da estática, temos:

$$\sum F_H = 0 \therefore\ H_A - 4 * \cos 60° = 0 \quad \Rightarrow H_A - 2 = 0 \qquad \Rightarrow \boldsymbol{H_A = 2\ KN}$$

$$\sum M_A = 0\ \therefore\ 5V_B - 5 * 2{,}5 - 4 \sin 60° * 2 - 3 * 1 = 0\ \Rightarrow 5V_B - 22{,}43 = 0\ \Rightarrow$$

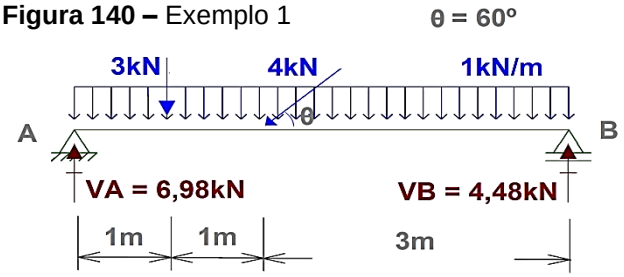
$$V_B = 22{,}43\ \Rightarrow\ \boldsymbol{V_B = 4{,}48\ KN}$$

$$\sum F_V = 0 \quad \therefore\ V_A + V_B - 3 - 4 \sin 60° - 5 = 0\ \Rightarrow\ V_A + 4{,}48 - 3 - 3{,}46 - 5 = 0$$

$$V_A - 6{,}98 = 0 \quad \Rightarrow \boldsymbol{V_A = 6{,}98\ KN}$$

DCL final:

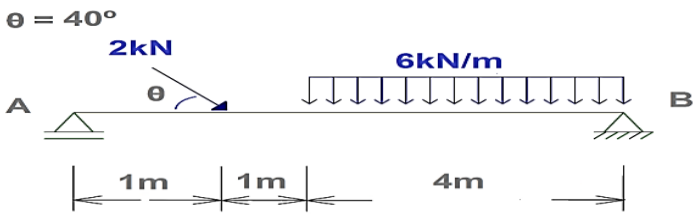
Figura 140 – Exemplo 1



Fonte: notas de aula (Estrut. Isostáticas)

2°) Calcule as reações de apoios para a viga abaixo e mostre o DCL final.

Figura 141: Exemplo 2



Fonte: notas de aula (Estrut. Isostáticas)

RESP:

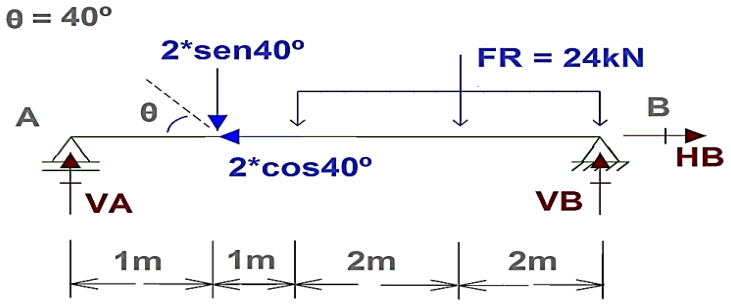
DCL inicial:

Dos exemplos anteriores e da tabela 01 (item 5.1.4.2.2), vem:

a) **FR** = A = 6 x 4 = **24 KN**

b) $\overline{X_A}$ = 2 + L_{RET}/2 = 2 + 4 / 2 = 2 + 2 = **4 m**

Figura 142: Exemplo 2



Fonte: notas de aula (Estrut. Isostáticas)

Aplicando as equações de equilíbrio da estática, temos:

$$\sum F_H = 0 \therefore\ H_B + 2 * \cos 40° = 0 \quad \Rightarrow H_B + 1{,}53 = 0 \quad \Rightarrow \boldsymbol{H_B = -1{,}53KN}$$

$$\sum M_A = 0 \ \therefore\ 6V_B - 4 * 24 - 2 \sin 40° * 1 = 0 \ \Rightarrow 6V_B - 97{,}28 = 0 \ \Rightarrow 6V_B = 97{,}28$$

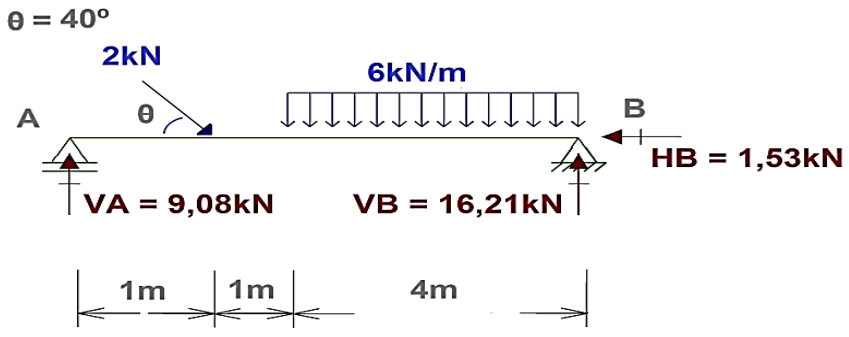
$$\boldsymbol{V_B = 16{,}21\ KN}$$

$$\sum F_V = 0 \therefore V_A + V_B - 24 - 2 \sin 40° = 0 \Rightarrow V_A + 16{,}21 - 24 - 1{,}29 = 0 V_A - 9{,}0 = 0$$

$$\boldsymbol{V_A = 9{,}08\ KN}$$

DCL final:

Figura 143: Exemplo 2

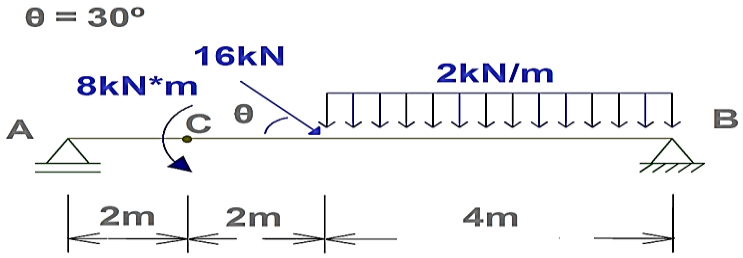


Fonte: Notas de aula (Estrut. Isostáticas)

(H_B resultou negativa, por isso, inverteu o sentido no DCL final)

3°) Calcule as reações de apoios para a viga abaixo e mostre o DCL final

Fig. 144: Exemplo 3



Fonte: notas de aula (Estrut. Isostáticas)

RESP:

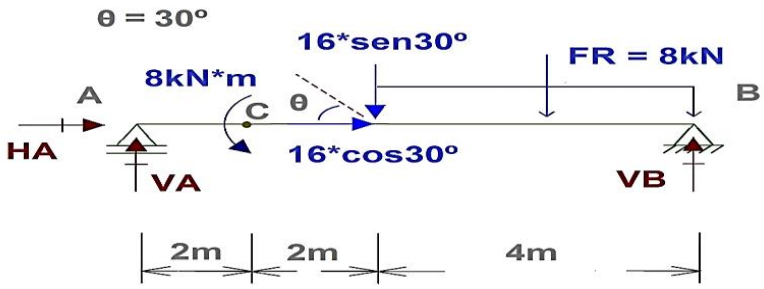
DCL inicial:

Dos exemplos anteriores e da tabela 01 (item 5.1.4.2.2), vem:

a) **FR** = A = 4 x 2= **8 KN**

b) $\overline{X_A}$ = 4 + L_{RET}/2 = 4 + 4 / 2 = 4 + 2 = **6 m**

Fig. 145: Exemplo 3



Fonte: notas de aula (Estrut. Isostáticas)

Quando existirem momentos externos aplicados na estrutura eles deverão ser incluídos na equação dos momentos.

Aplicando as equações de equilíbrio da estática, temos:

$$\sum F_H = 0 \therefore\ H_A + 16 * \cos 30° = 0 \quad \Rightarrow H_B + 13{,}86 = 0 \quad \Rightarrow \boldsymbol{H_B = -13,86KN}$$

$$\sum M_A = 0 \ \therefore\ 8V_B - 6 * 8 - 16 * \sin 30° * 4 + 8 = 0 \ \Rightarrow 8V_B - 72 = 0 \ \Rightarrow 8V_B = 72$$

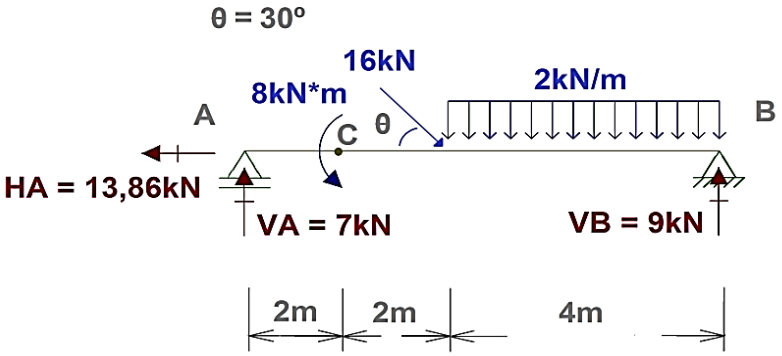
$$\boldsymbol{V_B = 9\ KN}$$

$$\sum F_V = 0 \ \therefore V_A + V_B - 8 - 16 \sin 30° = 0 \ \Rightarrow \ V_A + 9 - 8 - 8 = 0 \ \Rightarrow \ V_A - 7 = 0$$

$$\boldsymbol{V_A = 7KN}$$

DCL final:

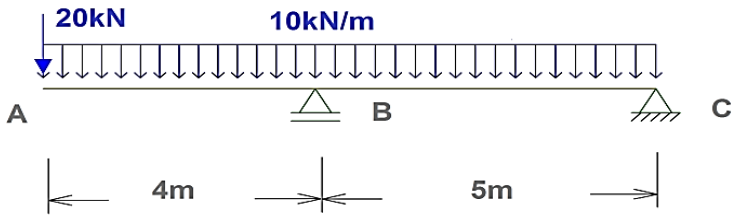
Figura 146: Exemplo 3



Fonte: notas de aula (Estrut. Isostáticas)

4°) Calcule as reações de apoios para a viga abaixo e mostre o DCL final:

Figura147: Exemplo 4



Fonte: autor

RESP:

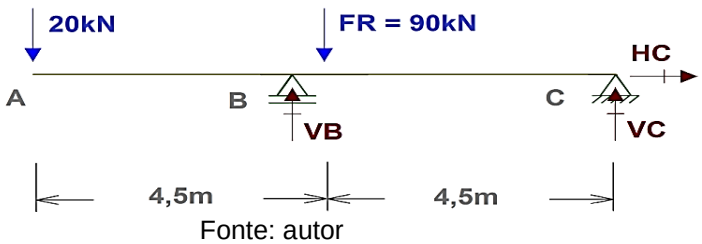
DCL inicial

Dos exemplos anteriores e da tabela 01 (item 5.1.4.2.2), vem:

a) **FR** = A = 9 x 10 = **90 KN**

b) $\overline{X_A}$ = L / 2 = 9 / 2 = **4,5 m**

Figura 148: Exemplo 4



Fonte: autor

Aplicando as equações de equilíbrio da estática, temos:

$\sum F_H = 0 \therefore \quad \boldsymbol{H_C = 0\ KN}$

$\sum M_B \circlearrowleft = 0 \ \therefore \ 5V_C - 90 * 0{,}5 + 20 * 4 = 0 \Rightarrow \ 5V_B + 35 = 0 \ 5V_B = -35 \ \Rightarrow$

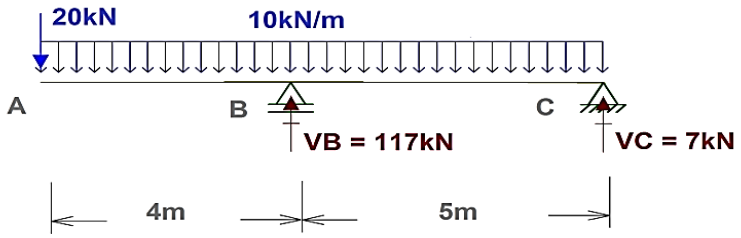
$\boldsymbol{V_B = -7KN}$

$\sum F_V = 0 \ \therefore V_B - V_C - 90 - 20 = 0 \ \Rightarrow \ V_B - 7 - 90 - 20 = 0 \ \Rightarrow \ V_B - 117 = 0 \ \Rightarrow$

$\boldsymbol{V_B = 117\ KN}$

DCL final:

Figura 150: Exemplo 4



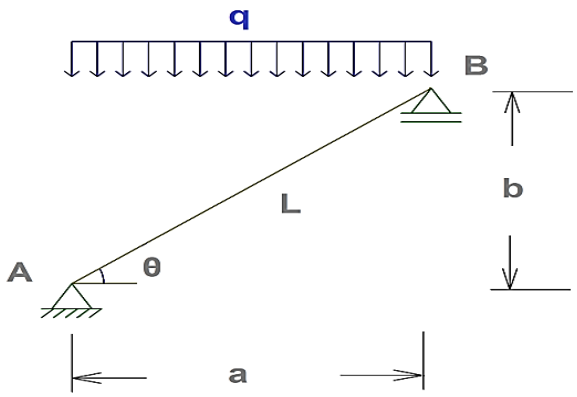
Fonte: autor

6.10 Reações de apoios em vigas inclinadas sob cargas externas

Nesse item vamos aprender a calcular reações de apoios em vigas inclinadas sujeitas a um carregamento vertical uniformemente distribuído podendo ocorrer dois casos explicados a seguir

A) Reações de apoios em vigas inclinadas sujeita a um carregamento q vertical uniformemente distribuído.

Figura 151: exemplo 4°



Adaptado de (Júnior, Eloy 1999)

Nesse caso, o carregamento **q** está distribuído ao longo do comprimento horizontal **a** e não ao longo do comprimento **L** da viga. Portanto, o valor da resultante é:

$$\boldsymbol{F_R = A_{Ret} = (q * a)}$$

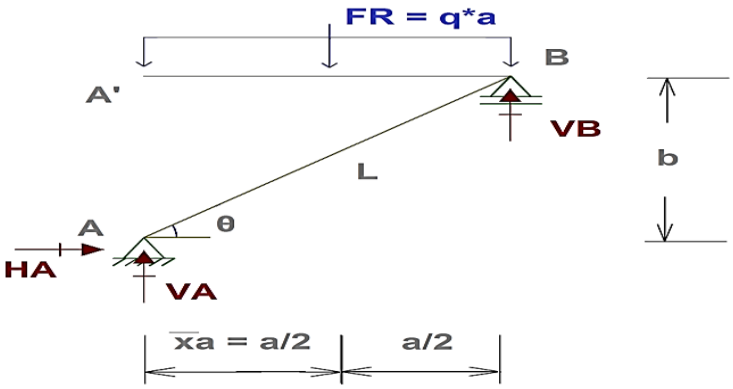
O ponto de aplicação da resultante em relação ao apoio A, é:

$$\boldsymbol{\bar{X}_A = \frac{a}{2}}$$

Assim o DCL inicial fica como mostrado abaixo

DCL inicial:

Figura 152: exemplo 4°



Adaptado de (Júnior, Eloy 1999)

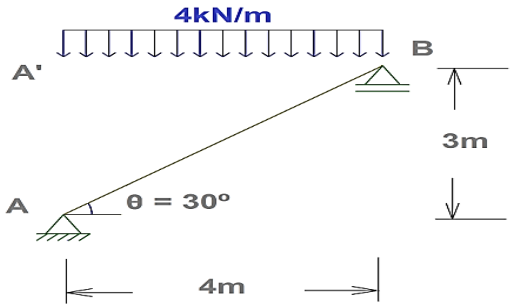
Observe que a força resultante $\boldsymbol{F_R}$ é vertical, logo não possui componente horizontal, assim a reação $\boldsymbol{H_A}$ é ZERO.

Exemplos**:**

1°) Calcule as reações de apoios para a viga abaixo e mostre o DCL final.

- **Viga é simétrica**: as reações verticais são iguais e valem a metade da força resultante total.

Figura153: Exemplo 1



Adaptado de (Júnior, Eloy 1999)

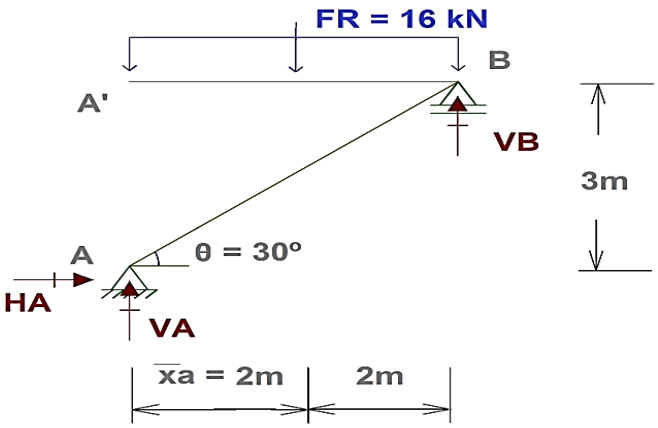
RESP:

DCL inicial:

a) **FR** = A = **(q x a)** = (4 x 4) = **16 KN**

b) $\overline{X_A}$ = **a / 2** = 4 / 2 = **2 m**

Figura 154: exemplo 1



Fonte: autor

Aplicando as equações de equilíbrio estático, vem

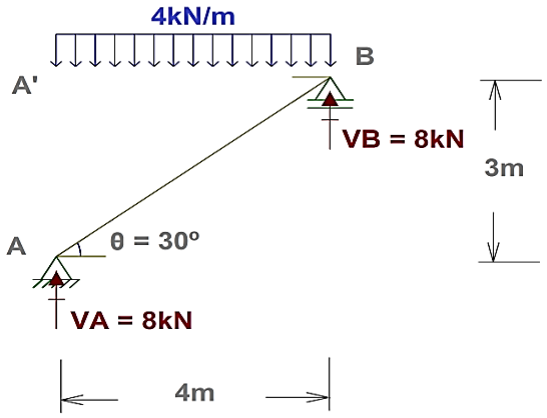
$$\sum F_H = 0 \therefore \quad \boldsymbol{H_A = 0\ KN}$$

$$\sum M_A = 0 \ \therefore \ 4V_B - 16 * 2 = 0 \ \Rightarrow 4V_B - 32 = 0 \ \Rightarrow 4V_B = 32 \ \Rightarrow \ \boldsymbol{V_B = 8\ KN}$$

$$\sum F_V = 0 \ \therefore V_A + V_B - 16 = 0 \ \Rightarrow \ V_A + 8 - 16 = 0 \ \Rightarrow \ V_A - 8 = 0 \ \Rightarrow \ \boldsymbol{V_A = 8\ KN}$$

DCL final:

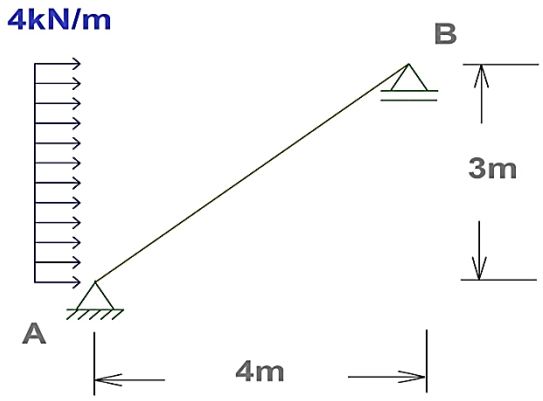
Figura 155: Exemplo 1



Fonte: autor

2) Calcule as reações de apoios para a viga abaixo e mostre o DCL final.

Figura 156: Exemplo 2



Fonte: autor

Nesse caso, o carregamento **q** está distribuído ao longo do comprimento vertical **b** e não ao longo do comprimento **L** da viga. Portanto, o valor da resultante é:

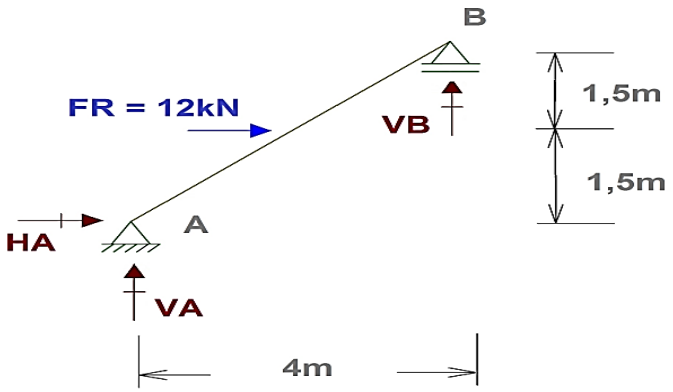
$$\boldsymbol{FR = A = (q\,x\,b) = (4\,x\,3) = 12\,KN}$$

O ponto de aplicação da resultante em relação ao apoio A, é:

$\overline{X_A}$ = **b / 2** = 3 / 2 = **1,5 m**

Assim o DCL inicial fica como mostrado abaixo

Figura 157: Exemplo 2



Fonte: autor

Aplicando as equações de equilíbrio estático, vem:

$$\sum F_H = 0 \therefore \ H_A - 12 = 0 \ KN \ \Rightarrow \ \boldsymbol{H_A}$$

$$= -\boldsymbol{12KN} \ (inveter \ o \ sentido \ no \ DCL \ final)$$

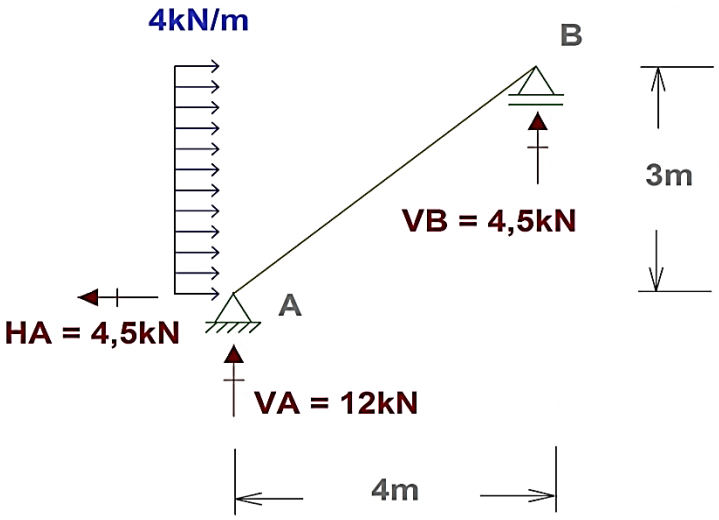
$$\sum M_A = 0 \ \therefore \ 4V_B - 12 * 1.5 = 0 \ \Rightarrow 4V_B - 18 = 0 \ \Rightarrow 4V_B = 18 \ \Rightarrow \ \boldsymbol{V_B = 4,5 \ KN}$$

$$\sum F_V = 0 \ \therefore V_A + V_B = 0 \ \Rightarrow \ V_A + 4{,}5 = 0$$

$$\boldsymbol{V_A} = -\boldsymbol{4,5 \ KN} \ (inverter \ o \ sentido \ no \ DCL \ final)$$

DCL final:

Figura 158: Exemplo 2°

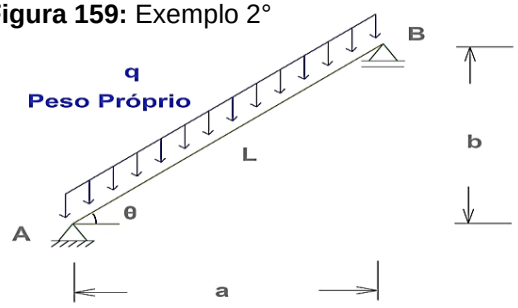


Adaptado de (Júnior, Eloy 1999)

6.11 Reações de apoios devidas ao peso próprio em vigas inclinadas.

O peso próprio de uma viga homogênea e de seção transversal constante pode ser considerado como um carregamento uniformemente distribuído ao longo do comprimento **L** da viga atuando na direção vertical e com sentido para baixo.

Figura 159: Exemplo 2°



Adaptado de (Júnior, Eloy 1999)

Nesse caso, a carga (peso próprio) se distribui ao longo do comprimento **L** da viga, logo o valor (F_R) da resultante é:

• $\boldsymbol{F_R = (q * L)}$

Pode ser necessário usar o teorema de Pitágoras ou uma relação trigonométrica para encontrar o comprimento $\boldsymbol{L}$ *da viga*

O ponto $\overline{X_A}$ de aplicação da resultante em relação ao apoio A, é:

• $\overline{X_A} =$ **a / 2**

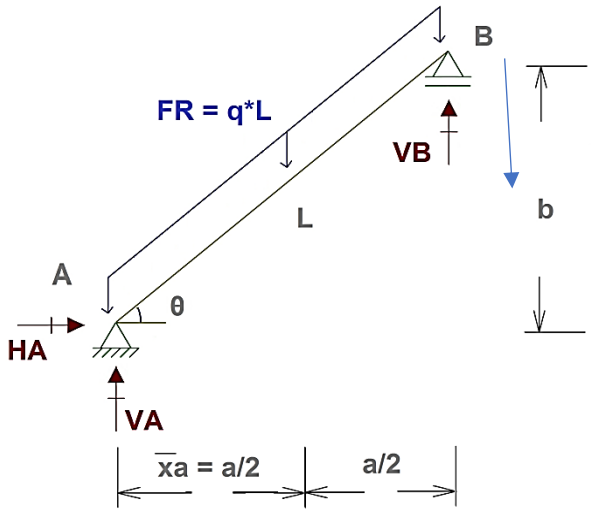
Assim para o DCL temos que:

DCL inicial:

a) **FR** = A = (**q x L**)

b) $\overline{X_A} =$ **a / 2**

Figura 160: exemplo 2°



Adaptado de (Júnior, Eloy 1999)

Exemplos:

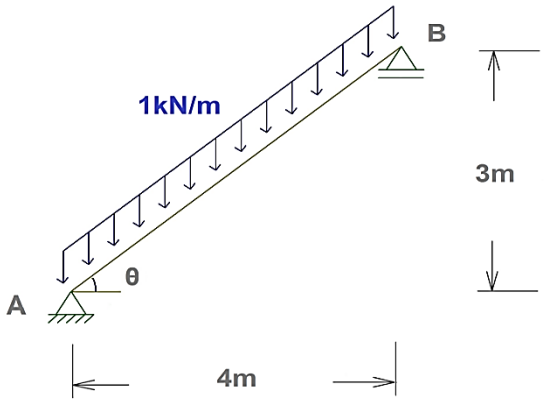
1°) Calcule as reações de apoios para a viga abaixo e mostre o DCL final

• **Viga é simétrica**: as reações verticais são iguais e valem a metade da força resultante total.

RESP:

DCL inicial:

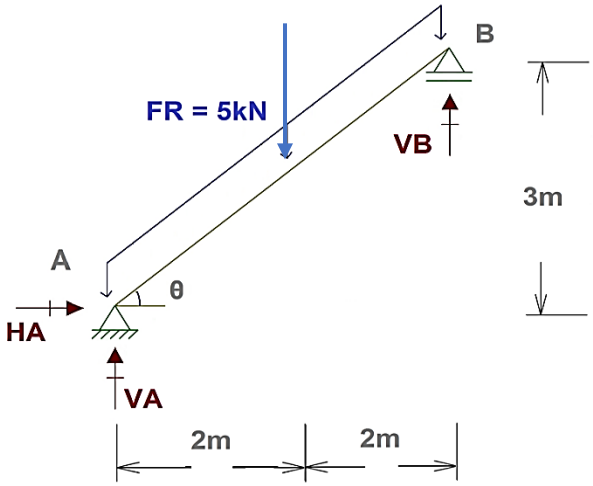
Figura 161: Exemplo 1



a) $\boldsymbol{F_R}$ **= A** = (q x L) = $1 * \sqrt{4^2 + 3^2} = 1 * \sqrt{25} = 1 * 5 =$ **5** $\boldsymbol{KN}$

b) $\overline{X_A}$ = **a / 2** = 4 / 2 = **2 m**

Figura 162 – Exemplo 2



Fonte: notas de aula (Estrut. Isostática)

Aplicando as equações de equilíbrio da estática, temos:

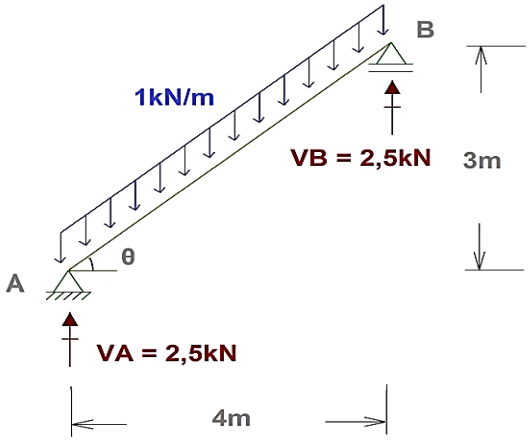
$$\sum F_H = 0 \therefore \boldsymbol{H_A = 0}$$

$$\sum M_A \circlearrowright = 0 \ \therefore \ 4V_B - 5 * 2 = 0 \ \Rightarrow 4V_B - 10 = 0 \ \Rightarrow 4V_B = 10 \ \Rightarrow \boldsymbol{V_B = 2,5\ KN}$$

$$\sum F_V = 0 \ \therefore V_A + V_B - 5 = 0 \ \Rightarrow \ V_A + 2{,}5 - 5 = 0 \ \Rightarrow \ V_A - 2{,}5 = 0 \ \Rightarrow \boldsymbol{V_A = 2,5\ KN}$$

DCL final:

Figura. 163 – Exemplo 1



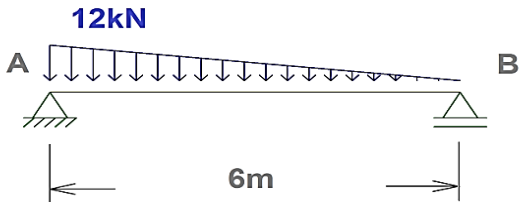
Adaptado de (Júnior, Eloy 1999)

6.12 Reações de apoios em vigas sujeitas a carregamento triangular e combinado.

Neste item aprenderemos a calcular reações de apoios em vigas sob carregamento triangular e combinado. Acompanhe a resolução dos exemplos abaixo

1°) Calcule as reações de apoios para a viga abaixo e mostre o DCL final.

Figura 164: Exemplo 1



Fonte: autor

RESP:

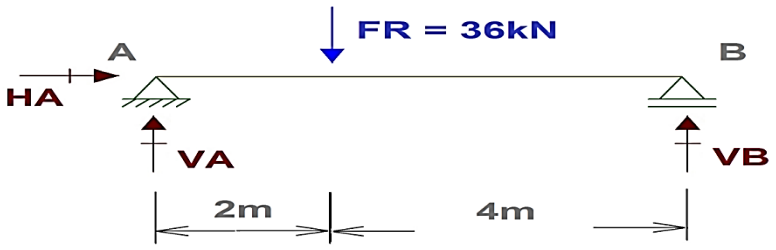
DCL inicial:

Dos exemplos anteriores e da tabela 01 (item 5.1.4.2.2), vem

$\boldsymbol{a)}\ \boldsymbol{FR} = \boldsymbol{A} = (q\ x\ L)\ /\ 2 = (12\ x\ 6)\ /\ 2 = \boldsymbol{36\ KN}$

$\boldsymbol{b)}\ \overline{\boldsymbol{X_{90°}}} = L\ /\ 3 = 6\ /\ 3 = \boldsymbol{2}$

Figura 165: Exemplo 1



Fonte: autor

Aplicando as equações de equilíbrio da estática, temos:

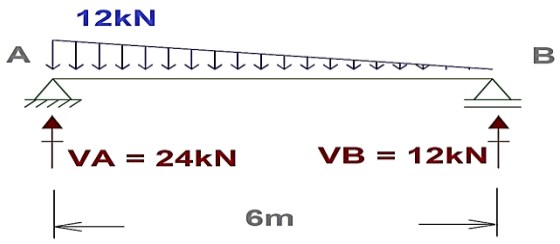
$\sum F_H = 0 \therefore\ \boldsymbol{H_A = 0\ KN}$

$\sum M_A = 0\ \therefore\ 6V_B - 36 * 2 = 0\ \Rightarrow 6V_B - 72 = 0\ \Rightarrow 6V_B = 72\ \Rightarrow \boldsymbol{V_B = 12\ KN}$

$\sum F_V = 0\ \therefore V_A + V_B - 36 = 0\ \Rightarrow\ V_A + 12 - 36 = 0\ \Rightarrow\ V_A - 24 = 0\ \Rightarrow \boldsymbol{V_A = 24\ KN}$

DCL final:

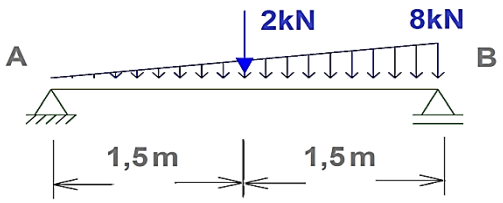
Figura 166 **– Exemplo 1**



Fonte: autor

2°) Calcule as reações de apoios para a viga abaixo e mostre o DCL final.

Fig. 167 – Exemplo 2



Fonte: autor

RESP:

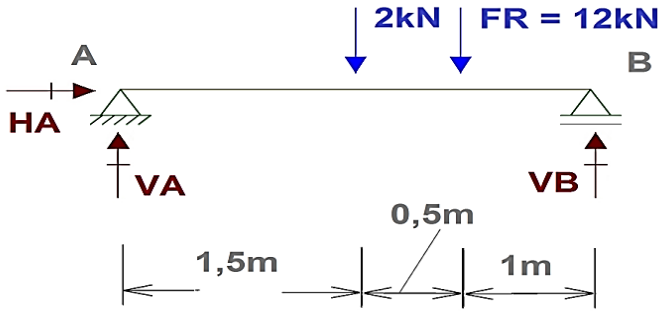
DCL inicial:

Dos exemplos anteriores e da tabela 01 (item 5.1.4.2.2), vem

$a)\ \boldsymbol{F_R} = \boldsymbol{A_{Tria}} = (q\ x\ L)\ /\ 2 = (8\ x\ 3)\ /\ 2 = \boldsymbol{12\ KN}$

b) $\overline{\boldsymbol{X_A}} = 2L\ /\ 3 = (2\ x\ 3)\ /\ 3 = \boldsymbol{2\ m}$

Figura 168 **– Exemplo 1**



Fonte: autor

Aplicando as equações de equilíbrio da estática, temos:

$\sum F_H = 0 \therefore\ \boldsymbol{H_A = 0}$

$\sum M_A = 0\ \therefore\ 3V_B - 12 * 2 - 2 * 1{,}5 = 0\ \Rightarrow 3V_B - 27 = 0\ \Rightarrow 3V_B = 27\ \Rightarrow$

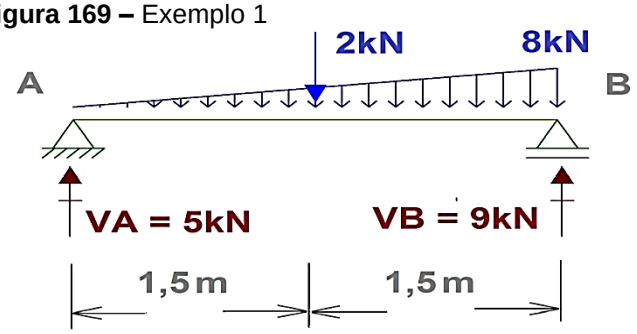
$\boldsymbol{V_B = 9\ KN}$

$\sum F_V = 0\ \therefore V_A + V_B - 2 - 12 = 0\ \Rightarrow\ V_A + 9 - 2 - 12 = 0\ \Rightarrow\ V_A - 5 = 0\ \Rightarrow$

$\boldsymbol{V_A = 5\ KN}$

DCL final:

Figura 169 – Exemplo 1



Fonte: autor

6.13 Reações de apoios em vigas sujeitas a carregamentos trapezoidais

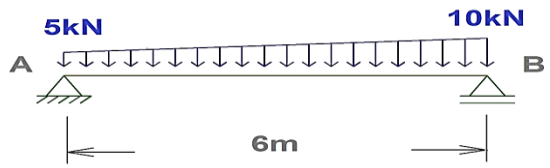
Veremos agora o cálculo de reações de apoios para vigas sob carregamento trapezoidal

A) Carregamento trapezoidal tipo 1

Para carregamentos trapezoidais tipo 1 temos:

1°) Calcule as reações de apoios para a viga abaixo e mostre o DCL final.

Figura 170 : Exemplo 1



Fonte: autor

RESP

DCL inicial:

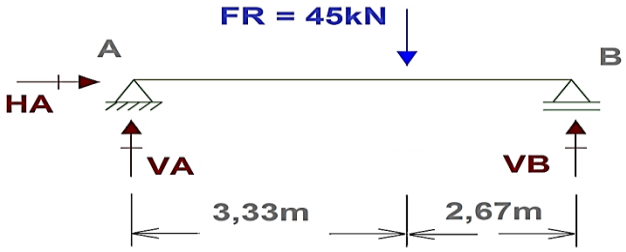
Dos exemplos anteriores e da tabela 01 (item 5.1.4.2.2), vem:

a) $\boldsymbol{F_R = A_{Trap}} = (Q + q)L / 2 = (10 + 5).6 / 2 = \mathbf{45\ KN}$

b) Ponto de aplicação da resultante em relação a carga q (carga de menor valor):

$$\bar{X}_q = \frac{L(q + 2Q)}{3(q + Q)} = \frac{6(5 + 2 * 10)}{3(5 + 10} = 3,33m$$

Figura 171: Exemplo 1



Fonte: autor

Aplicando as equações de equilíbrio da estática, temos:

$$\sum F_H = 0 \therefore \boldsymbol{H_A = 0\ KN}$$

$$\sum M_A = 0 \ \therefore \ 6V_B - 3{,}33 * 45 = 0 \ \Rightarrow 6V_B - 149{,}85 = 0 \ \Rightarrow 6V_B = 149{,}85$$

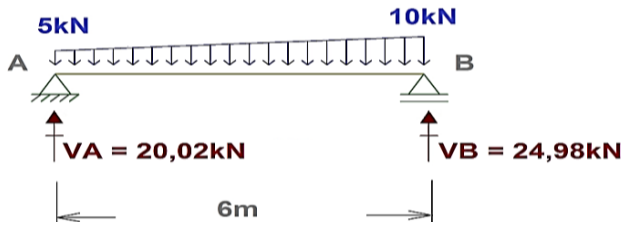
$$\boldsymbol{V_B = 24{,}98\ KN}$$

$$\sum F_V = 0 \quad \therefore \ V_A + V_B - 45 = 0 \ \Rightarrow \ V_A + 24{,}98 - 45 = 0 \ \Rightarrow V_A - 20{,}02 = 0$$

$$\boldsymbol{V_A = 20{,}02\ KN}$$

DCL final:

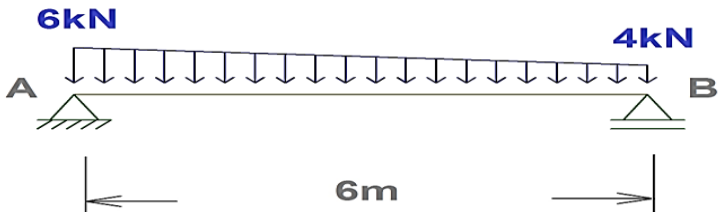
Figura 172: Exemplo 1



Fonte: autor

2°) Calcule as reações de apoios para a viga abaixo e mostre o DCL final.

Figura 173: Exemplo 2



Fonte: autor

RESP:

DCL inicial:

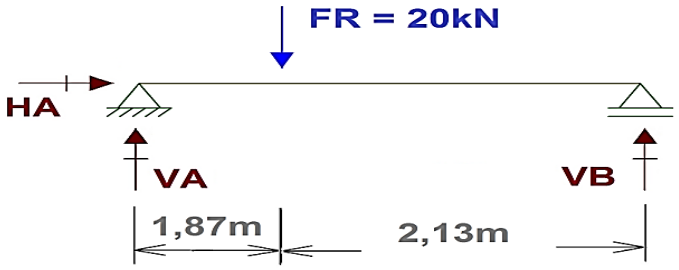
Dos exemplos anteriores e da tabela 01 (item 5.1.4.2.2), vem

a) **FR = A** = (6 + 3).6 / 2 = **27 KN**

b) Ponto de aplicação em relação a carga Q (carga de maior valor):

$$\bar{X}_Q = \frac{\boldsymbol{L(Q + 2q)}}{\boldsymbol{3(q + Q)}} = \frac{\boldsymbol{4(6 + 2 * 4)}}{\boldsymbol{3(6 + 4)}} = \boldsymbol{1{,}87\ m}$$

Figura 174: Exemplo 2



Fonte: autor

Aplicando as equações de equilíbrio da estática, temos:

$\sum F_H = 0 \therefore \boldsymbol{H_B = 0}$

$\sum M_A = 0 \ \therefore \ 4V_B - 20 * 1.87 = 0 \ \Rightarrow 4V_B - 37{,}74 = 0 \ \Rightarrow 4V_B = 37{,}74 \ \Rightarrow$

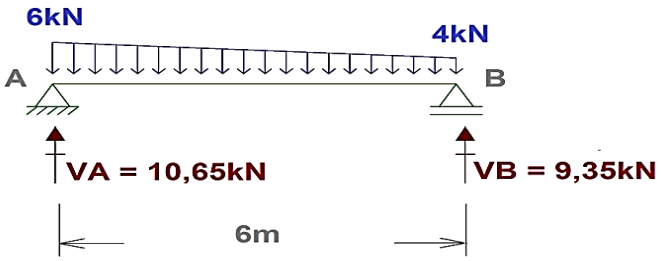
$\boldsymbol{V_B = 9{,}35\ KN}$

$\sum F_V = 0 \ \therefore V_A + V_B - 20 = 0 \ \Rightarrow \ V_A + 9{,}35 - 20 = 0 \ \Rightarrow \ V_A - 10{,}65 = 0 \ \Rightarrow$

$\boldsymbol{V_A = 10{,}65\ KN}$

DCL final:

Figura 175: Exemplo 2



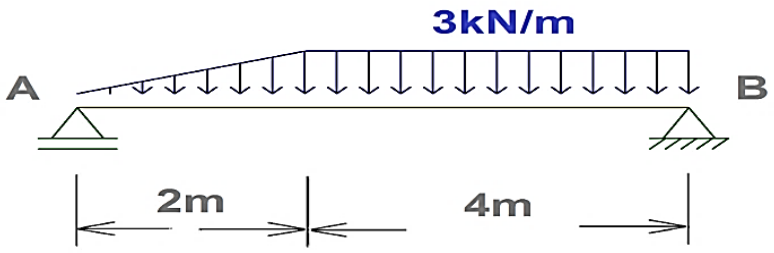
Fonte: autor

B) Carregamento trapezoidal tipo 2

Para carregamentos trapezoidais tipo 1 temos:

1°). Calcule as reações de apoios para a viga abaixo e mostre o DCL final.

Figura 176: Exemplo 2°



Fonte: autor

RESP:

DCL inicial

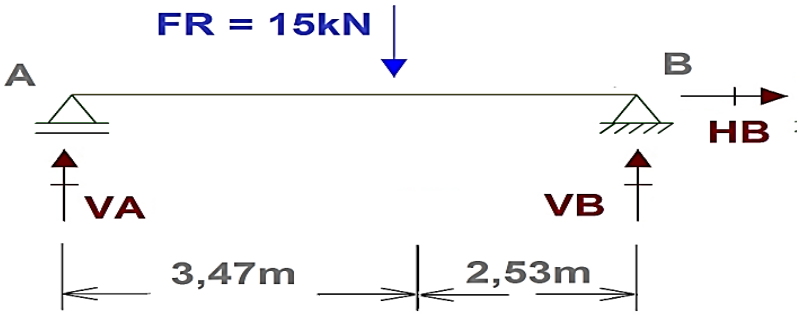
Dos exemplos anteriores e da tabela 01 (item 5.1.4.2.2), vem

a) $\mathbf{F_R} = \boldsymbol{A} = (L + b)\, q / 2 = (6 + 4).3 / 2 = \mathbf{15}\, \boldsymbol{KN}$ (b→ comp. do carregamento uniformemente distribuído)

b) Ponto $\bar{X}_i$ de aplicação da resultante em relação ao início do carregamento uniforme (apoio B)

$$\bar{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{i}} = \frac{(\boldsymbol{L^3 - b^3})}{\boldsymbol{3(L^2 - b^2)}} = \frac{(\boldsymbol{6^3 - 4^3})}{\boldsymbol{3(6^2 - 4^2)}} = \boldsymbol{2,53\ m}$$

Figura 177: Exemplo 1



Fonte: autor

Aplicando as equações de equilíbrio da estática, temos:

$\sum F_H = 0 \therefore\ \boldsymbol{H_B = 0}$

$\sum M_A = 0\ \therefore\ 6V_B - 15 * 3{,}47 = 0\ \Rightarrow 6V_B - 52{,}05 = 0\ \Rightarrow 6V_B = 52{,}05\ \Rightarrow$

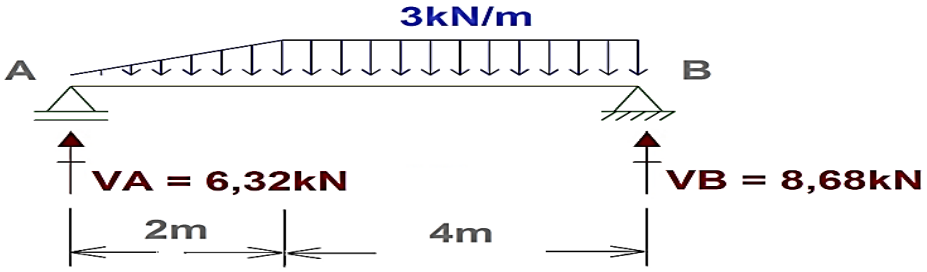
$\boldsymbol{V_B = 8,68\ KN}$

$\sum F_V = 0\ \therefore V_A + V_B - 15 = 0\ \Rightarrow\ V_A + 8{,}68 - 15 = 0\ \Rightarrow\ V_A - 6{,}32 = 0\ \Rightarrow$

$V_A = 6,32\ KN$

DCL final:

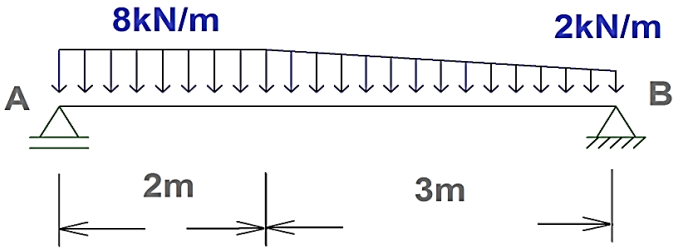
Fig. 178: Exemplo 1



Fonte: autor

3°) Calcule as reações de apoios para a viga abaixo e mostre o DCL final.

Figura. 179: Exemplo 3



Fonte: Notas de aula (Estrut. Isostáticas)

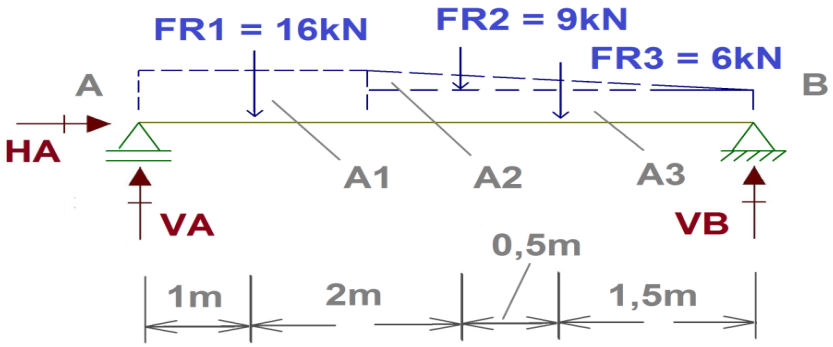
RESP:

Observe que esse tipo de carregamento forma uma área poligonal e não consta na tabela 01 (item 5.1.4.2.2), assim vamos resolvê-lo por decomposição de área.

DCL inicial:

a) Decompondo a área do carregamento em dois retângulos e um triângulo, calculando e posicionando a resultante correspondente a cada área obtida, temos:

Fig. 180: Exemplo 3



Fonte: Notas de aula (Estrut. Isostáticas)

FR1 = A1 = (2 x 8) = **16 KN** $\overline{X_{A,1}}$ = **$L_{ret,1}$ / 2** = 2 / 2 =**1m**

FR2 = A2 = (8 - 2).3 / 2= **9 KN** $\overline{X_{A,2}}$ = 2 + **L_{Tri}** / 3 = 2 + (3 / 3) = **3 m**

FR3 = A3 = (3 x 2) = **6 KN** $\overline{X_{A,3}}$ = 2+ $L_{ret,3}$ / 2= 2+ (3 /2) = 2 + 1,5 = **3,5 m**

Aplicando as equações de equilíbrio da estática, temos:

$$\sum F_H = 0 \therefore \boldsymbol{H_A = 0}$$

$$\sum M_A = 0 \ \therefore \ 5V_B - 6 * 3{,}5 - 9 * 3 - 16 * 1 = 0 \ \Rightarrow 5V_B - 64 = 0 \ \Rightarrow 5V_B = 64$$

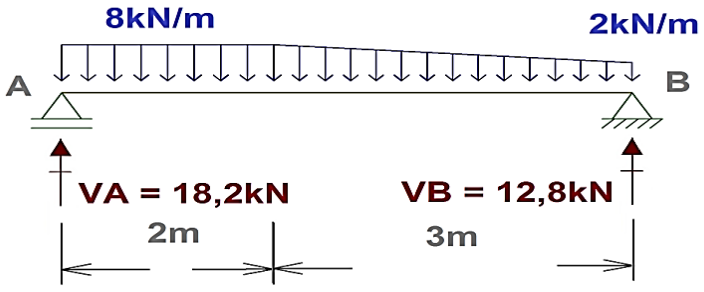
$$\boldsymbol{V_B = 12,8KN}$$

$$\sum F_V = 0 \ \therefore V_A + V_B - 6 - 9 - 16 = 0 \ \Rightarrow \ V_A + 12{,}8 - 31 = 0 \ \Rightarrow \ V_A - 18{,}2 = 0$$

$$\boldsymbol{V_A = 18,2\ KN}$$

DCL final:

Fig. 181: Exemplo 3



Fonte: Notas de aula (Estrut. Isostáticas)

Todos os exercícios anteriores também podem ser resolvidos por decomposição de área.

Antes de continuar aprendendo a calcular reações de apoios é necessário aprender novos conceitos que serão explicados no capítulo a seguir.

CAPÍTULO VII

7. ESTABILIDADE DE ESTRUTURAS NO PLANO

A análise da estabilidade de estruturas pode ser uma tarefa bastante complexa. Nesse capítulo vamos aprender simplificadamente alguns conceitos elementares adaptados de (Cascão, Maria 2009) e que serão necessários para a continuidade do nosso estudo

7.1 Conceito de estruturas estáveis

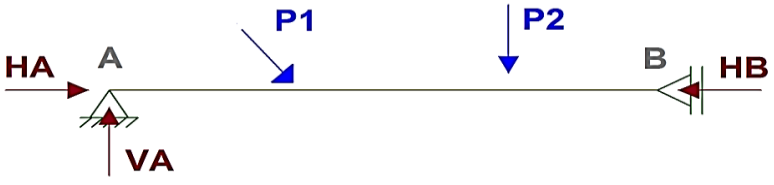
São aquelas capazes de permanecerem em equilíbrio sob qualquer configuração de carregamento não sofrendo translação e nem rotação.

Vimos que no plano existem três possibilidades de movimento, assim uma condição necessária, mas não suficiente, para que uma estrutura seja estável no plano é possuir no mínimo três reações de apoios, desde que, elas não sejam concorrentes ou todas paralelas entre si

7.2 Conceito de estruturas instáveis

São aquelas que não são capazes de permanecerem em equilíbrio sob todas as possíveis configurações de carregamento. No plano, isso ocorre quando a estrutura possui menos de três reações de apoios ou quando ela possui três ou mais reações, tal que, elas são ou concorrentes ou todas paralelas.

Fig. 182: Estrutura instável

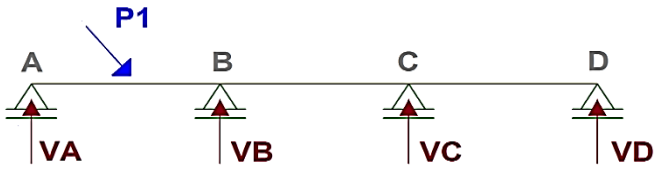


Adaptado de: Cascão, Maria (2009)

Apesar de possuir três reações a viga acima é instável, pois as reações são concorrentes no ponto A, assim não impedem o giro da barra em torno do referido ponto.

Na figura abaixo a viga possui quatro reações (VA, VB, VC e VD), porém é instável, pois as reações são paralelas e não impedem o deslocamento da viga para a direita sob a ação da componente horizontal da carga P1.

Fig. 183: Estrutura instável



Adaptado de: Cascão, Maria (2009**)**

7.3 Conceito de estaticidade de uma estrutura

De modo prático podemos entender estaticidade como sendo a capacidade de uma estrutura para manter-se estática (parada) permanecendo estável quando solicitada por cargas externas

7.4 Classificação das estruturas quanto a estaticidade

Quanto a estaticidade as estruturas podem ser classificadas em hipostáticas, isostáticas e hiperestáticas.

Adaptado de: Cascão, Maria (2009)

A) Estruturas isostáticas

São aquelas em que o número de reações é exatamente igual ao mínimo necessário para torna-la estável e estaticamente determinada, ou seja, são estruturas estáveis e nas quais as reações de apoios podem ser calculadas pela aplicação direta das equações de equilíbrio que estão disponíveis para elas.

Para que uma estrutura com mais de três reações seja isostática, é necessário que ela possua ligações internas articuladas (rótulas), pois cada rótula fornece uma equação extra de equilíbrio ($\sum M_{Rót} = 0 \rightarrow a\ soma\ dos\ momentos\ na\ rótula\ é\ ZERO$), ver item 3.2.1. Por exemplo, se uma estrutura possui quatro reações, nem concorrentes e nem paralelas, então para ser isostática deve ser estável e possuir uma rótula interna, pois assim teremos uma equação extra que somada às três equações de equilíbrio da estática completará um total de quatro

equações, assim ficaremos com quatro reações e quatro equações. Além disso deve ser estaticamente determinada, ou seja, deve ser possível calcular as reações de apoios e as reações internas na rótula aplicando diretamente as quatro equações de equilíbrio disponíveis, logo para ser isostática no plano uma estrutura deverá cumprir simultaneamente as seguintes condições:

1ª) Apresentar três ou mais reações não concorrentes e nem paralelas.

2ª) Possuir o número de reações igual ao número de equações de equilíbrio que estão disponíveis para ela (lembre-se: para qualquer estrutura estão disponíveis pelo menos as três equações de equilíbrio da estática vistas no item 6.1)

3ª) Permitir calcular as reações de apoios e as reações nos vínculos internos, se existirem, pela aplicação direta das equações de equilíbrio disponíveis para a estrutura.

(Adaptado de Leet, Kenneth; Uang, Chia-ming e Anne, Gilbert 2009)

Observe que as estruturas dos exemplos que resolvemos até aqui eram estáveis e possuíam sempre três reações não concorrentes e nem paralelas que puderam ser calculadas pela aplicação direta das equações de equilíbrio estático disponíveis para elas, logo eram todas estruturas isostáticas.

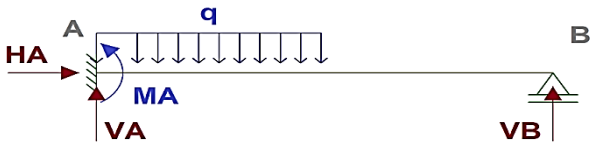
As estruturas isostáticas são os objetos de estudo dessa apostila

B) Estruturas hiperestáticas

São aquelas em que o número de reações de apoios é maior que o mínimo necessário para torná-la estável.

A estrutura abaixo é estável, e permanecerá estável mesmo que a reação VB (apoio B) seja retirada, portanto, possui mais reações (4) que o mínimo necessário (3) para ser estável, assim é hiperestática. A reação ou apoio em “excesso” são chamados de redundantes.

Figura 184: Estrutura hiperestática (“excessivamente estável”)



Fonte: autor

As estruturas hiperestáticas são também estaticamente indeterminadas, pois o número de reações é maior que o de equações de equilíbrio disponíveis. Assim as reações não podem ser obtidas pela aplicação direta das equações de equilíbrio estático disponíveis para ela.

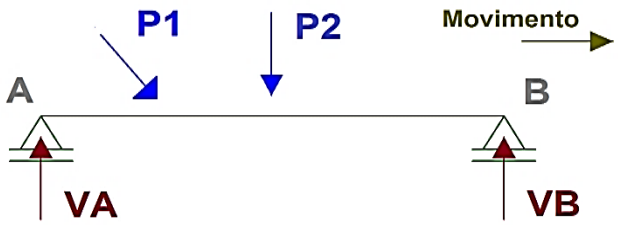
(Adaptado de Leet, Kenneth; Uang, Chia-ming e Anne, Gilbert 2009)

Nessa apostila não vamos estudar estruturas hiperestáticas.

C) Estruturas hipostáticas

São aquelas que possuem menos reações que o mínimo necessário para torna-las estáveis são, portanto, estruturas instáveis. Observe o exemplo abaixo

Figura 185: Estrutura hipostática (instável)



Adaptada de Leet (2009)

A viga acima é hipostática, pois possui apenas duas reações de apoios e, no plano, uma estrutura necessita de no mínimo três reações não concorrente e não paralelas para ser estável.

(Adaptado de Leet, Kenneth; Uang, Chia-ming e Anne, Gilbert 2009)

As estruturas hipostáticas são instáveis, assim não têm interesse para a engenharia

7.5 Grau de hiperestaticidade (gh) das estruturas:

Na prática podemos entender grau de hiperestaticidade ($\boldsymbol{gh}$) como uma medida da estaticidade de uma estrutura manter-se estática permanecendo estável quando solicitada por cargas externas. Na literatura em geral encontramos as seguintes definições:

•$gh < 0 \quad (estrutura\ hipostática não\ é\ insuficientemente\ estática, ou\ seja,\ é\ instável)$

• $gh = 0 \quad (estrutura\ isostática \rightarrow suficientemente\ estática, portanto, estável)$

• $gh > 0 (estrutura\ hiperestática\ estática\ em\ excesso, ou\ seja, excessivamente\ estável\ possuindo\ \boldsymbol{n}\ reações\ a\ mais\ do\ que\ o\ mínimo\ necessário\ para\ torná-la\ estável)$

Podemos obter uma indicação do grau de hiperestaticidade (gh) de uma estrutura através das equações abaixo retiradas de notas de aula da disciplina de Estruturas Isostáticas.

A) Para vigas:

$gh = (r - 3) - n_r$

Onde:

r→ número de reações de apoios.

3→ as três equações de equilíbrio da estática que estão disponíveis para toda estrutura.

n_r→ número de rótulas internas (rótulas são nós)

Como exemplo aplique nas vigas dos exercícios resolvidos anteriormente e obterá $gh = 0$.

Nas figuras abaixo estão mostradas duas exceções à regra:

Figura 186: Exemplos de estruturas com gh=0, mas que são hipostáticas



Fonte: Almeida, Maria (2009)

Para ambas, temos r = 3 e $n_r = 0$, logo:

$gh = (r - 3) - n_r = (3 - 3) - 0 = 0$

Porém, não são isostáticas, visto que, são instáveis. Na primeira as reações são paralelas e não impedem o movimento da viga na direção horizontal, na segunda são concorrentes e não impedem o giro da viga em torno do apoio A.

B) Para pórticos:

$gh = (3b + r) - 3n - l_1 - l_2 \ldots$

Onde:

b→ número de barras que formam o pórtico

r→ número de reações de apoios

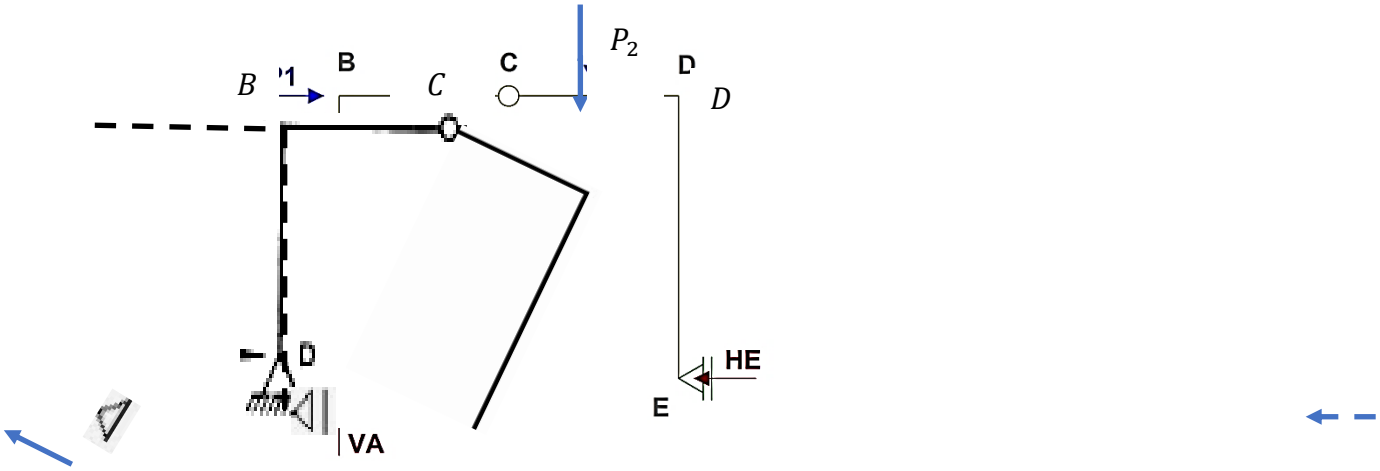
n→ número de nós na estrutura (rótulas são nós)

$l_1 = (b_1 - 1)$→ número de barras que chegam na rótula 1 menos 1

$l_2 = (b_2 - 1)$→ número de barras que chegam na rótula 2 menos 1 e assim por diante.

Abaixo mostramos uma exceção à regra

Figura 187: Exemplos de estrutura com gh=0, mas que é hipostática



Fonte: autor

Temos: barras = 3; reações = 4; nós = 4, rótulas 1, logo l1 = (2-1), logo:

$gh = (3b + r) - 3n - l_1 \Rightarrow gh = (3 * 4 + 4) - 3 * 5 - (2 - 1)$ = 16-15-1 = 16 – 16 = 0

porém, não é isostática, pois é internamente instável. Observe, na figura à direita, que as reações impedem a rotação e o deslocamento da estrutura como um corpo rígido, mas não impedem o giro, devido a carga P2, da parte CDE em relação a parte ABC

C) Para treliças

$gh = (b + r) - 2n$

Onde:

b→ número de barras

r→ número de reações

n→ número de nós

Essas equações fornecem uma condição necessária, mas não suficiente, para determinação do grau de hiperestaticidade de uma estrutura. Em cada caso deve-se analisar também a estabilidade da estrutura para confirmar o resultado.

7.6 VIGAS GERBER

As vigas Gerber são utilizadas em estruturas pré moldadas e, de modo prático, podem ser definidas como um conjunto de vigas onde uma ou mais têm estabilidade própria e servem de apoio para outras que não têm estabilidade própria. Os vínculos internos entre elas funcionam como articulações, ou seja, não impedem a rotação entre as vigas sendo nula a reação momento. Portanto, nesses vínculos internos as reações são apenas duas forças internas que impedem deslocamentos relativos entre as vigas. Adaptado de: Júnior, Eloy 1999

As figuras abaixo mostram a representação de uma viga Gerber utilizada em pontes e o detalhe da ligação entre elas chamada de dente Gerber

Figura 188: Grau de hiperestaticidade

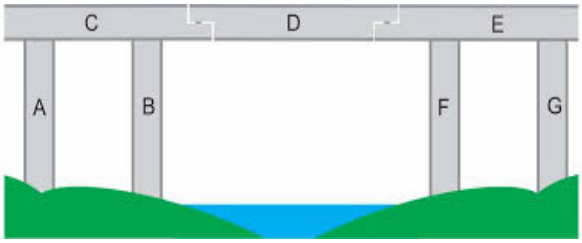
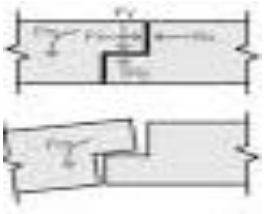


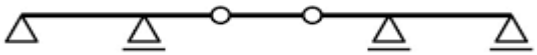
Figura 189: Dente Gerber



Fonte: internet(nippromove.hospedagemdesites.ws)

O modelo estrutural para a viga Gerber CDE da figura acima está representado abaixo.

Figura 190: Representação de uma viga Gerber



Fonte: internet(ecivilnet.com)

Os círculos representam os dentes Geber funcionando como rotulas

7.7 Reações de apoios em vigas geber

O cálculo das reações deve começar pelas vigas sem estabilidade própria (aquelas apoiadas sobre outras) sendo útil o seguinte roteiro:

A) Desmembrar a viga Geber nas rótulas e resolver primeiro as vigas sem estabilidade própria acrescentando na rótula dessas vigas um apoio do 1° ou do 2° gênero (1 ou 2 reações) de modo a transformar a viga sem estabilidade própria numa viga isostática (estável e estaticamente determinada).

B) aplicar as equações de equilíbrio da estática para calcular as reações externas e internas (na rótula) da viga sem estabilidade própria

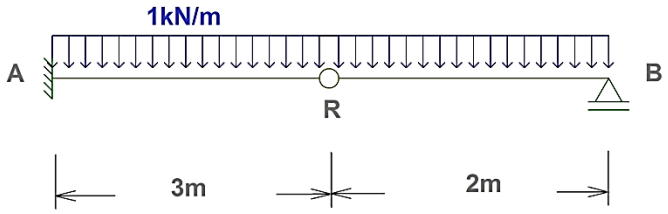
C) transferir as reações internas (reações na rótula) com os sentidos invertidos para a outra parte da estrutura e resolvê-la. Continuar essa sequência até que todas as vigas tenham sido resolvidas.

D) Fazer o DCL final da viga (se necessário)

Exemplos:

1°) Calcule as reações de apoios para a viga Geber abaixo e mostre o DCL final.

Figura 191: gh para pórticos



Fonte: autor

RESP:

A) Grau de hiperestaticidade (gh):

Aplicando a equação da letra A do item (7.3.2), temos:

$gh = (r - 3) - n_r \quad \Rightarrow gh = (4 - 3) - 1 = 4 - 4 = 0$ (possivelmente isostática)

B) Reações de apoios:

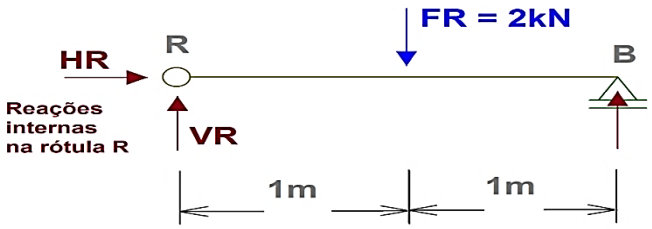
Para calcular as reações desmembramos a viga Gerber AB na viga AR (estável) e na viga RB sem estabilidade própria, pois ela está apoiada na viga AR através da rótula, assim deve ser resolvida primeiro. Veja ainda que o apoio B oferece uma reação para a viga RB, então devemos acrescentar na rótula (R) um apoio do 2° gênero, pois necessitamos de mais duas reações para tornar a viga RB isostática e, portanto, estável e estaticamente determinada.

DCL inicial da viga RB:

• Força resultante F_R e seu ponto de aplicação

FR_{RB} = A_{RB} = (L_{RB} x q) = (2 x 1) = **2 KN** e $\overline{X_R}$ = L_{RB} / **2** = 2 / 2 = **1m**

Figura 192: Viga RB



Fonte: autor

• Aplicando as equações de equilíbrio da estática, temos:

$\sum F_H = 0 \therefore \boldsymbol{H_R = 0\ KN}$

$\sum M_R = 0 \ \therefore \ 2V_B - 2 * 1 = 0 \Rightarrow 2V_B - 2 = 0 \Rightarrow 2V_B = 2 \Rightarrow \boldsymbol{V_B = 1\ KN}$

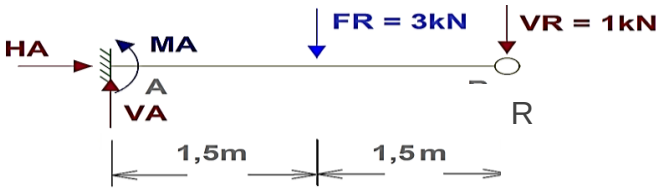
$\sum F_V = 0 \ \therefore V_R + V_B - 2 = 0 \Rightarrow V_R + 1 - 2 = 0 \Rightarrow V_R - 1 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{V_R = 1\ KN}$

• Transferindo os esforços internos e resolvendo a viga AR:

FR_{AR} = A_{AR} = (L_{AR} x q) = (3 x 1) = **3 KN**

$\overline{X_A}$ = L_{AR} / **2** = 3 / 2 = **1,5 m**

Figura 193: Viga AR



Fonte: autor

Aplicando as equações de equilíbrio da estática, temos:

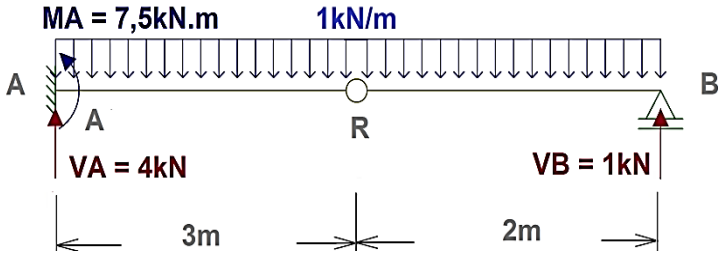
$\sum F_H = 0 \therefore \boldsymbol{H_A = 0\ KN}$

$\sum M_A = 0 \ \therefore \ M_A - 1 * 3 - 3 * 1{,}5 = 0 \Rightarrow M_A - 7{,}5 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{M_A = 7{,}5\ KN.m}$

$\sum F_V = 0 \ \therefore V_A - V_R - 3 = 0 \Rightarrow V_A - 1 - 3 = 0 \Rightarrow V_A - 4 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{V_A = 4\ KN}$

D) DCL final da viga Gerber.

Figura 194: Exemplo 1



Fonte: autor

• Observe que a viga AB é estável e possui quatro reações nem concorrentes e nem paralelas, ou seja possui três ou mais reações.

• A rótula R oferece uma equação extra($\sum M_R = 0$)que somada as três equações da estática fornece também quatro equações, portanto, o número de reações (incógnitas) é igual ao número de equações de equilíbrio que estão disponíveis para a estrutura.

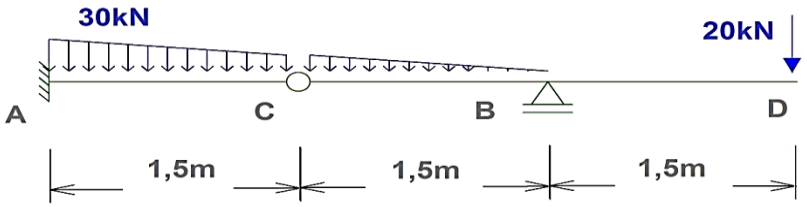
• As reações de apoios e as reações na rótula interna foram obtidas aplicando-se diretamente as equações de equilíbrio disponíveis para a estrutura

Portanto, a estrutura é isostática, ou seja, estável e estaticamente determinada.

Ver as condições A, B e C da letra A do item 7.3.1

2°) Calcule as reações de apoios para a viga Geber abaixo e mostre o DCL final.

Fig. 195: Exemplo 2



RESP:

A) Grau de hiperestaticidade (gh)*:*

Aplicando a equação da letra A do item 7.3.2, temos:

$gh = (r - 3) - n_r \quad \Rightarrow gh = (4 - 3) - 1 = 4 - 4 = 0 \quad (possivelmente\ isostática)$

B) Reações de apoios:

Para calcular as reações desmembramos a viga Gerber AD na viga AC (estável) e na viga CBD sem estabilidade própria, pois ela está apoiada na viga AC através da rótula, assim deve ser resolvida primeiro. Veja que o apoio B oferece apenas uma reação para a viga CBD, então devemos acrescentar na rótula C um apoio do 2° gênero, pois necessitamos de mais duas reações para tornar a viga CBD isostática (estável e estaticamente determinada).

C) DCL inicial da viga CBD

Para encontrar a resultante do carregamento triangular, no trecho CB, precisamos calcular a carga concentrada q_{CB} no ponto C. Aplicando semelhança de triângulos para o trecho ACB (fig. 196), temos:

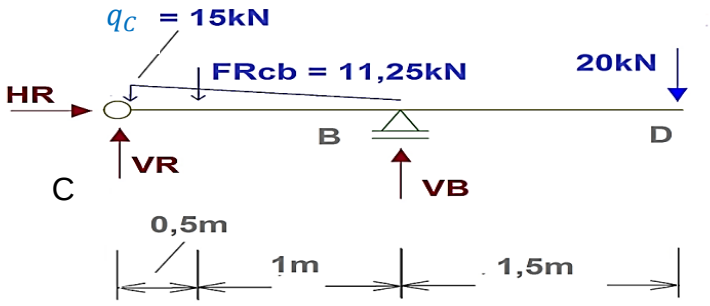
$$\frac{q_C}{1{,}5} = \frac{30}{3} \Rightarrow q_C = \frac{30 * 1{,}5}{3} \Rightarrow \boldsymbol{q_C = 15\ KN}$$

Logo:

FR_{CB} = A_{CB} = (L_{RB} x q) / 2 = (1,5 x 15) / 2 = **11,25 KN**

$\overline{X_C}$ **= L_{CB} / 3** = 1,5 / 3 = **0,5 m**

Figura 196: Exemplo 2



Fonte: autor

$VR\ e\ HR\ são\ as\ reações\ internas\ na\ rótula\ C$

Aplicando as equações da tabela 01 (item 5.2.5), temos

FR_{CB} = A_{CB} = (L_{CB} x q) / 2 = (1,5 x 15) / 2 = **11,25 KN**

$\overline{X_C}$ **= L_{CB} / 3** = 1,5 / 3 = **0,5 m**

D) Aplicando as equações de equilíbrio da estática, temos:

$$\sum F_H = 0 \therefore \boldsymbol{H_R = 0\ KN}$$

$$\sum M_C \circlearrowleft = 0 \ \therefore\ -11{,}25 * 0{,}5 + 1{,}5V_B - 20 * 3 = 0 \Rightarrow 1{,}5V_B - 5{,}625 - 60 = 0$$

$$1{,}5V_B - 65{,}625 = 0 \Rightarrow 1{,}5V_B = 65{,}625 \Rightarrow \boldsymbol{V_B = 43{,}75\ KN}$$

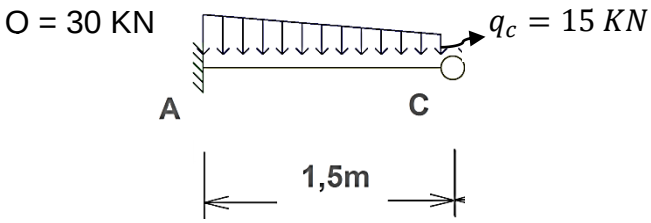
$$\sum F_V = 0 \ \therefore V_R + V_B - 11{,}25 - 20 = 0 \ \Rightarrow \ V_R + 43{,}75 - 11{,}25 - 20 = 0$$

$$V_R + 12{,}5 = 0 \ \Rightarrow \ \boldsymbol{V_R = -12{,}5\ KN}$$

(O sinal negativo indica que o sentido correto de $\boldsymbol{V_R}$ **é** para baixo e como os esforços internos são transferidos para a outra parte com sentido invertido $\boldsymbol{V_R}$ ficará para cima na rótula C da viga AC)

E) Encontrando a resultante do carregamento trapezoidal sobre a viga AC e o seu ponto de aplicação

Figura 197: Exemplo 2



Fonte: autor

Aplicando as equações da tabela 01 (item 5.2.5), temos

• Força resultante

FR_{AC} = A_{Trap} = (30 + 15).1,5 / 2 = **33,75 KN**

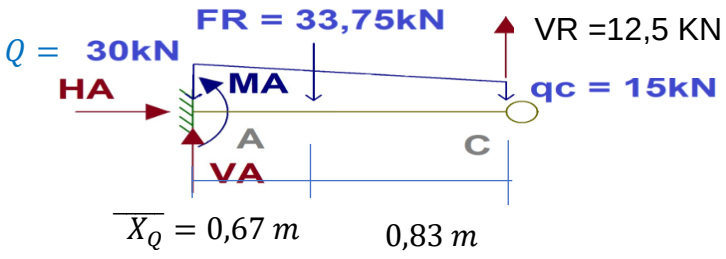
• Ponto de aplicação da resultante em relação a carga Q

$$\overline{\mathbf{X_A}} = \frac{\boldsymbol{L(Q + 2.q_C)}}{\boldsymbol{3(Q + Q)}} = \frac{1{,}5(30 + 2 * 15)}{3(30 + 15)} = \boldsymbol{0{,}67\ m}$$

F) Localizando a resultante e transferindo a reação VR para a viga AC

DCL inicial da viga AC

Figura 198: Exemplo 2



Fonte: autor

G) Agora calculamos as reações no apoio A plicando as equações de equilíbrio da eatática:

$$\sum F_H = 0 \ \therefore \ \boldsymbol{H_A = 0\ KN}$$

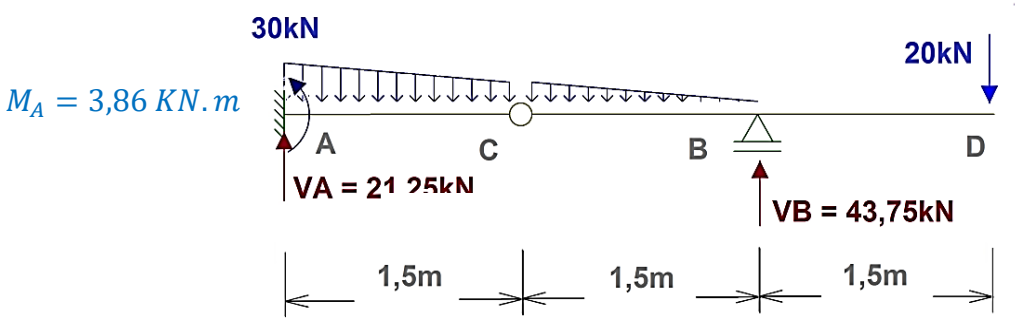
$$\sum M_A \circlearrowleft = 0 \ \therefore \ M_A + 12{,}5 * 1{,}5 - 33{,}75 * 0{,}67 = 0 \ \Rightarrow \ M_A + 18{,}75 - 22{,}61 = 0$$

$M_A - 3{,}86 = 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{M_A = 3{,}86\ KN.m}$

$\sum F_V = 0 \;\therefore V_A + 12{,}5 - 33{,}75 = 0 \;\Rightarrow\; V_A - 21{,}25 = 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{V_A = 21{,}25\ KN}$

H) DCL final da viga Gerber

Figura 199 **– Exemplo 2**



Fonte: autor

• Observe que a viga ACBD é estável e possui quatro reações ou seja possui três ou mais reações nem concorrentes e nem paralelas.

• A rótula C oferece uma equação extra($\sum M_C = 0$) que somada as três equações da estática fornece também quatro equações, portanto, o número de reações (incógnitas) é igual ao número de equações de equilíbrio que estão disponíveis para a estrutura.

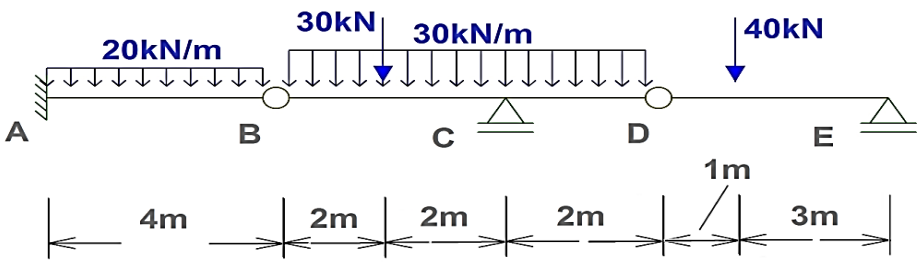
• As reações de apoios e as reações na rótula interna foram obtidas aplicando-se diretamente as equações de equilíbrio disponíveis para a estrutura

Portanto, a estrutura é isostática, ou seja, estável e estaticamente determinada.

Ver as condições A, B e C da letra A do item 7.3.1

3°) Calcule as reações de apoios para a viga Geber abaixo e mostre o DCL final.

Figura 200: Exemplo 3



Fonte: Júnior, Eloy (1999)

RESP:

A) *Grau de hiperestaticidade* gh

Aplicando a equação da letra A do item 7.3.2, temos:

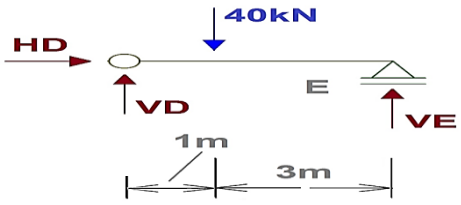
$gh = (r-3) - n_r \quad \Rightarrow gh = (5-3) - 2 = 5 - 5 = 0 \;\; (possivelmente\ isostática)$

B) Reações de apoios

Para calcular as reações desmembramos a viga AE nas rótulas em três vigas AB, BD DE. As vigas BD e DE não possuem estabilidade própria (apoiadas), assim devem ser resolvidas primeiro. Vamos começar a resolução pela viga de extremidade DE. Veja que ela necessita de mais duas reações (apoio do 2° gênero) para tornar-se estável e determinada (isostática), assim:

DCL inicial da viga DE

Figura 201: Viga DE



Fonte: autor

$VD\ e\ HD\ são\ reações\ internas\ na\ rótula$

B) Aplicando as equações de equilíbrio da estática, temos:

$\sum F_H = 0 \therefore \; \boldsymbol{H_D = 0\ KN}$

$\sum M_D = 0 \;\; \therefore \;\; 4V_E - 40 * 1 = 0 \;\Rightarrow 4V_E - 40 = 0 \;\Rightarrow 4V_E = 40 \;\Rightarrow \; \boldsymbol{V_E = 10\ KN}$

$\sum F_V = 0 \;\; \therefore V_D + V_E - 40 = 0 \;\Rightarrow \; V_D + 10 - 40 = 0 \;\Rightarrow V_D - 30 = 0 \;\Rightarrow \; \boldsymbol{V_D = 30\ KN}$

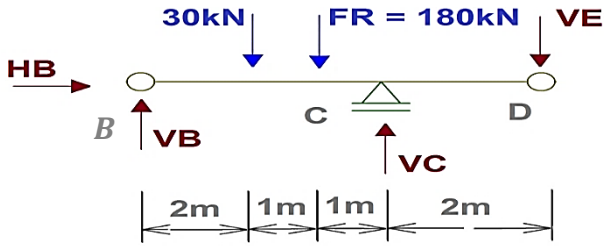
C) Transferindo os esforços internos e resolvendo a viga BD (DCL inicial):

Dos exemplos anteriores e da tabela 01 (item 5.1.4.2.2), vem

FR_{BD} = A_{BD} = (L_{BD} x q_{BD}) = (30 x 6) = **180 KN**

$\overline{X_B}$ **= L_{BD} / 2** = 6 / 2 = **3 m**

Figura 202: Exemplo 2°



Fonte: autor

$VB\ e\ HB\ são\ reações\ internas\ na\ rótula$

Aplicando as equações de equilíbrio da estática, temos:

$\sum F_H = 0 \therefore\ \boldsymbol{H_B = 0\ KN}$

$\sum M_B = 0\ \therefore\ 4V_C - 30 * 2 - 180 * 3 - 30 * 6 = 0\ \Rightarrow\ 4V_C - 60 - 540 - 180 = 0$

$4V_C - 780 = 0\ \Rightarrow\ 4V_C = 780\ \Rightarrow\ \boldsymbol{V_C = 195\ KN}$

$\sum F_V = 0\ \therefore V_B + V_C - 30 - 180 - 30 = 0\ \Rightarrow\ V_B + 195 - 240 = 0$

$V_B - 45 = 0\ \Rightarrow\ \boldsymbol{V_B = 45\ KN}$

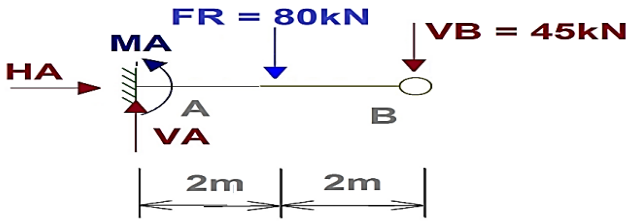
D) Transferindo os esforços internos e resolvendo a viga AB (DCL inicial):

Dos exemplos anteriores e da tabela 01 (item 5.1.4.2.2), vem

$FR_{AB} = A_{AB} = (L_{AB} \times q_{AB}) = (20 \times 4) =$ **80 KN**

$\boldsymbol{\overline{X_A} = L_{AB} / 2} = 4/2 =$ **2 m**

Figura 203: Viga AB



Fonte: autor

Aplicando as equações de equilíbrio da estática, temos:

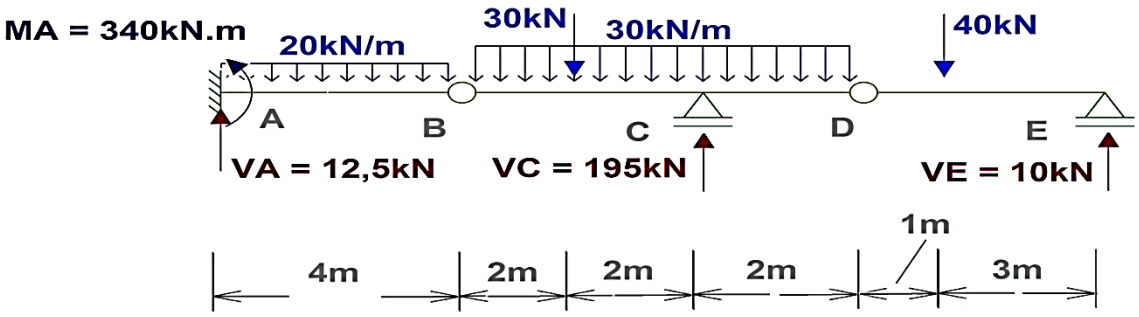
$\sum F_H = 0 \therefore\ \boldsymbol{H_A = 0\ KN}$

$\sum M_A = 0\ \therefore\ M_A - 80 * 2 - 45 * 4 = 0\ \Rightarrow\ M_A - 340 = 0\ \Rightarrow\ \boldsymbol{M_A = 340\ KN.m}$

$\sum F_V = 0\ \therefore V_A - 80 - 45 = 0\ \Rightarrow\ V_A - 125 = 0\ \Rightarrow\ \boldsymbol{V_A = 125\ KN}$

DCL final da viga Geber AE:

Figura 204: Exemplo 3



Fonte: Júnior, Eloy (1999)

• Observe que a viga ABCDE possui cinco reações nem concorrentes e nem paralelas, ou seja possui três ou mais reações.

• Cada rótula oferece uma equação extra($\sum M_{Rót} = 0$)que somadas as três equações da estática fornecem também cinco equações, portanto, o número de reações (incógnitas) é igual ao número de equações de equilíbrio que estão disponíveis para a estrutura.

• As reações de apoios, incógnitas do problema, podem ser obtidas aplicando-se diretamente as equações de equilíbrio disponíveis

Portanto, a estrutura é isostática (estável e estaticamente determinada).

Ver as condições A, B e C da letra A do item 7.3.1.

CAPÍTULO VIII

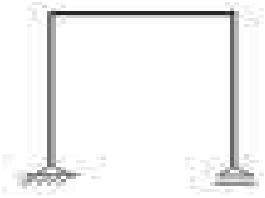
8. Estruturas reticuladas planas: conceito e reações de apoios

8.1 Conceito de estruturas reticuladas planas

Estruturas reticuladas planas são aquelas constituídas por duas ou mais barras coplanares interligadas através de nós rígidos ou articulados.

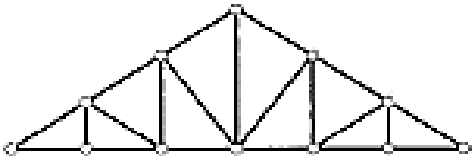
As figuras abaixo são representações do modelo estrutural de um pórtico e de uma treliça planos exemplos de estruturas reticuladas planas.

Figura 205 - Pórtico



Fonte: internet(slideplayer.com.br)

Figura 206 - Treliça



Fonte: internet(bemvi.org)

Na representação do modelo matemático para o cálculo das reações de apoios em estruturas reticuladas são utilizadas as seguintes convenções:

A) As barras que constituem a estrutura são definidas por um nó inicial e um nó final 

B) Nó rígido é aquele que não permite rotação das barras sendo representado por uma bolinha cheia •

C) Nó articulado (rótula) é aquele que permite a rotação das barras que conecta, portanto não transmite momento entre as barras sendo representado por uma bolinha vazia (o)

Adaptado de: Júnior, Eloy (1999) e de Almeida, Maria (2009)

8.2 Pórticos planos

Estrutura reticulada plana em que as barras são conectadas somente por nós rígidos ou por nós rígidos e articulados formando um quadro aberto.

Adaptado de: Júnior, Eloy (1999) e de Almeida, Maria (2009)

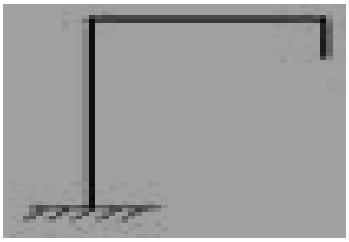
8.3 Principais tipos de pórticos isostáticos quanto as condições de apoio e de vinculação entre as barras

Neste item veremos os principais tipos de pórticos planos

A) Pórtico livre e engastado ou em balanço:

São estruturas tipo pórtico não rotuladas e engastadas numa extremidade e livres na outra como mostra a figura abaixo.

Figura 207 - Pórtico em balanço

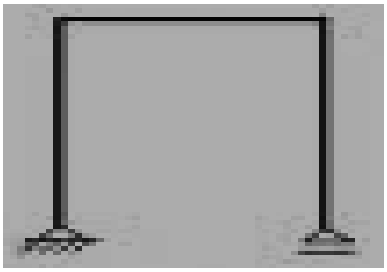


Fonte: internet(slideplayer.com.br)

B) Pórticos bi-apoiados:

São aqueles que possuem dois apoios sendo um do 1° e o outro do 2° gênero e sem rótulas internas como mostra a figura abaixo.

Figura 208 – Pórtico bi-apoiado

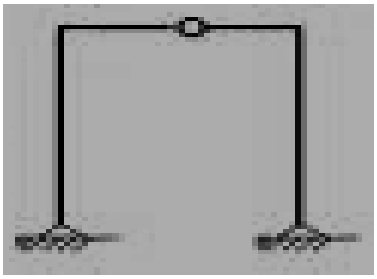


Fonte: internet(slideplayer.com.br)

C) Pórticos tri-articulados

São aqueles que possuem dois apoios do 2° gênero e uma rótula interna como mostra a figura abaixo

Figura. 209 – Pórtico tri-articulado

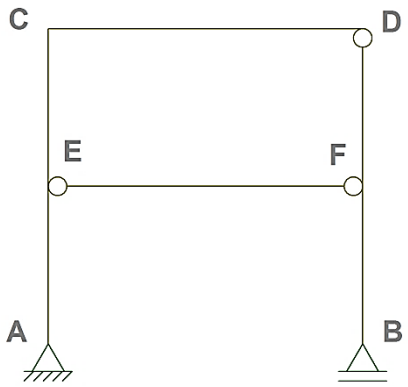


Fonte: internet(slideplayer.com.br)

D) Pórticos com tirante ou com escora

São pórticos biapoiados com uma rótula interna e uma barra de ligação descarregada e rotulada nas extremidades e que funciona como um tirante quando tracionada ou como uma escora quando comprimida.

Figura 210 – Pórtico atirantado



Fonte: Adaptado de Sussekind 1981

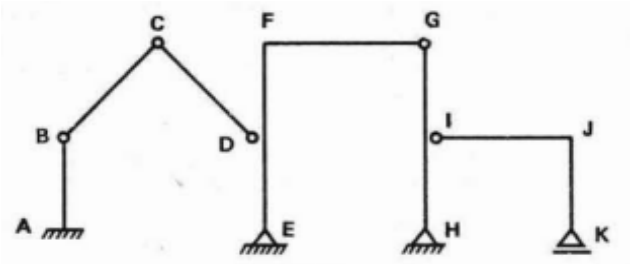
E) Pórticos compostos

São aqueles que possuem dois ou mais apoios sendo ao menos um deles um engaste. Esses pórticos podem ser desmembrados em uma ou mais partes com estabilidade própria e em outra(s) sem estabilidade própria

Fig.211 – Pórtico livre



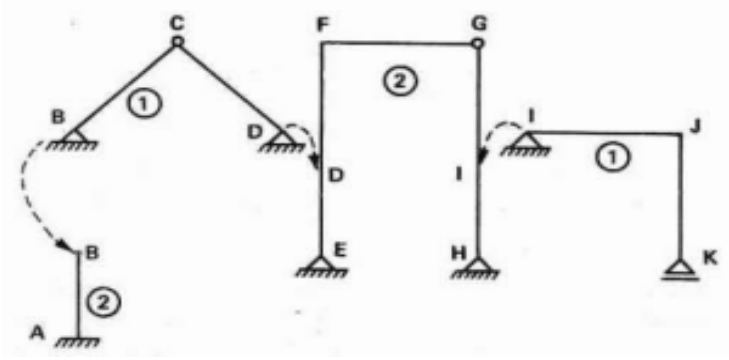
Fig. 212 – Pórtico composto



Fonte: Sussekind 1981

No pórtico da esquerda a parte que possui estabilidade própria é a barra engastada e livre CD enquanto que no pórtico da direita as partes que possuem estabilidade própria são: a barra engastada e livre AB, e o pórtico tri-articulado EFGH. Os pórticos BCD e IJK são os que não possuem estabilidade própria. A figura abaixo mostra a decomposição do pórtico da direita da figura acima.

Figura 213- Pórtico composto desmembrado



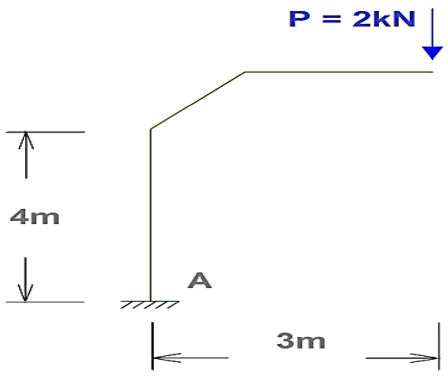
Fonte: Sussekind 1981

8.4 Reações de apoios em pórticos engastado e livre e em pórticos bi-apoiados

Nesses pórticos as reações de apoios são calculadas construindo-se o DCL inicial e aplicando-se diretamente as três equações de equilíbrio da estática. Acompanhe a resolução dos exemplos a seguir

1°) Calcule o grau de hiperestaticidade, as reações de apoios e mostre o DCL final para o pórtico engastado e livre abaixo.

Figura 214 – Exemplo 1



Fonte: autor

RESP:

A) Grau de hiperestaticidade gh

Aplicando a equação da letra B do item 7.3.2 (não existem rótulas, logo l1 = l2 = 0), assim temos:

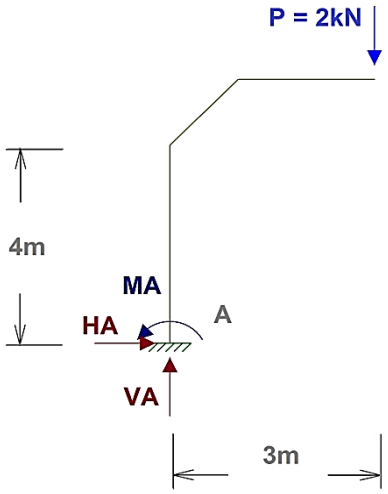
$gh = (3b + r) - 3n - l_1 - l_2 \ldots \Rightarrow gh = (3 * 3 + 3) - 3 * 4 - 0 = 12 - 12 = 0$

$(possivelmente\ isostático)$

B) Reações de apoios:

DCL inicial:

Figura 215 – Exemplo 1



Fonte: autor

Aplicando as equações de equilíbrio da estática, temos:

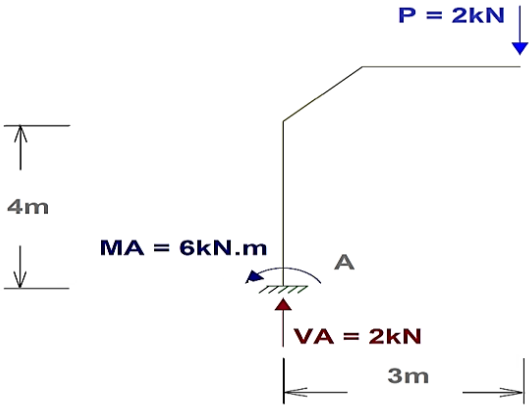
$\sum F_H = 0 \therefore \boldsymbol{H_A = 0\ KN}$

$\sum M_A = 0 \ \therefore \ M_A - 2 * 3 = 0 \ \Rightarrow \ M_A - 6 = 0 \ \Rightarrow \ \boldsymbol{M_A = 6\ KN.m}$

$\sum F_V = 0 \ \therefore V_A - 2 = 0 \quad \Rightarrow \ \boldsymbol{V_A = 2\ KN}$

DCL final**:**

Figura 216 – Exemplo 1



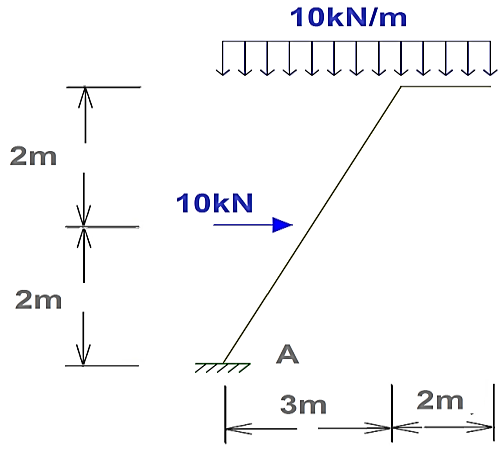
Fonte: autor

Portanto, isostático

Ver as condições A, B e C da letra A do item 7.3.1

2°) Calcule o grau de hiperestaticidade, as reações de apoios e mostre o DCL final para o pórtico engastado e livre abaixo.

Figura 217 – Exemplo 2



Adaptado de: Júnior, Eloy (1999)

RESP:

A) Grau de hiperestaticidade gh:

Aplicando a equação da letra B do item 7.3.2 (não existem rótulas, logo l = 0), temos:

$gh = (3b + r) - 3n - l_1 - l_2 \ldots \quad \Rightarrow gh = (3 * 2 + 3) - 3 * 3 - 0 = 9 - 9 = 0$

$(possivelmente\ isostático$

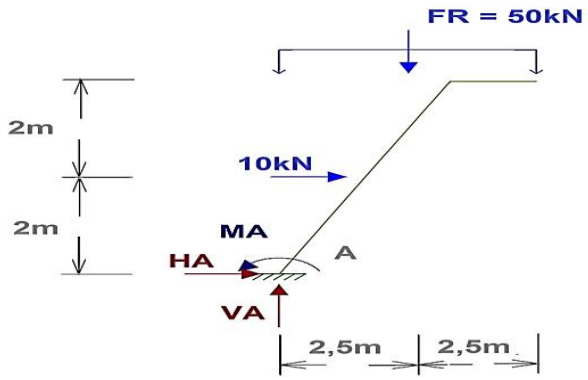
B) Reações de apoios:

DCL inicial:

Dos exemplos anteriores e da tabela 01 (item 5.1.4.2.2) sabemos que:

a) $\boldsymbol{F_R = A_{Ret}} = 10\,x\,5 = \boldsymbol{50\ KN}$ $\qquad\qquad$ $\overline{x_A} = \frac{5}{2} = \boldsymbol{2,5\ m}$

Figura 218 – Exemplo 2



Fonte: adaptado de: Júnior, Eloy (1999)

Aplicando as equações de equilíbrio da estática, temos:

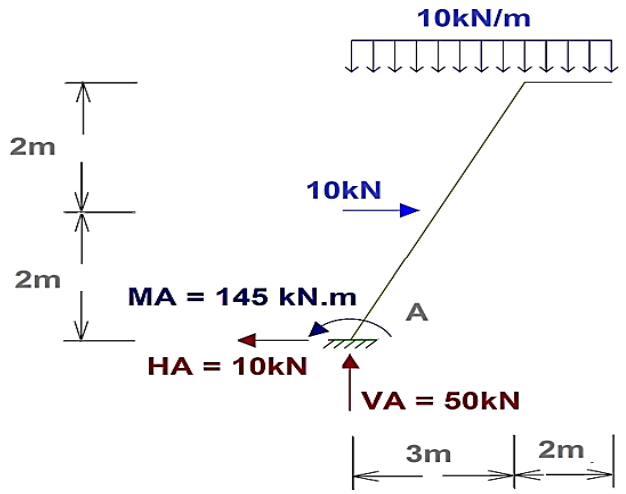
$\sum F_H = 0 \therefore\ H_A + 10 = 0 \Rightarrow\ H_A = -10\,KN\ \ (inverter\ o\ sentido\ no\ DCL\ final)$

$\sum M_A = 0\ \therefore\ M_A - 10 * 2 - 50 * 2{,}5 = 0 \Rightarrow\ M_A - 145 = 0 \Rightarrow\ \boldsymbol{M_A = 145\ KN.m}$

$\sum F_V = 0\ \therefore V_A - 50 = 0 \quad \Rightarrow\ \boldsymbol{V_A = 50\ KN}$

DCL final**:**

Figura 219 – Exemplo 2



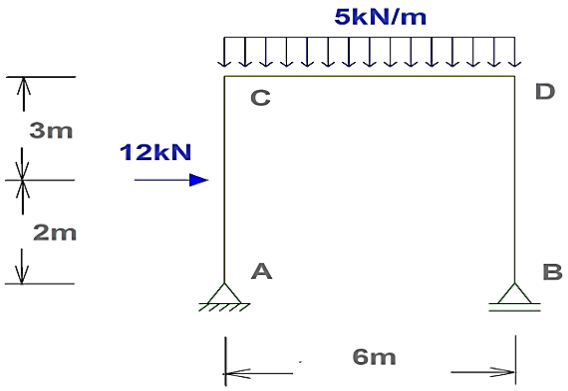
Fonte: Adaptado de: Júnior, Eloy (1999)

Portanto, isostático

Ver as condições A, B e C da letra A do item 7.3.1

3°) Calcule o grau de hiperestaticidade, as reações de apoios e mostre o DCL final para o pórtico biapoiado abaixo.

Figura 220 – Exemplo 1°



Fonte: Cascão, Maria (2009)

RESP:

A) Grau de hiperestaticidade gh:

Aplicando a equação da letra B do item 7.3.2 (não existem rótulas, logo l = 0), temos:

$gh = (3b + r) - 3n - l_1 - l_2 \ldots \quad \Rightarrow gh = (3 * 3 + 3) - 3 * 4 - 0 = 12 - 12 = 0$

$(possivelmente\ isostático)$

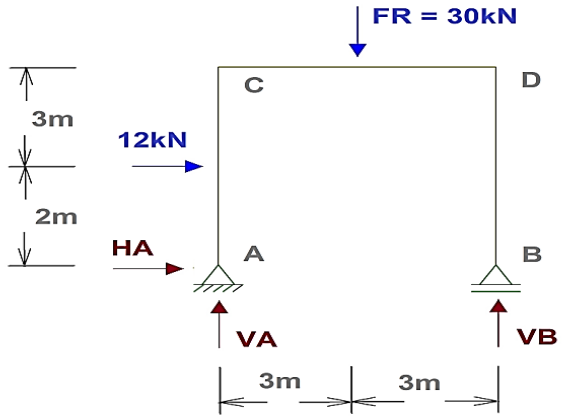
B) Reações de apoios

DCL inicial:

Dos exemplos anteriores e da tabela 01 (item 5.1.4.2.2) sabemos que:

a) $\boldsymbol{F_{R,CD} = A_{CD}} = 5\,x\,6 = \boldsymbol{30\ KN}$ $\qquad \overline{x_A} = \frac{6}{2} = \boldsymbol{3\ m}$

Figura 221- Exemplo 3



Fonte: Cascão, Maria (2009)

Aplicando as equações de equilíbrio da estática, vem:

$\sum F_H = 0 \therefore\ H_A + 12 = 0 \ \Rightarrow \ \boldsymbol{H_A = -12\ KN}\ \ (inverter\ sentido\ no\ DCL\ final)$

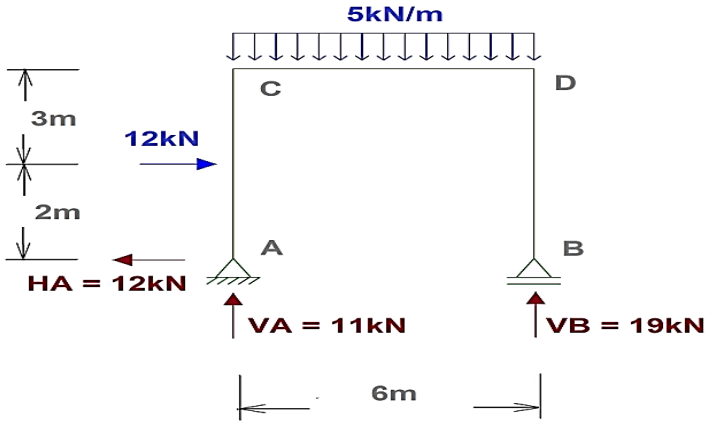
$\sum M_A \circlearrowleft = 0 \ \therefore\ 6V_B - 30 * 3 - 12 * 2 = 0 \ \Rightarrow 6V_B - 114 = 0 \Rightarrow 6V_B = 114 \Rightarrow$

$\boldsymbol{V_B = 19\ KN}$

$\sum F_H = 0 \ \therefore\ V_A + V_B - 30 = 0 \ \Rightarrow\ V_A + 19 - 30 = 0 \ \Rightarrow V_A - 11 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{V_A = 11\ KN}$

DCL final:

Figura 222 **– Exemplo 3**



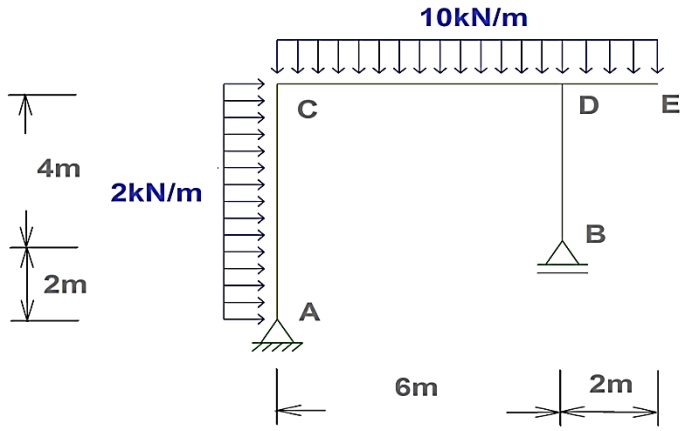
Fonte: Maria, Almeida

Portanto, isostático

Ver as condições A, B e C da letra A do item 7.3.1

4°) Calcule o grau de hiperestaticidade, as reações de apoios e mostre o DCL final para o pórtico biapoiado abaixo.

Figura 223 – Exemplo 4



Fonte: Notas de aula (Estrut. Isostáticas)

RESP:

A) Grau de hiperestaticidade gh:

Aplicando a equação da letra B do item 7.3.2 (não existem rótulas, logo l = 0), temos:

$$gh = (3b + r) - 3n - l_1 - l_2 \ldots \quad \Rightarrow gh = (3 * 4 + 3) - 3 * 5 - 0 = 15 - 15 = 0$$

$(possivelmente\ isostático)$

B) Reações de apoios:

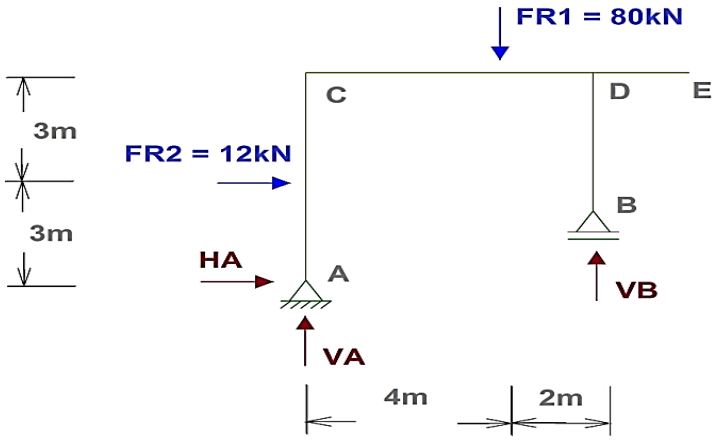
DCL inicial:

Dos exemplos anteriores e da tabela 01 (item 5.1.4.2.2) sabemos que:

a) $\boldsymbol{F_{R,AC} = A_{AC} = (2 * 6) = 12\ KN}$ $\qquad \overline{X_{AC,A}} = \frac{6}{2} = \mathbf{3\ m}$

b) $\boldsymbol{F_{R,CD} = A_{CD} = (10\ x\ 8) = 80\ KN}$ $\qquad \overline{X_{CD,A}} = \frac{8}{2} =$ $4\ \mathbf{m}$

Figura 224 – Exemplo 4



Fonte: Notas de aula (Estrut. Isostáticas)

Aplicando as equações de equilíbrio da estática, vem:

$$\sum F_H = 0 \therefore\ H_A + 12 = 0 \ \Rightarrow\ \boldsymbol{H_A = -12\ KN}\ \ (inverter\ sentido\ no\ DCL\ final)$$

$$\sum M_A \circlearrowright = 0\ \therefore\ 6V_B - 80 * 4 - 12 * 3 = 0\ \Rightarrow 6V_B - 356 = 0\ \Rightarrow 6V_B = 356$$

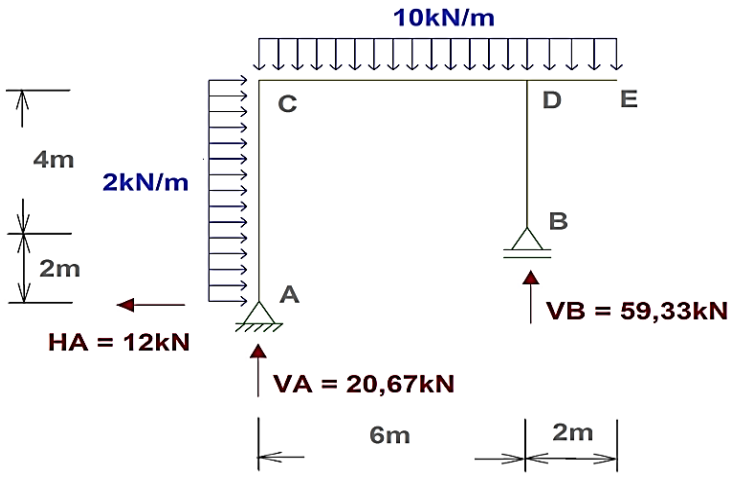
$$\boldsymbol{V_B = 59,33\ KN}$$

$$\sum F_V = 0\ \ \therefore\ V_A + V_B - 80 = 0\ \Rightarrow\ V_A + 59{,}33 - 80 = 0\ \Rightarrow V_A - 20{,}67 = 0$$

$$\boldsymbol{V_A = 20,67\ KN}$$

DCL final:

Figura 225 – Exemplo 4



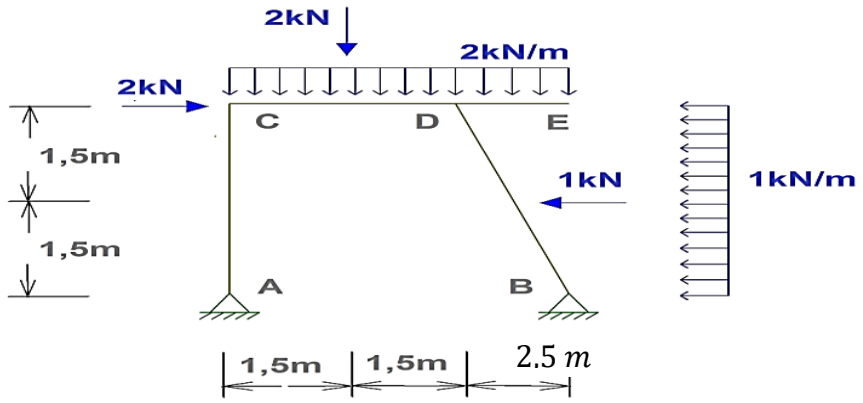
Fonte: Notas de aula (Estrut. Isostáticas)

Portanto, isostático

Ver as condições A, B e C da letra A do item 7.3.1

5°) Calcule o grau de hiperestaticidade, as reações de apoios e mostre o DCL final para o pórtico biapoiado abaixo.

Figura 226 – Exemplo 5



Fonte: internet(slideshare)

RESP:

A) Grau de hiperestaticidade gh:

Aplicando a equação da letra B do item 7.3.2 (não existem rótulas, logo l = 0), temos:

$gh = (3b + r) - 3n - l_1 - l_2 \ldots \quad \Rightarrow gh = (3 * 3 + 3) - 3 * 4 - 0 = 12 - 12 = 0$

$(possivelmente\ isostático)$

B) Reações de apoios:

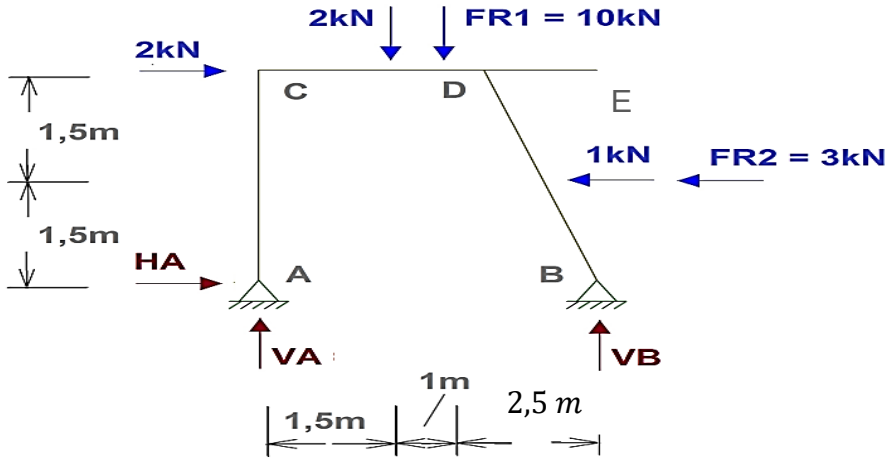
DCL inicial:

Dos exemplos anteriores e da tabela 01 (item 5.1.4.2.2) sabemos que:

a) $\boldsymbol{F_{R,CE} = A_{CE} = (2 * 5) = 10\ KN}$ $\qquad \boldsymbol{\overline{X_{CE,A}} = \frac{5}{2} = 2,5\ m}$

b) $\boldsymbol{F_{R,CB} = A_{CB} = (1 * 3) = 3\ KN}$ $\qquad \boldsymbol{\overline{X_{CB,B}} = \frac{3}{2} = 1,5\ m}$

Figura 227 – Exemplo 5



Fonte: internet(slideshare)

Aplicando as equações de equilíbrio da estática, vem:

$$\sum F_H = 0 \therefore H_A + 2 - 1 - 3 = 0 \quad H_A - 2 = 0 \quad \Rightarrow \boldsymbol{H_A = 2\ KN}$$

$$\sum M_A = 0 \ \therefore \ 5V_B - 2 * 3 - 2 * 1{,}5 - 10 * 2{,}5 + 1 * 1{,}5 + 3 * 1{,}5 = 0 \ \Rightarrow$$

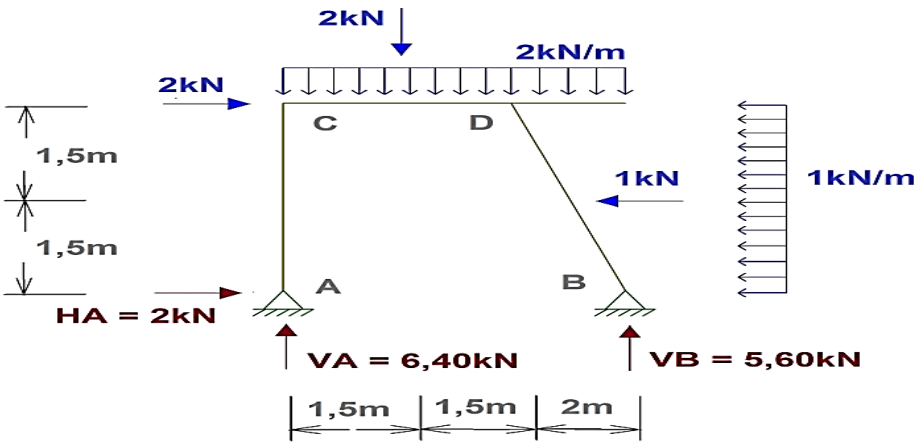
$$5V_B - 28 = 0 \ \Rightarrow \ 5V_B = 28 \ \Rightarrow \ \boldsymbol{V_B = 5{,}60\ KN}$$

$$\sum F_V = 0 \quad \therefore \ V_A + V_B - 2 - 10 = 0 \ \Rightarrow \ V_A + 5{,}6 - 2 - 10 = 0 \quad \Rightarrow V_A - 6{,}4 = 0\ KN$$

$$\boldsymbol{V_A = 6{,}40\ KN}$$

DCL final

Figura 228 – Exemplo 5



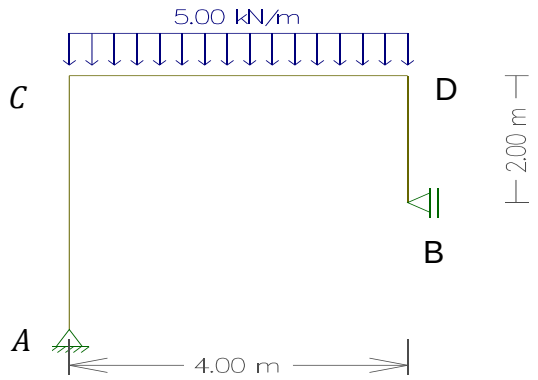
Fonte: internet (slideshare)

Portanto, isostático

Ver as condições A, B e C da letra A do item 7.3.1

6°). Calcule o grau de hiperestaticidade, as reações de apoios e mostre o DCL final para o pórtico biapoiado abaixo.

Figura 229 – Exemplo 6



Fonte: autor

RESP:

A) Grau de hiperestaticidade gh:

Aplicando a equação da letra B do item 7.3.2 (não existem rótulas, logo l = 0), temos:

$gh = (3b + r) - 3n - l_1 - l_2 \ldots \quad \Rightarrow gh = (3 * 3 + 3) - 3 * 4 - 0 = 12 - 12 = 0$

B) Reações de apoios:

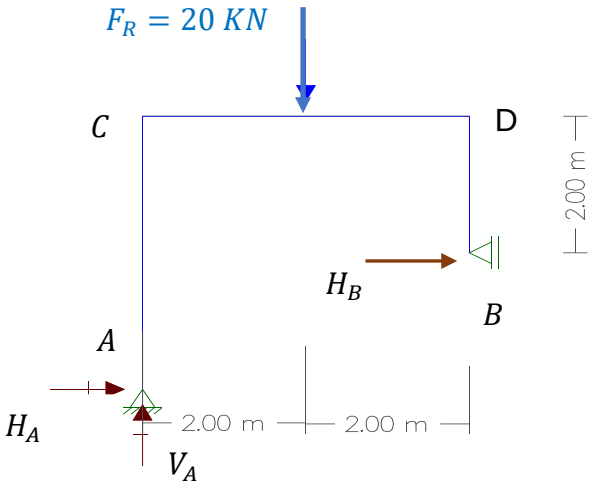
DCL inicial:

Dos exemplos anteriores e da tabela 01 (item 5.1.4.2.2) sabemos que:

a) **FR** = A = 5 x 4 = **20 KN**

b) $\overline{X_A}$ = L / 2 = 4 / 2 = **2 m**

Figura 230 – Exemplo 6



Fonte: autor

Aplicando as equações de equilíbrio da estática, vem:

$$\sum M_A = 0 \ \therefore \ -2H_B - 20 * 2 = 0 \ \Rightarrow -2H_B - 40 = 0 \ \Rightarrow -2H_B = 40 \ \Rightarrow$$

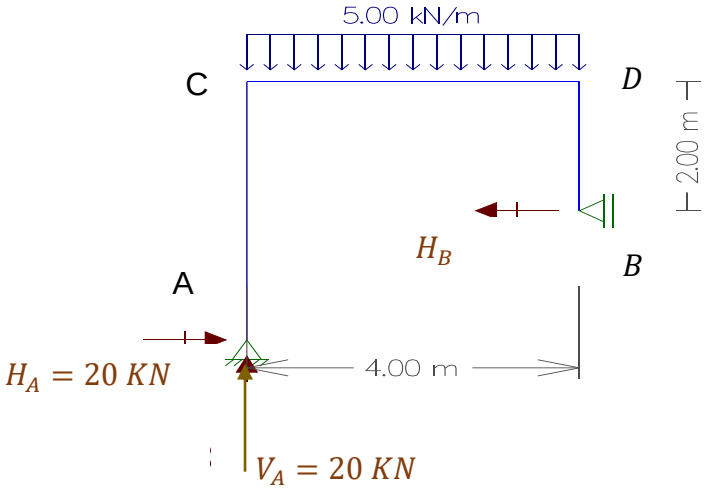
$$\boldsymbol{H_B = -20\ KN}$$

$$\sum F_H = 0 \therefore \ H_A + H_B = 0 \ \Rightarrow \ H_A - 20 = 0 \ \Rightarrow \boldsymbol{H_A = 20\ KN}$$

$$\sum F_V = 0 \ \therefore \ V_A - 20 = 0 \ \Rightarrow \ \boldsymbol{V_A = 20\ KN}$$

DCL final

Figura 231 – Exemplo 6



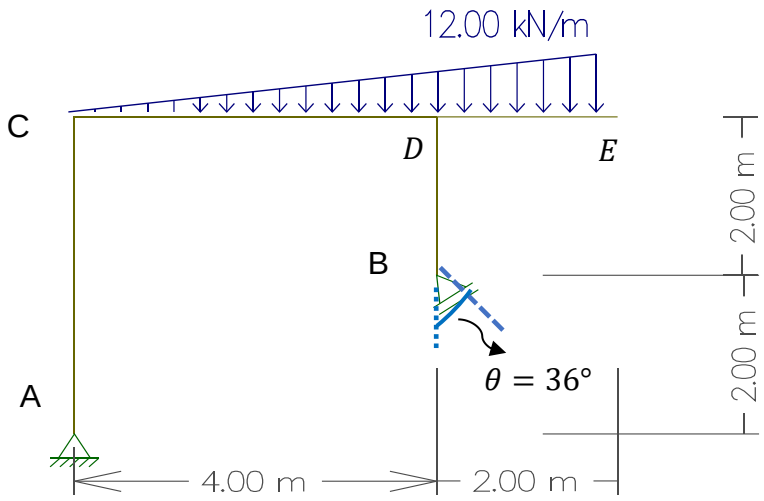
Fonte: autor

Portanto, isostático

Ver as condições A, B e C da letra A do item 7.3.1

7°). Calcule o grau de hiperestaticidade, as reações de apoios e mostre o DCL final para o pórtico biapoiado abaixo

Figura 232 – Exemplo 7



Fonte: notas de aula (estruturas Isostáticas)

RESP:

A) Grau de hiperestaticidade gh:

Aplicando a equação da letra B do item 7.3.2 (não existem rótulas, logo l = 0), temos:

$gh = (3b + r) - 3n - l_1 - l_2 \ldots \quad \Rightarrow gh = (3 * 4 + 3) - 3 * 5 - 0 = 15 - 15 = 0$

B) Reações de apoios:

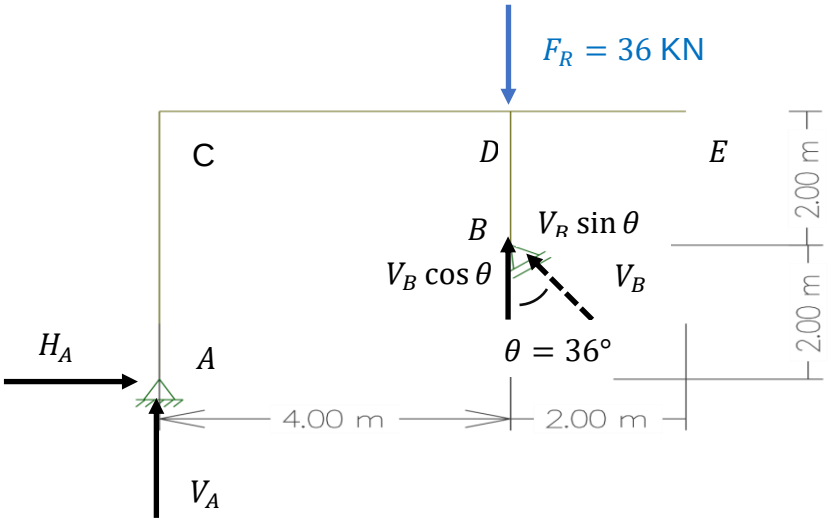
DCL inicial:

Dos exemplos anteriores e da tabela 01 (item 5.1.4.2.2) sabemos que:

a) **FR** = A = (6 x 12) / 2 = **36 KN**

b) $\overline{X_A}$ = 2.LCE / 3 = (2 x 6) / 3 = **4 m**

Figura 233 **– Exemplo 7**



Fonte: notas de aula (estruturas Isostáticas)

Aplicando as equações de equilíbrio da estática (ver DCL inicial), vem:

$$\sum M_A \circlearrowleft = 0 \therefore \ 4(V_B \cos 36°) - 36 * 4 + 2(V_B \sin 36°) = 0 \Rightarrow$$

$$3{,}24V_B - 144 + 1{,}18V_B = 0 \Rightarrow 4{,}42V_B - 144 = 0 \ \Rightarrow 4{,}42V_B = 144 \ \Rightarrow \boldsymbol{V_B = 32{,}58\ KN}$$

$$\sum F_H = 0 \therefore \ H_A - V_B \sin 36° = 0 \ \Rightarrow \ H_A - 32{,}58 \sin 36° = 0 \Rightarrow H_A - 19{,}15 = 0 \ \Rightarrow$$

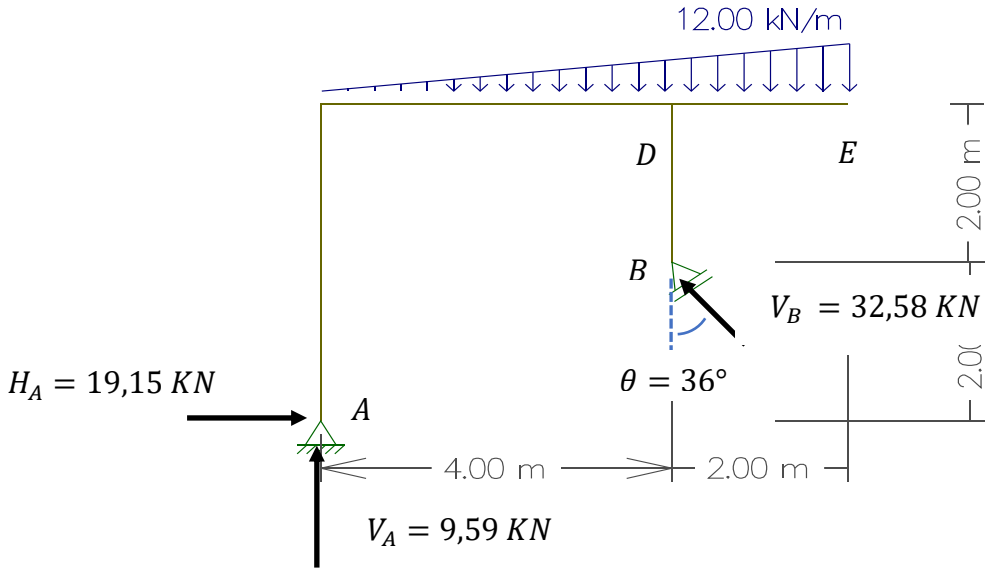
$$\boldsymbol{H_A = 19{,}15\ KN}$$

$$\sum F_V = 0 \therefore V_A + V_B \cos 36° - 36 = 0 \Rightarrow V_A + 32{,}58 \cos 36° - 36 = 0 \Rightarrow$$

$$V_A + 26{,}36 - 36 = 0 \Rightarrow V_A - 9{,}64 = 0 \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_A = 9{,}64\ KN}$$

DCL final

Figura 234 – Exemplo 7



Fonte: notas de aula (estruturas Isostáticas)

Portanto, isostático

Ver as condições A B e C da letra A do item 7.3.1

8.5 Reações de apoios em pórticos tri-articulados

Para o cálculo das reações de apoios em pórticos em pórticos tri-articulados é importante observar a posição relativa entre apoios e entre apoios e rótulas internas

1°) caso: tri-articulado de apoios alinhados

Para o cálculo das reações de apoios em pórticos tri-articulados de apoios alinhados é útil o roteiro a seguir:

A) Construir o DCL inicial e aplicar $(\sum M = 0)$ em relação a um dos apoios para obter a reação vertical no outro apoio.

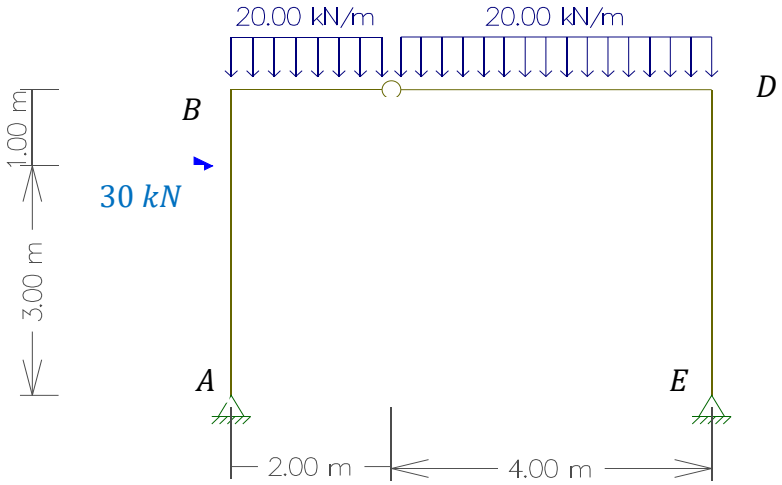
B) Aplicar $(\sum F_V = 0)$ para obter a outra reação vertical

C) Desmembrar o pórtico na rótula e construir o DCL inicial da parte a esquerda ou à direita da rótula (isolar a parte com menor número de forças, incluir as reações de apoio dessa parte no DCL e aplicar $(\sum M_{Rót} = 0)$ para obter uma das reações horizontais.

D) Aplicar $(\sum F_H = 0)$ para obter a outra reação horizontal.

1°) Calcule o grau de hiperestaticidade, as reações de apoios, as reações na rótula interna e mostre o DCL final para o pórtico tri-articulado abaixo.

Figura 235 – Exemplo 1



Fonte: Júnior, Eloy 1999

RESP:

A) Grau de hiperestaticidade gh:

Aplicando a equação da letra B do item 7.3.2 (existe 1 rótula), temos:

Lembre-se: rótulas são nós, logo BC e CD são duas barras distintas que chegam na rótula C, assim l1= (2-1) = -1

$gh = (3b + r) - 3n - l_1 - l_2$ ... $\Rightarrow gh = (3 * 4 + 4) - 3 * 5 - (2 - 1) = 16 - 15 - 1$

$gh = 16 - 16 = 0$

B) Reações de apoios:

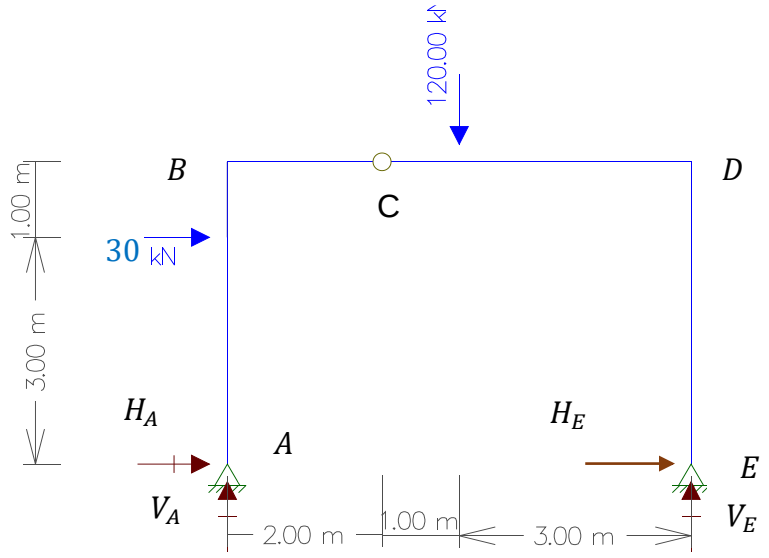
DCL inicial:

Dos exemplos anteriores e da tabela 01 (item 3.8) sabemos que:

a) **FR** = A = 20 x 6 = **120 KN**

b) $\overline{X_A}$ = L / 2 = 6 / 2 = **3 m**

Figura 236 – Exemplo 1



Fonte: Júnior, Eloy 1999

Aplicando as equações da estática, temos:

$$\sum M_A = 0 \therefore 6V_E - 3 * 120 - 30 * 3 = 0 \Rightarrow 6V_E - 450 = 0 \Rightarrow 6V_E = 450$$

$$\boldsymbol{V_E = 75\ KN}$$

$$\sum F_V = 0 \therefore V_A + V_E - 120 = 0 \Rightarrow V_A + 75 - 120 = 0 \Rightarrow V_A - 45 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{V_A = 45KN}$$

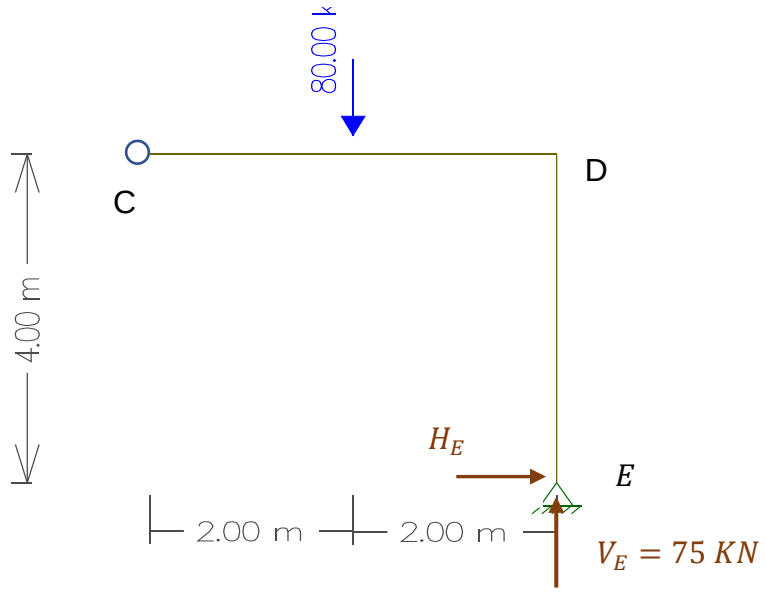
• Agora, para encontrar uma das reações horizontais vamos isolar a parte da estrutura à direita ou a esquerda da rótula C e aplicar ($\sum M_C = 0$). Isolando a parte à direita da rótula C, temos:

DCL inicial da parte CDE à direita da rótula C

• **FR** = ACD = 20 x 4 = **80 KN**

• $\overline{X_C}$ = LCD / 2 = 4 / 2 = **2 m**

Figura 237 – Exemplo 1



Fonte: autor

$$\sum M_C = 0 \therefore\ 4H_E + 4V_E - 80 * 2 = 0 \ \Rightarrow\ 4H_E + 4V_E - 160 = 0$$

$$4H_E + 4 * 75 - 160 \Rightarrow 4H_E + 300 - 160 = 0 \ \Rightarrow 4H_E + 140 = 0 \ \Rightarrow 4H_E = -140$$

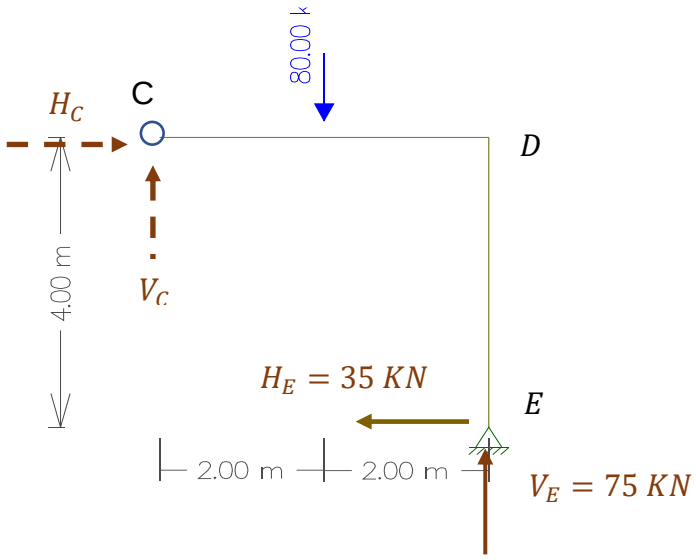
$$\boldsymbol{H_E = -35\ KN}$$

• Agora, observando o DCL inicial e aplicando ($\sum F_H = 0$), temos:

$$\sum F_H = 0 \ \therefore\ H_A + H_E + 30 = 0 \ \Rightarrow\ H_A - 35 + 30 = 0 \ \Rightarrow\ H_A - 5 = 0 \ \Rightarrow\ \boldsymbol{H_A = 5\ KN}$$

C) Reação vertical (V_C) e horizontal (H_C) na rótula interna C:

Figura 238 – Exemplo 1



Fonte: autor

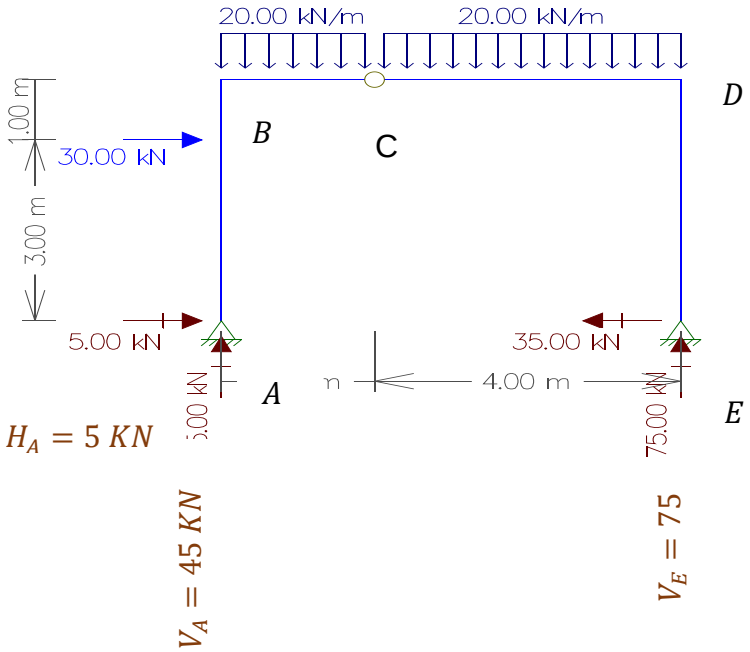
Agora, vem:

$$\sum F_V = 0 \ \therefore \ V_C + V_E - 80 = 0 \ \Rightarrow \ V_C + 75 - 80 = 0 \ \Rightarrow V_C - 5 = 0 \ \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_C = 5\ KN}$$

$$\sum F_H = 0 \ \therefore \ H_C - H_E = 0 \ \Rightarrow H_C - 35 = 0 \ \Rightarrow \quad \boldsymbol{H_C = 35\ KN}$$

D) DCL final

Figura 239- Exemplo 1



Fonte: adaptado de Júnior, Eloy 1999

Isostático pelos critérios das letras A, B e C da letra A do item 7.3.1

2°) caso: tri-articulado de apoios não alinhados entre si e nem com a rótula:

Roteiro para o cálculo das reações de apoio:

A) Construa o DCL inicial da estrutura inteira.

B) Inicie a resolução escolhendo convenientemente a parte da estrutura à esquerda ou à direta da rótula e aplique ($\sum \boldsymbol{M_{Rót} = 0}$) para obter uma primeira equação que tem como incógnitas as duas reações do apoio da parte que foi escolhida para os cálculos (se for conveniente faça o DCL inicial da parte da estrutura que foi escolhida para o cálculo)

C) Considerando o DCL inicial da estrutura inteira aplique

($\sum \boldsymbol{M = 0\ em\ relação\ ao\ apoio\ da\ outra\ parte}$) para obter uma segunda equação que também tem como incógnitas as duas reações de apoio da primeira equação obtida no item B

D) Usando as duas equações obtidas monte e resolva um sistema (2 x 2) para encontrar as reações do apoio da parte da estrutura isolada no item B.

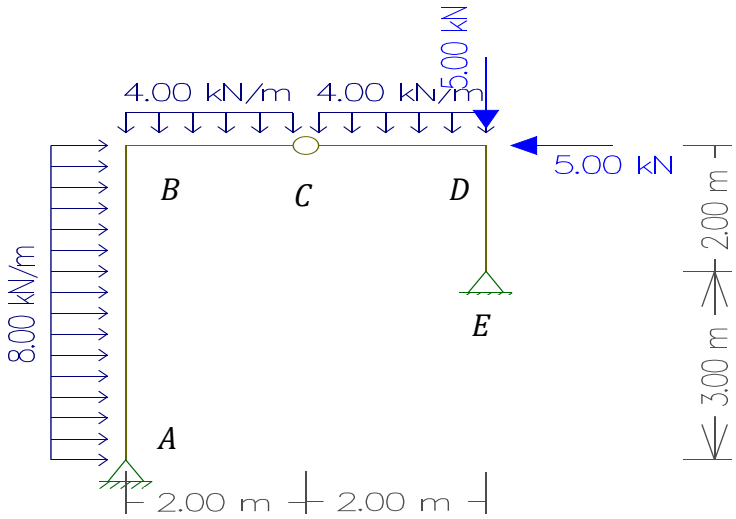
E) Use ($\sum \boldsymbol{F_V = 0}$) e ($\sum \boldsymbol{F_H = 0}$) para encontrar as reações no outro apoio

F) Se desejar obter as reações na rótula use o DCL inicial da parte da estrutura isolada no item B (anote as reações de apoio dessa parte no DCL)

Aplicação:

1°) Calcule o grau de hiperestaticidade, as reações de apoios, as reações na rótula interna e mostre o DCL final para o pórtico tri-articulado abaixo.

Figura 240 – Exemplo1



Fonte: notas de aula (Estruturas isostáticas)

RESP:

A) Grau de hiperestaticidade gh:

Aplicando a equação da letra B do item 7.3.2 (existe 1 rótula), temos:

Lembre-se: rótulas são nós, logo BC e CD são duas barras distintas que chegam na rótula C, assim l1= (2-1) e l2 = 0 (existe uma rótula).

$gh = (3b + r) - 3n - l_1 - l_2$ ... $\Rightarrow gh = (3 * 4 + 4) - 3 * 5 - (2 - 1) = 16 - 15 - 1$

$gh = 16 - 16 = 0$

B) Reações de apoios:

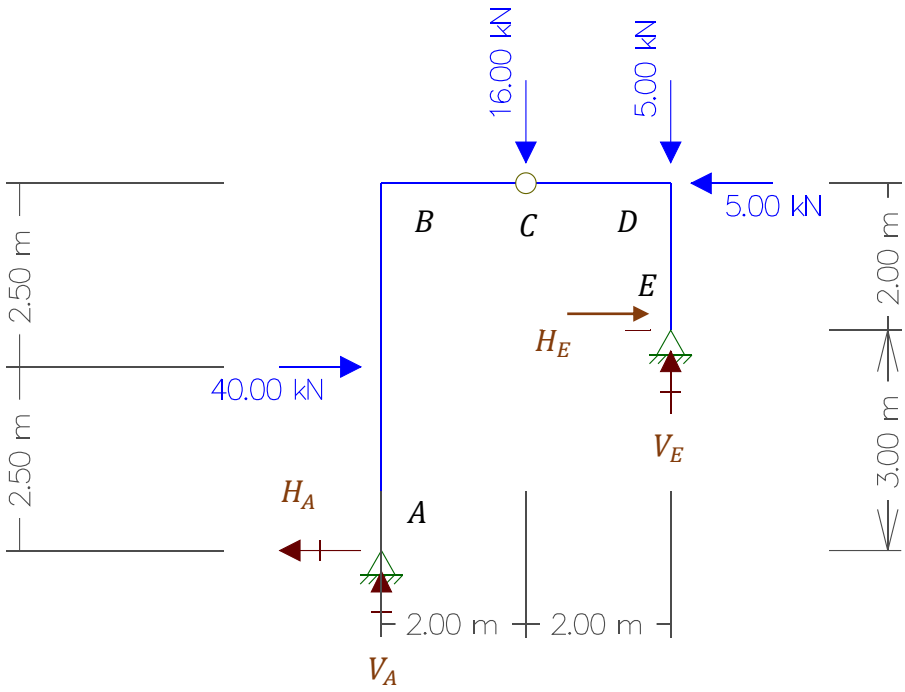
DCL inicial da estrutura inteira:

Dos exemplos anteriores e da tabela 01 (item 5.1.4.2.2) sabemos que:

a) **FR1** = AAB = 8 x 5 = **40 KN** **FR2** = ABD = 4 x 4 = **16 KN**

b) $\overline{X_{A,1}}$ = LAB / 2 = 5 / 2 = **2,5** $\overline{X_{A,2}}$ = LBD / 2 = 4 / 2 = **2 m**

Figura 241- Exemplo 1



Fonte: notas de aula (Estruturas isostáticas)

• Iniciando a resolução pela parte ABC da estrutura à esquerda da rótula C (menor número de forças) e aplicando $(\sum M_C = 0)$ obtemos uma primeira equação com duas variáveis, V_A e H_A, que chamaremos de equação 1

Logo:

$$\sum M_C = 0 \ \therefore \ -2V_A + 5H_A + 40 * 2{,}5 + 8 * 1 = 0 \ \Rightarrow \ -2V_A + 5H_A + 108 = 0 \ \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{-2V_A + 5H_A = -108} \qquad (\boldsymbol{eq\ 1})$$

Agora, considerando o DCL inicial da estrutura inteira e aplicando $(\sum M_E = 0)$ obtemos uma segunda equação em termos das duas variáveis anteriores, V_A e H_A, a qual chamaremos de equação 2

$$\sum M_E = 0 \ \therefore \ -4V_A + 3H_A + 40 * 0{,}5 + 16 * 2 + 5 * 2 = 0 \ \Rightarrow$$

$$-4V_A + 3H_A + 20 + 32 + 10 = 0 \ \Rightarrow -4V_A + 3H_A + 62 = 0 \ \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{-4V_A + 3H_A = -62} \quad (\boldsymbol{eq\ 2})$$

Agora, usando as equações 1 e 2 montamos um sistema (2 x 2) e resolvemos pelo método da adição, logo

$$\begin{cases} -2V_A + 5H_A = -108 \ \ eq\ 1 \\ -4V_A + 3H_A = -62 \ \ \ eq\ 2 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{H_A = -22\ KN} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{V_A = -1\ KN}$$

Agora, observando o DCL inicial da estrutura inteira aplicamos $(\sum F_V = 0)$ e $(\sum F_H = 0)$ para calcular as reações no outro apoio:

$$\sum F_V = 0 \ \therefore \ V_E + V_A - 16 - 5 = 0 \Rightarrow V_E - 1 - 16 - 5 = 0 \ \Rightarrow V_E - 22 = 0 \ \Rightarrow$$

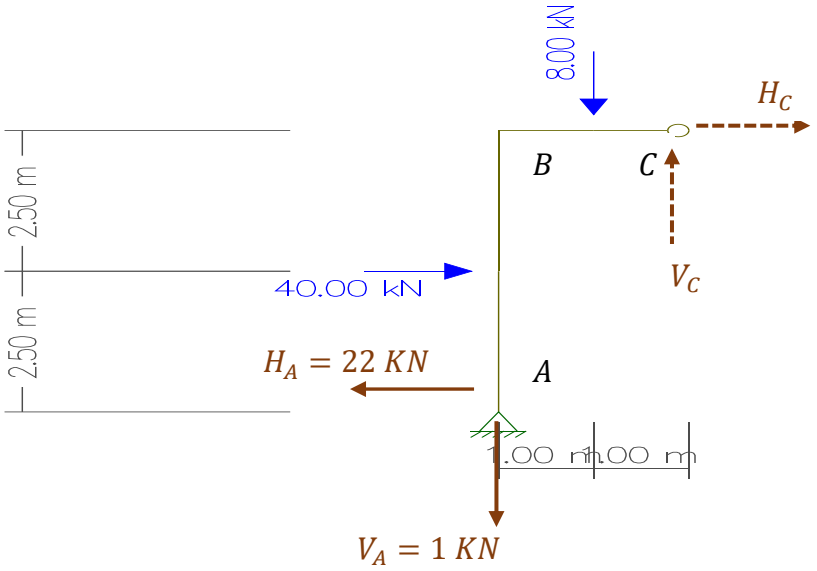
$$\boldsymbol{V_E = 22\ KN}$$

$$\sum F_H = 0 \ \therefore \ H_E + H_A + 40 - 5 = 0 \ \Rightarrow H_E - 22 + 40 - 5 = 0 \ \Rightarrow H_E - 27 + 40 = 0 \ \Rightarrow$$

$$H_E + 13 = 0 \ \Rightarrow \quad \boldsymbol{H_E = -13\ KN}$$

C) Reações na rótula interna C usando a parte à esquerda da rótula (DCL inicial)

Figura 242 – Exemplo 1



Fonte: notas de aula (Estruturas isostáticas)

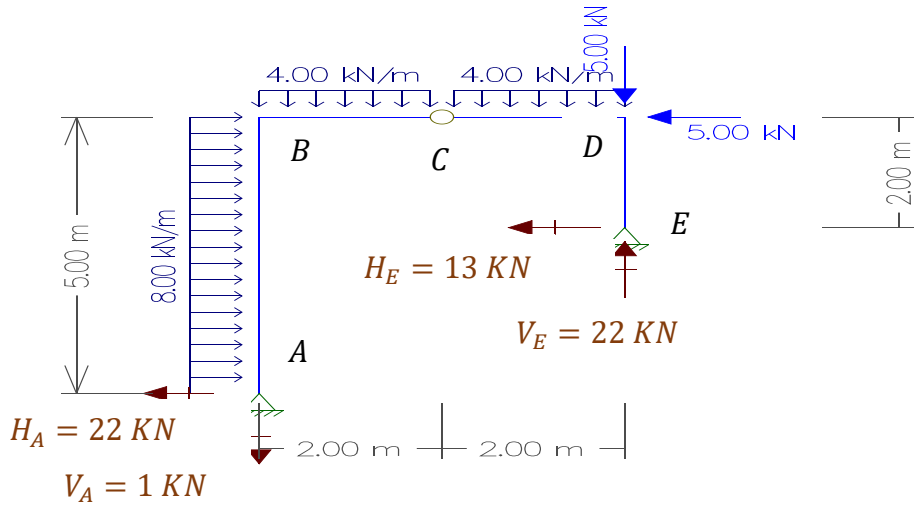
$$\sum F_V = 0 \ \therefore \ V_C - V_A - 8 = 0 \Rightarrow V_C - 1 - 8 = 0 \ \Rightarrow V_C - 9 = 0 \ \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_C = 9\ KN}$$

$$\sum F_H = 0 \therefore \ H_C - H_A + 40 = 0 \ \Rightarrow H_C - 22 + 40 = 0 \ \Rightarrow H_C + 18 = 0 \ \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{H_C = -18\ KN}\ (o\ sinal\ negativo\ indica\ que\ o\ sentido\ de\ H_C\ está\ invertido)$$

DCL final da estrutura

Figura 243 – Exemplo 1



Fonte: notas de aula (Estruturas isostáticas)

Isostático pelos critérios das letras A, B e C da letra A do item 7.3.1

3°) caso: tri-articulado com apoio(s) alinhado(s) com a rótula

Roteiro para o cálculo das reações de apoios

A) Desenhe o DCL inicial da parte da estrutura com um apoio alinhado com a rótula e aplique ($\sum \boldsymbol{M_{Rót} = 0}$) para obter uma das reações de apoio da estrutura.

B) Construa o DCL inicial da estrutura inteira e desenhe com sentido e valor corretos a reação calculad no item A e em seguida use as três equações de equilíbrio estático para calcular as demais reações de apoios.

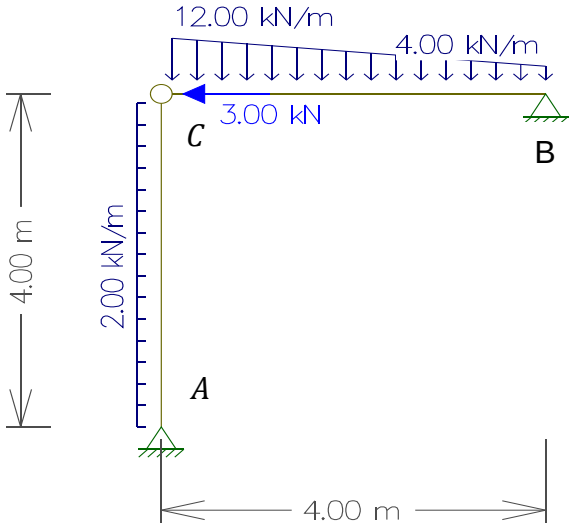
C) Se for necessário obter os esforços na rótula desenhe o DCL inicial da parte isolada no item A, anotando as reações de apoio dessa parte com valores e sentidos corretos e use ($\sum F_V$) e ($\sum F_H$) para calcular as reações na rótula.

D) Construa o DCL final da estrutura inteira.

Aplicação:

1°) Calcule o grau de hiperestaticidade, as reações de apoios, as reações na rótula interna e mostre o DCL final para o pórtico tri-articulado abaixo.

Figura 243 – Exemplo 1



Fonte: autor

RESP:

A) Grau de hiperestaticidade gh:

Aplicando a equação da letra B do item 7.3.2 (existe 1 rótula), temos:

Lembre-se: rótulas são nós, logo AC e CB são duas barras distintas que chegam na rótula C, assim l_1= (2-1)

$gh = (3b + r) - 3n - l_1 - l_2 \ldots \quad \Rightarrow gh = (3 * 2 + 4) - 3 * 3 - (2 - 1) = 10 - 9 - 1$

$\Rightarrow$

$gh = 10 - 10 = 0$

B) Reações de apoios:

Considerando a parte CB da estrutura e aplicando ($\sum M_C = 0$) temos VB como única variável, assim podemos obtê-la diretamente.

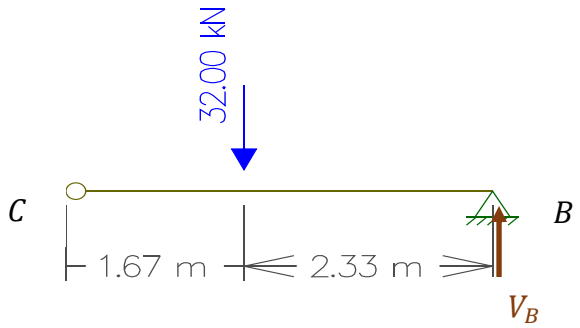
DCL inicial da parte CB

- $\boldsymbol{F_{R,CB} = A_{CB}} = (12 + 4) * \frac{4}{2} = \boldsymbol{32\ KN}$

- $\overline{\boldsymbol{X_Q}} = \dfrac{\boldsymbol{L(Q + 2q)}}{\boldsymbol{3(q + Q)}} = \dfrac{\boldsymbol{4(12 + 2 * 4)}}{\boldsymbol{3(4 + 12)}} = \dfrac{\boldsymbol{80}}{\boldsymbol{48}} = \boldsymbol{1,67\ m}$

$\overline{\boldsymbol{X_Q}}$→Ponto de aplicação da resultante em relação à carga **Q** (carga de maior valor)

Figura 244 – Exemplo 1



Fonte: autor

(a carga de 3 KN e a reação H_B não são necessária, pois não produzem momento na rótula C)

$\sum M_C = 0 \ \therefore \ 4V_B - 32 * 1{,}67 = 0 \ \Rightarrow \ 4V_B - 53{,}44 = 0 \ \Rightarrow 4V_B = 53{,}44 \ \Rightarrow$

$\boldsymbol{V_B = 13,36\ KN}$

Agora, construímos o DCL inicial da estrutura inteira anotando a reação V_B com sentido e valor corretos e aplicamos as três equações de equilíbrio da estática para obter as demais reações.

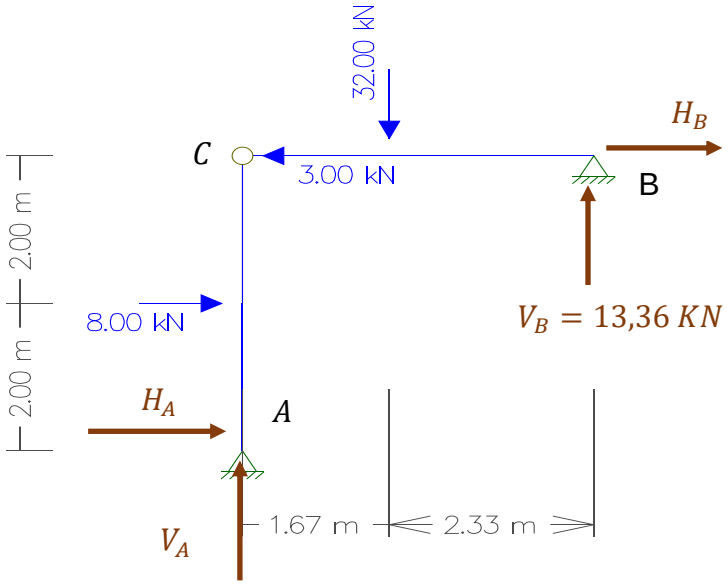
DCL inicial da estrutura inteira

Dos exemplos anteriores e da tabela 01 (item 5.1.4.2.2) sabemos que:

• $\boldsymbol{F_{R,AC} = A_{AC} = (4 * 2) = 8\ KN}$ e $\overline{X_{A,AC}}$ = LAC / 2 = 4 / 2 = **2 m**

• $\boldsymbol{F_{R,CB} = 32\ KN}$ *e* $\boldsymbol{\bar{X}_{Q,CB} = 1,67\ m}$

Figura 245 – Exemplo 1



Fonte: autor

Logo:

$\sum M_A = 0 \ \therefore \ -4H_B + 4 * 13,36 - 32 * 1,67 + 4 * 3 - 8 * 2 = 0 \Rightarrow$

$-4H_B + 53,44 - 53,44 + 12 - 16 = 0 \Rightarrow -4H_B - 4 = 0 \Rightarrow -4H_B = 4 \Rightarrow \boldsymbol{H_B = -1KN}$

$\sum F_H = 0 \therefore \ H_A + H_B + 8 - 3 = 0 \Rightarrow \ H_A + (-1) + 8 - 3 = 0 \Rightarrow H_A + 4 = 0 \Rightarrow$

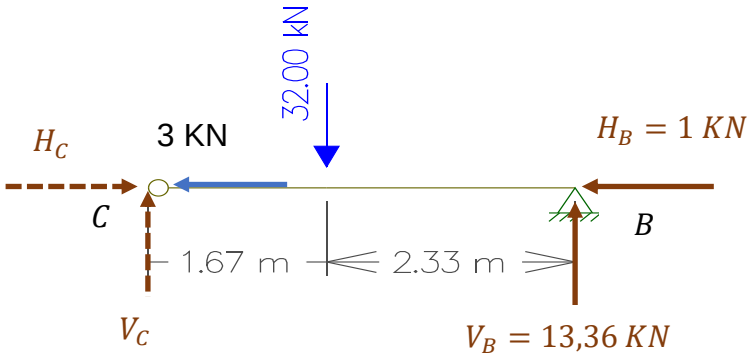
$\boldsymbol{H_A = -4\ KN}$

$\sum F_V = 0 \ \therefore V_A + V_B - 32 = 0 \ \Rightarrow \ V_A + 13,36 - 32 = 0 \Rightarrow V_A - 18,64 = 0 \Rightarrow$

$\boldsymbol{V_A = 18,64\ KN}$

C) Reações na rótula interna C usando a parte CB à direita da rótula (DCL inicial)

Figura 246 - Exemplo 1



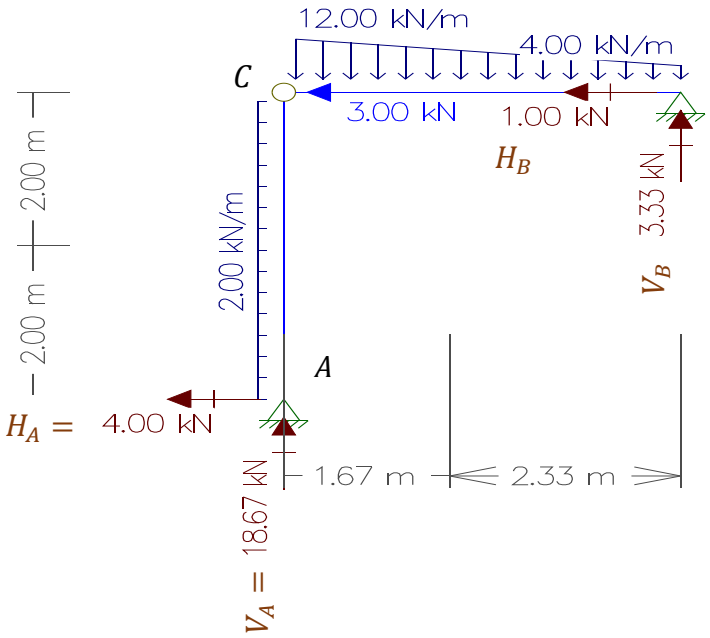
Fonte: autor

$$\sum F_V = 0 \ \therefore \ V_C + 13{,}36 - 32 = 0 \ \Rightarrow V_C - 18{,}64 = 0 \ \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_C = 18{,}64\ KN}$$

$$\sum F_H = 0 \therefore \ H_C - 1 - 3 = 0 \ \Rightarrow \quad \boldsymbol{H_C = 4\ KN}$$

D) DCL final

Figura. 246 – Exemplo 1

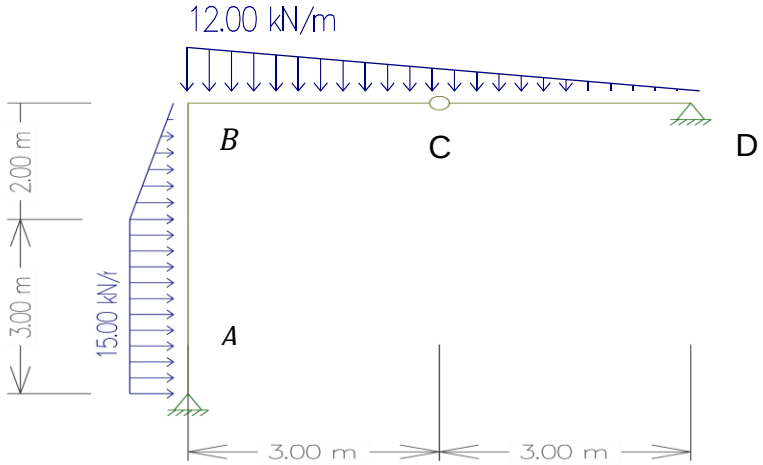


Fonte: autor

Isostático pelos critérios das letras A, B e C da letra A do item 7.3.1

2°) Calcule o grau de hiperestaticidade, as reações de apoios, as reações na rótula interna e mostre o DCL final para o pórtico tri-articulado abaixo.

Figura. 247 – Exemplo 2



Fonte: autor

RESP:

A) Grau de hiperestaticidade gh:

Aplicando a equação da letra B do item 7.3.2 (existe 1 rótula), temos:

Lembre-se: rótulas são nós, logo BC e CD são duas barras distintas que chegam na rótula C, assim l_1= (2-1)

$gh = (3b + r) - 3n - l_1 - l_2 \ldots \quad \Rightarrow gh = (3 * 3 + 4) - 3 * 4 - (2 - 1) = 13 - 12 - 1$

$gh = 13 - 13 = 0$

B) Reações de apoios:

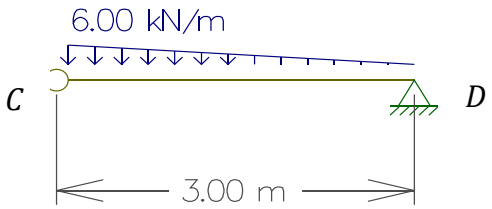
Considerando a parte CD da estrutura e aplicando ($\sum M_C = 0$) temos como única variável, assim podemos obtê-la diretamente.

DCL inicial da parte CD

Usando a semelhança de triângulos verificamos que no ponto C a carga vale 6 KN

$$\frac{q_C}{3} = \frac{12}{6} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{q_C} = \frac{3 * 12}{6} = 6\ KN$$

Figura 248 – Exemplo 2



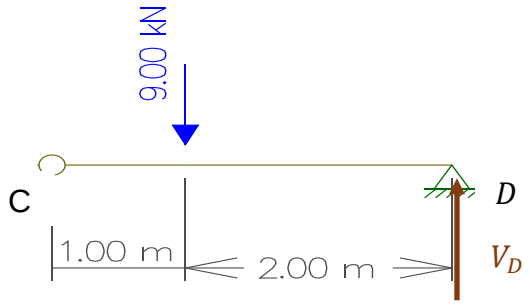
Fonte: autor

Logo:

DCL da parte CD

$$\boldsymbol{F_{R,CD}} = \boldsymbol{A_{CD}} = \frac{6*3}{2} = \boldsymbol{9\ KN} \qquad \boldsymbol{e} \qquad \boldsymbol{\bar{X}_C} = \frac{\boldsymbol{L_{CD}}}{\boldsymbol{3}} = \frac{3}{3} = \boldsymbol{1m}$$

Figura 249 – Exemplo 2



(A reação H_D não é necessária, pois não produz momento na rótula C)

$$\sum M_C = 0 \ \therefore \ 3V_D - 9*1 = 0 \ \Rightarrow \ 3V_D - 9 = 0 \ \Rightarrow 3V_D = 9 \ \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_D = 3\ KN}$$

Agora, construímos o DCL inicial da estrutura inteira anotando a reação V_D com sentido e valor corretos e aplicamos as três equações de equilíbrio da estática para obter as demais reações.

DCL inicial da estrutura inteira

Dos exemplos anteriores e da tabela 01 (item 5.1.4.2.2) sabemos que:

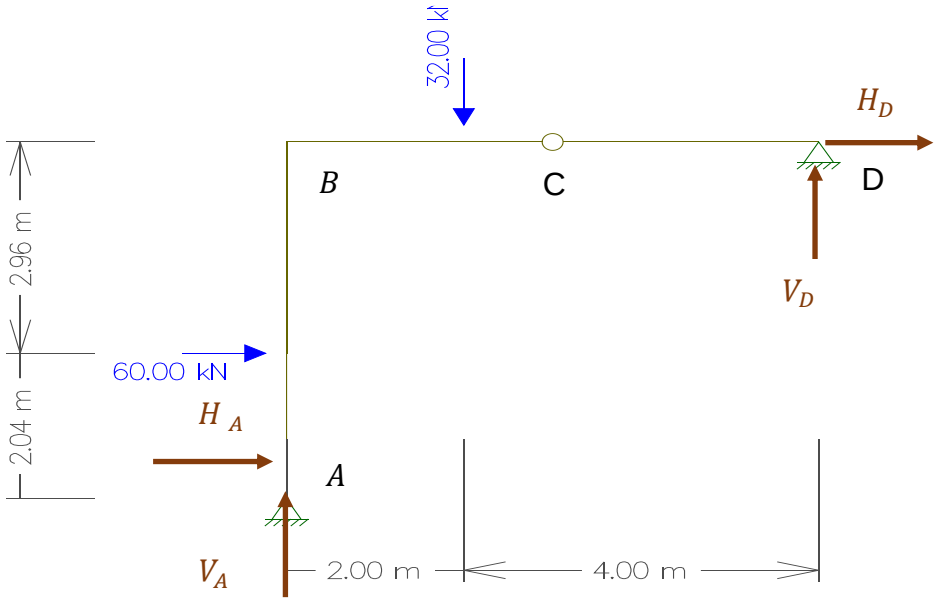
$$\bullet \boldsymbol{F_{R,CD}} = \boldsymbol{A_{CD}} = \frac{6*3}{2} = \boldsymbol{9\ KN} \qquad \boldsymbol{e} \qquad \boldsymbol{\bar{X}_C} = \frac{\boldsymbol{L_{CD}}}{\boldsymbol{3}} = \frac{3}{3} = \boldsymbol{1m}$$

$$\bullet\ \boldsymbol{F_{R,AB}} = \boldsymbol{A_{TRAP}} = \frac{(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{L_{RET}}).\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{2}} = \frac{(5+3).15}{2} = \boldsymbol{60\ KN}$$

$$\boldsymbol{\bar{X}_q} = \frac{\left(L^3 - {L_{RET}}^3\right)}{3\left(L^2 - {L_{RET}}^2\right)} = \frac{(5^3 - 3^3)}{3(5^2 - 3^2)} = \boldsymbol{2,04\ m}\ (ponto\ de\ aplicação\ da\ resultante\ em\ relação\ ao\ início\ do\ carreg.uniformemente\ distribuído\ \boldsymbol{q})$$

DCL inicial

Figura 250 – Exemplo 2



Fonte: autor

Logo:

$$\sum M_A = 0 \ \therefore \ -5H_D + 6V_D - 36 * 2 - 2{,}04 * 60 = 0 \ \Rightarrow$$

$$-5H_D + 6 * 3 - 72 - 122{,}4 = 0 \ \Rightarrow -5H_D + 18 - 194{,}4 = 0 \ \Rightarrow -5H_D - 176{,}4 = 0$$

$$-5H_D = 176{,}4 \ \Rightarrow \quad \boldsymbol{H_D = -35{,}28\ KN}$$

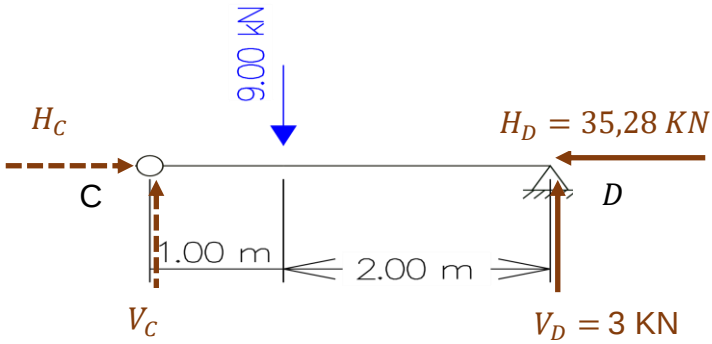
$$\sum F_H = 0 \therefore \ H_A + H_D - 60 = 0 \ \Rightarrow \ H_A - 35{,}28 + 60 = 0 \ \Rightarrow H_A + 24{,}72 = 0$$

$$\boldsymbol{H_A = -24{,}72\ KN}$$

$$\sum F_V = 0 \ \therefore V_A + V_D - 36 = 0 \ \Rightarrow \ V_A + 3 - 36 = 0 \ \Rightarrow V_A - 33 = 0 \ \Rightarrow \ \boldsymbol{V_A = 33\ KN}$$

C) Reações na rótula interna C usando a parte CD à direita da rótula (DCL inicial)

Figura 251 – Exemplo 2



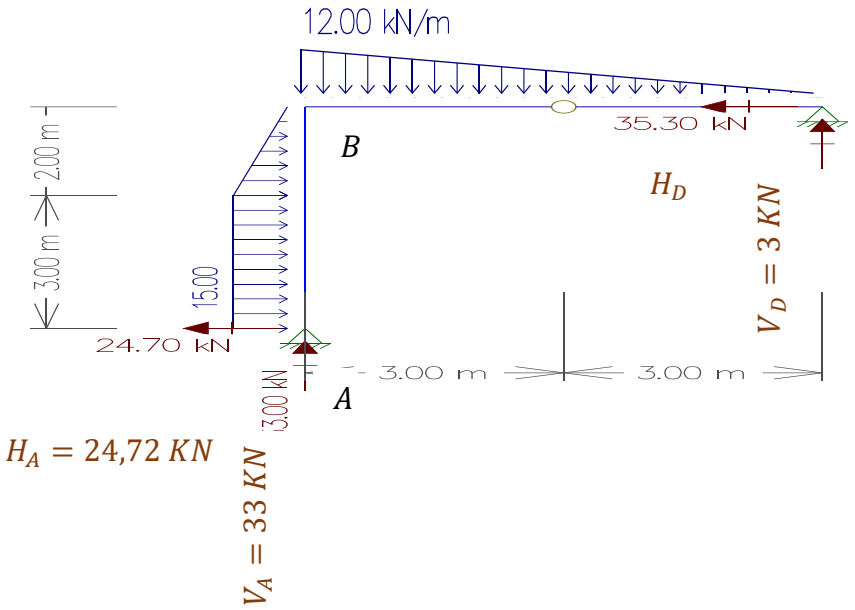
Fonte: autor

$$\sum F_V = 0 \ \therefore \ V_C + 3 - 9 = 0 \ \Rightarrow V_C - 6 = 0 \ \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_C = 6\ KN}$$

$$\sum F_H = 0 \therefore \ H_C - 35{,}28 = 0 \ \Rightarrow \quad \boldsymbol{H_C = 35{,}28\ KN}$$

DCL final:

Figura 252 – Exemplo 2

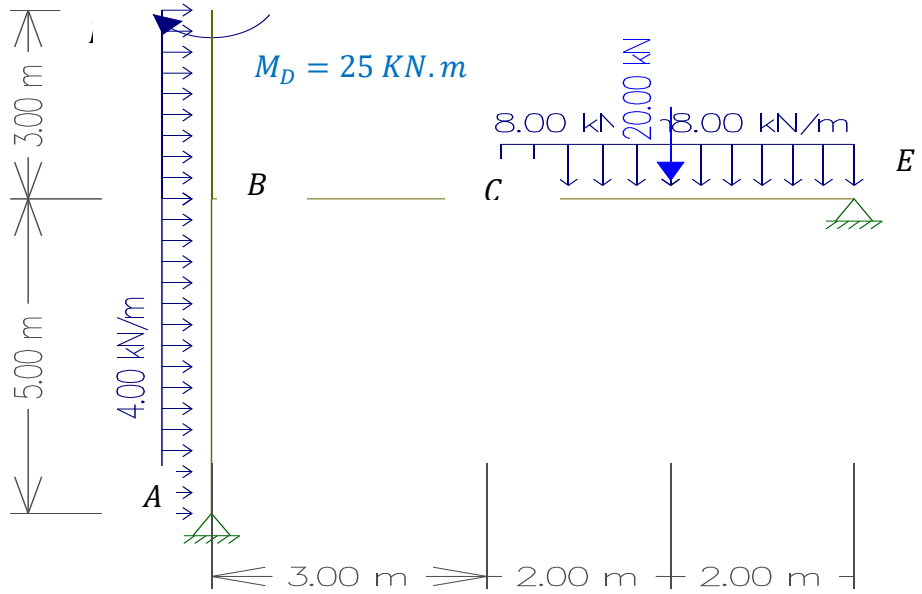


Fonte: autor

Isostático pelos critérios das letras A, B e C da letra A do item 7.3.1

3°) Calcule o grau de hiperestaticidade, as reações de apoios, as reações na rótula interna e mostre o DCL final para o pórtico tri-articulado a seguir.

Figura 253 – Exemplo 3



Fonte: notas de aula (Estruturas Isostáticas)

RESP:

A) Grau de hiperestaticidade gh:

Aplicando a equação da letra B do item 7.3.2 (existe 1 rótula), temos:

Lembre-se: rótulas são nós, logo BC e CE são duas barras distintas que chegam na rótula C, assim l_1= (2-1)

$gh = (3b + r) - 3n - l_1 - l_2 \ldots \quad \Rightarrow gh = (3 * 4 + 4) - 3 * 5 - (2 - 1) = 16 - 15 - 1$

$gh = 16 - 16 = 0$

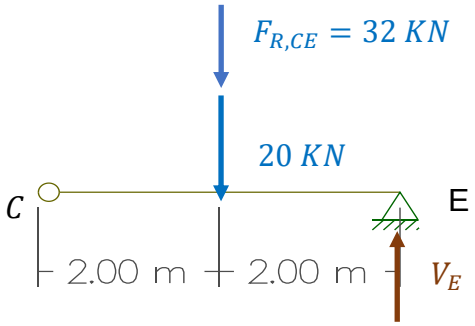
B) Reações de apoios:

Considerando a parte CE da estrutura, à direita da rótula C, e aplicando $(\sum M_C = 0)$ temos V_E como única variável, assim podemos obtê-la diretamente.

DCL inicial da parte CE

$$\boldsymbol{F_{R,CE} = A_{CE}} = (q_{CE} * L_{CE}) = (8 * 4) = \boldsymbol{32\ KN} \quad \boldsymbol{e} \quad \boldsymbol{\bar{X}_C} = \frac{\boldsymbol{L_{CE}}}{\boldsymbol{2}} = \frac{4}{2} = \boldsymbol{2\ m}$$

Fig. 253 – Exemplo 3



Fonte: autor

(A reação horizontal H_E não é necessária, pois não produz momento em relação à rótula)

Logo:

$$\sum M_C = 0 \ \therefore \ 4V_E - (32 + 20) * 2 = 0 \ \Rightarrow \ 4V_E - 104 = 0 \ \Rightarrow 4V_E = 104 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{V_E = 26\ KN}$$

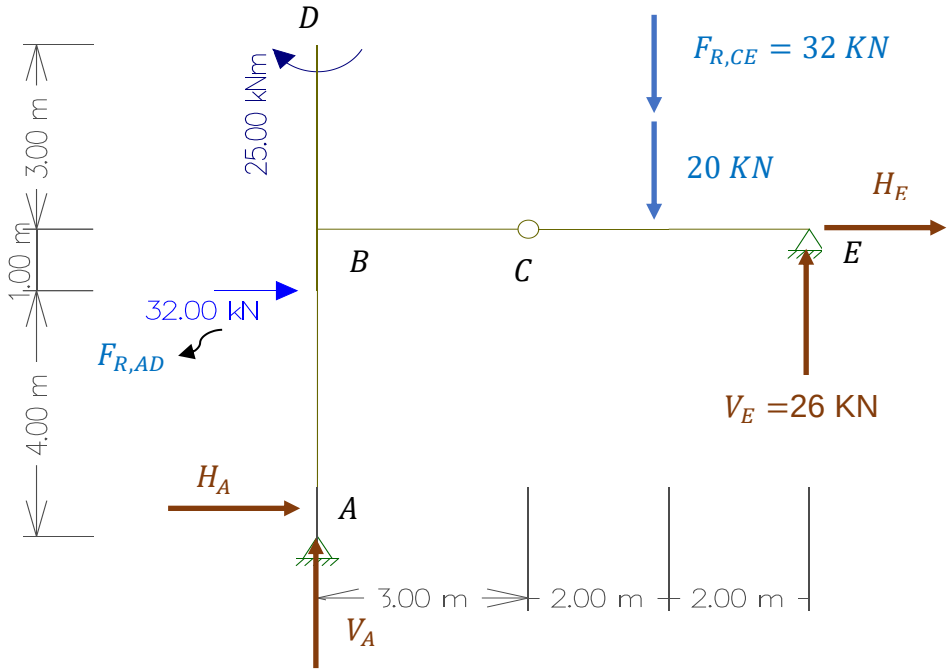
Agora, construímos o DCL inicial da estrutura inteira anotando a reação V_D com sentido e valor corretos e aplicamos as três equações de equilíbrio da estática para obter as demais reações.

DCL inicial da estrutura inteira

Dos exemplos anteriores e da tabela 01 (item 5.1.4.2.2) sabemos que:

- $\boldsymbol{F_{R,CE} = A_{CE} = 32\ KN}$ $\quad$ ***e*** $\quad$ $\boldsymbol{\bar{X}_{A,CE} = 3 + \frac{L_{CE}}{2} = 3 + \frac{4}{2} = 5\ m}$
- $\boldsymbol{F_{R,AD} = A_{AD} = (q_{AD} * L_{AD}) = (4 * 8) = 32\ KN}$ $\quad$ ***e*** $\quad$ $\boldsymbol{\bar{X}_{A,AD} = \frac{L_{AD}}{2} = \frac{8}{2} = 4\ m}$

Figura 254– Exemplo 3



Fonte: notas de aula (Estruturas Isostáticas)

Logo:

$$\sum M_A = 0 \ \therefore \ -5H_E + 7V_E - (32 + 20) * 5 - 32 * 4 - M_D = 0 \ \Rightarrow$$

$$-5H_E + 7 * 26 - 260 - 128 - 25 = 0 \ \Rightarrow -5H_E + 182 - 413 = 0 \ \Rightarrow -5H_E - 231 = 0$$

$$-5H_E = 231 \ \Rightarrow \quad \boldsymbol{H_E = -46,2\ KN}$$

$$\sum F_H = 0 \therefore \ H_A + H_E + 32 = 0 \ \Rightarrow \ H_A - 46{,}2 + 32 = 0 \Rightarrow H_A - 14{,}2 = 0 \ \Rightarrow$$

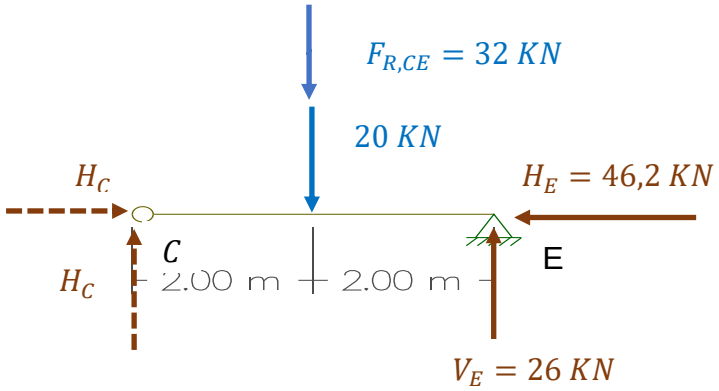
$$\boldsymbol{H_A = 14,20\ KN}$$

$$\sum F_V = 0 \ \therefore V_A + V_E - 32 - 20 = 0 \ \Rightarrow \ V_A + 26 - 52 = 0 \Rightarrow V_A - 26 = 0 \ \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{V_A = 26\ KN}$$

C) Reações V_C e H_C na rótula interna C usando a parte CE à direita da rótula (DCL inicial)

Figura 255 – Exemplo 3



Fonte: autor

Logo:

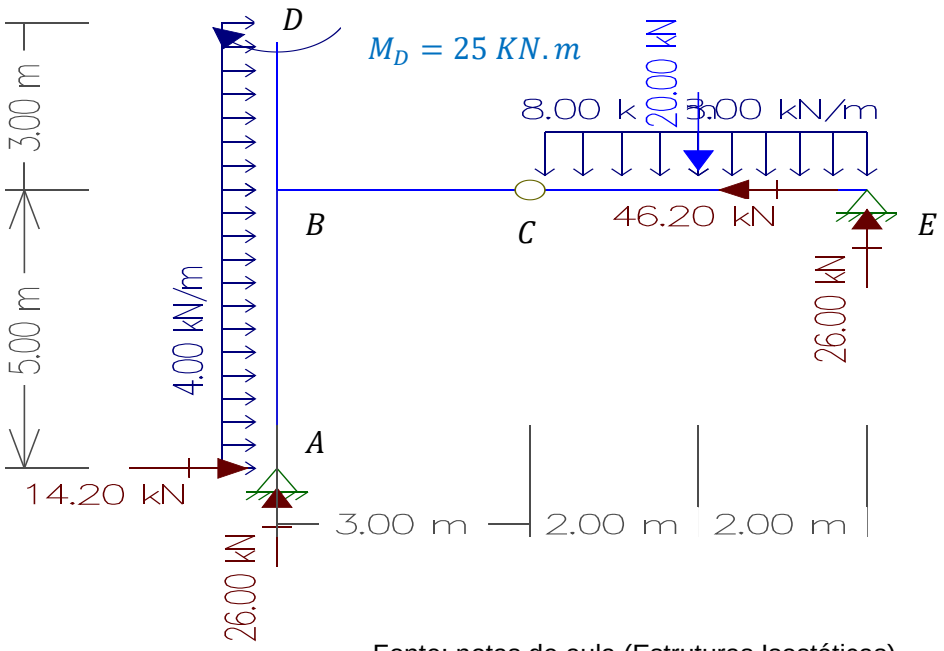
$$\sum F_V = 0 \ \therefore \ V_C + 26 - 20 - 32 = 0 \ \Rightarrow V_C + 26 - 52 - = 0 \ \Rightarrow \quad V_C - 26 = 0 \ \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{V_C = 26\ KN}$$

$$\sum F_H = 0 \ \therefore \ H_C - 46{,}2 = 0 \ \Rightarrow \quad \boldsymbol{H_C = 46{,}2\ KN}$$

DCL final:

Figura 256 – Exemplo 3



Fonte: notas de aula (Estruturas Isostáticas)

Isostático pelos critérios das letras A, B e C da letra A do item 7.3.1

8.6 Reações de apoios em pórticos biapoiados com tirante ou escora (pòrticos atirantados)

Agora vamos aprender a calcular reações de apoios em pórticos atirantados

Roteiro para o cálculo das reações de apoios:

• Construir o DCL inicial da estrutura inteira e aplicar as três equações de equilíbrio da estática para calcular as reações de apoios como num pórtico biapoiado

• Desmembrar na rótula e construir o DCL inicial de uma das partes da estrutura (aquela com menor número de forças) e aplicar $(\sum M_{Rót} = 0)$ para obter a força normal (N) na barra de ligação

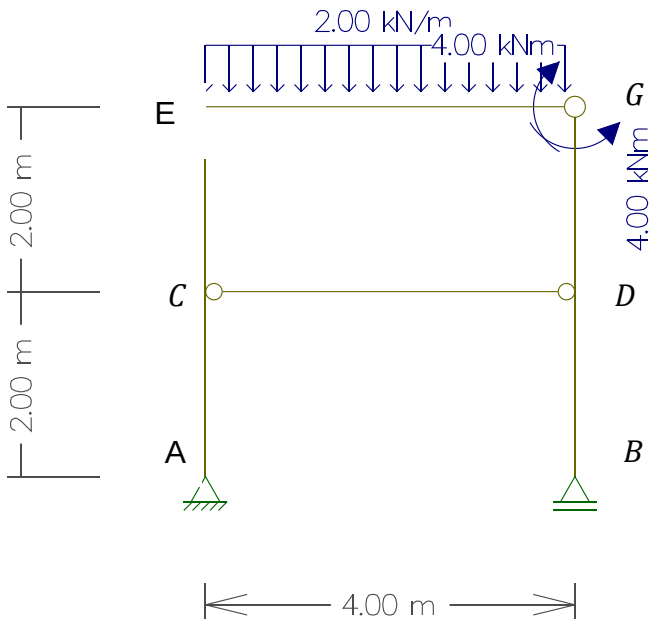
• Se necessário calcule as reações na rótula interna

• Construa o DCL final da estrutura inteira

Aplicação

1°) Calcule o grau de hiperestaticidade, as reações de apoios, as reações na rótula interna e mostre o DCL final para o pórtico atirantado abaixo

Figura 257- Exemplo 1



Fonte: Sussekind 1981

RESP:

A) Grau de hiperestaticidade gh:

Aplicando a equação da letra B do item 7.3.2. (existe 1 rótula), temos:

As rótulas da barra de ligação CD não são nós, pois não dividem as barras AE e GB, assim $l_1 = l_2 = l_3 = (2-1)$.

Logo:

$gh = (3b + r) - 3n - l_1 - l_2 - l_3 \ldots \quad \Rightarrow gh = (3 * 4 + 3) - 3 * 4 - 3(2 - 1)$

$gh = 15 - 12 - 3 = 15 - 15 = 0$

B) Reações de apoios:

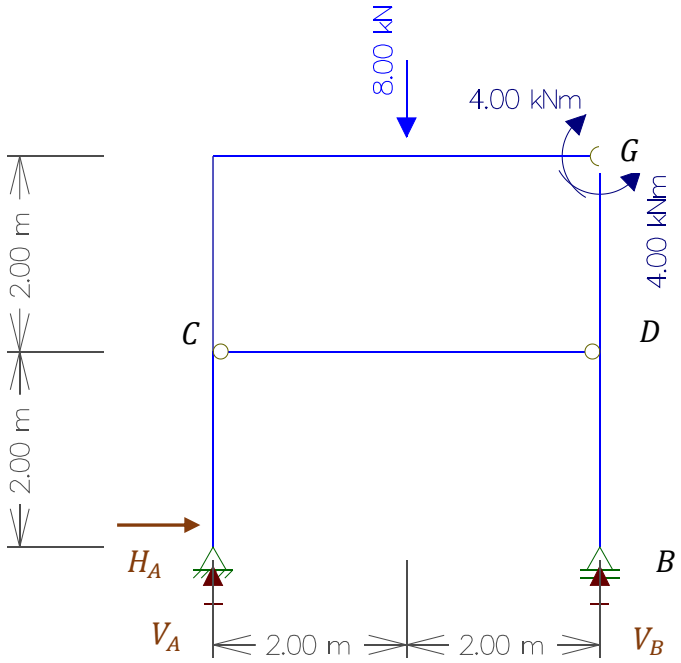
DCL inicial da estrutura inteira:

Dos exemplos anteriores e da tabela 01 (item 5.1.4.2.2) sabemos que:

a) **FR** = AEG = 2 x 4 = **8 KN**

b) $\overline{X_A}$ =LEG / 2 = 4 / 2 = **2 m**

Figura 258 – Exemplo 1



Fonte: Sussekind 1981

Aplicando as três equações de equilíbrio da estática, temos:

$\sum F_H = 0 \therefore \ \boldsymbol{H_A = 0\ KN}$

$\sum M_A = 0 \ \therefore 4V_B + 4 - 4 - 8 * 2 = 0 \ \Rightarrow 4V_B - 16 = 0 \Rightarrow 4V_B = 16 \ \Rightarrow \ \boldsymbol{V_B = 4\ KN}$

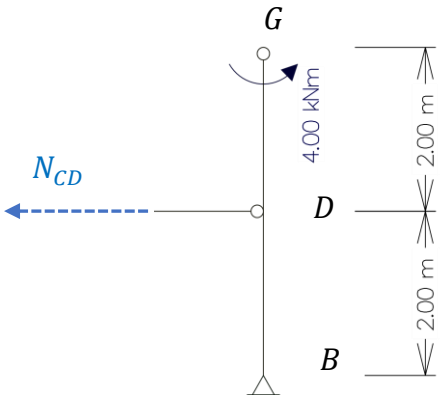
$\sum F_V = 0 \ \therefore V_A + V_B - 8 = 0 \ \Rightarrow \ V_A + 4 - 8 = 0 \Rightarrow V_A - 4 = 0 \ \Rightarrow \ \boldsymbol{V_A = 4\ KN}$

C) Força normal na barra CD

Aqui vamos cortar a barra CD para mostrar a força normal interna NCD e usar a barra GB para calcular a força normal NCD na barra CD

DCL inicial

Figura 259 – Exemplo 1



Adaptado de: Sussekind 1981

(A reação V_B não é necessária, pois não produz momento na rótula G)

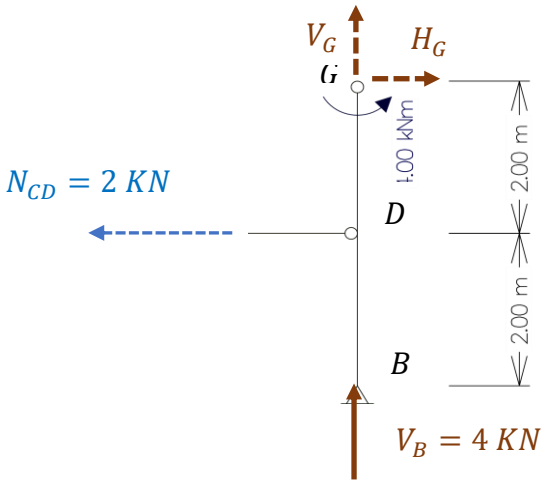
$$\sum M_G \circlearrowright = 0 \;\therefore -2N_{CD} + M_G = 0 \;\Rightarrow\; -2N_{CD} + 4 = 0 \Rightarrow\; -2N_{CD} = -4 \;\therefore$$

$$\boldsymbol{N_{CD} = 2\ KN}$$

(O resultado mostra que a barra CD está sendo tracionada pela força $N_{CD} = 2\ KN$)

D) Reações na rótula interna G usando a barra GB (DCL inicial)

Figura 260 – Exemplo 1



Adaptado de: Sussekind 1981

Logo:

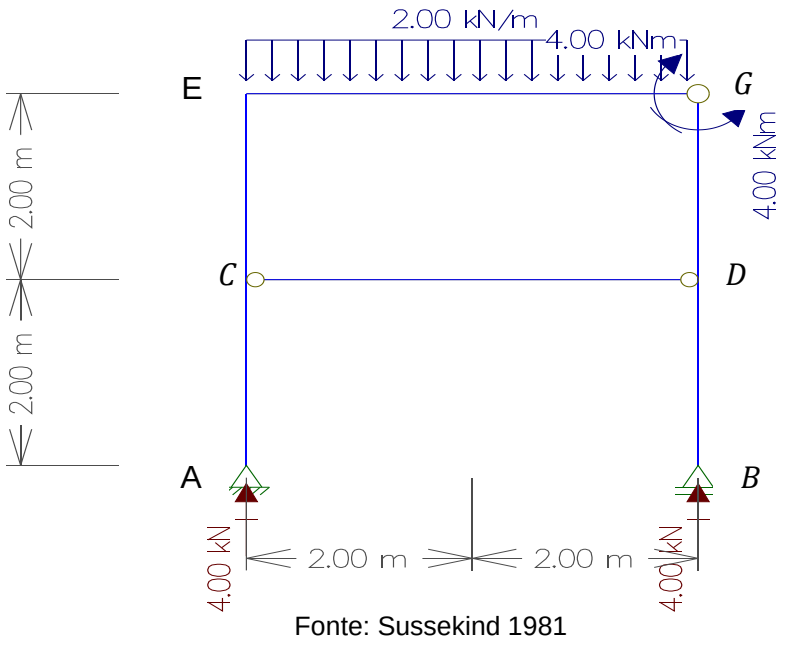
$$\sum F_V = 0 \ \therefore \ V_G + V_B = 0 \ \Rightarrow V_G + 4 = 0 \ \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{V_G = -4\ KN}\ (o\ sentido\ correto\ é\ para\ baixo)$$

$$\sum F_H = 0 \therefore \ H_G - 2 = 0 \ \Rightarrow \quad \boldsymbol{H_G = 2\ KN}$$

DCL final da estrutura inteira

Figura 261 – Exemplo 1



Fonte: Sussekind 1981

Isostático pelos critérios das letras A, B e C da letra A do item 7.3.1

8.7 Reações de apoios em pórtico compostos

Um pórtico isostático com dois apoios é composto se um dos apoios for do 3° gênero

1°) caso: Pórtico composto com dois apoios e uma rótula interna

Roteiro para o cálculo das reações de apoios

a) Desmembrar na rótula, construir o DCL da parte sem estabilidade própria e aplicar ($\sum M_{Rót} = 0$) para encontrar a reação vertical dessa parte da estrutura

b) Construir o DCL da estrutura inteira desenhando a reação vertical já calculada com valor e sentido corretos e aplicar as três equações de equilíbrio da estática para obter as demais reações de apoios

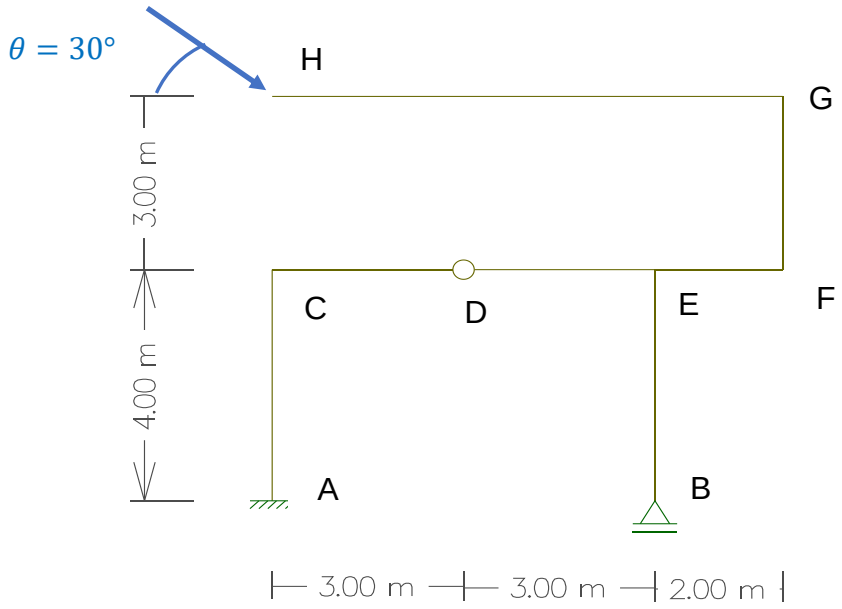
• Se necessário calcule as reações na rótula interna.

• Construa o DCL final se necessário

Aplicação

1°) Calcule o grau de hiperestaticidade, as reações de apoios, as reações na rótula interna e mostre o DCL final para o pórtico composto abaixo

Figura 262 – Exemplo 1



Fonte: notas de aula (Estruturas Isostáticas)

RESP:

A) Grau de hiperestaticidade gh:

Aplicando a equação da letra B do item 7.3.2 (existe 1 rótula), temos:

Lembre-se: rótulas internas são nós, logo CD e DE são duas barras distintas que chegam na rótula D, assim l_1= (2-1)

$gh = (3b + r) - 3n - l_1 - l_2 \ldots \quad \Rightarrow gh = (3 * 7 + 4) - 3 * 8 - (2 - 1) = 25 - 24 - 1$

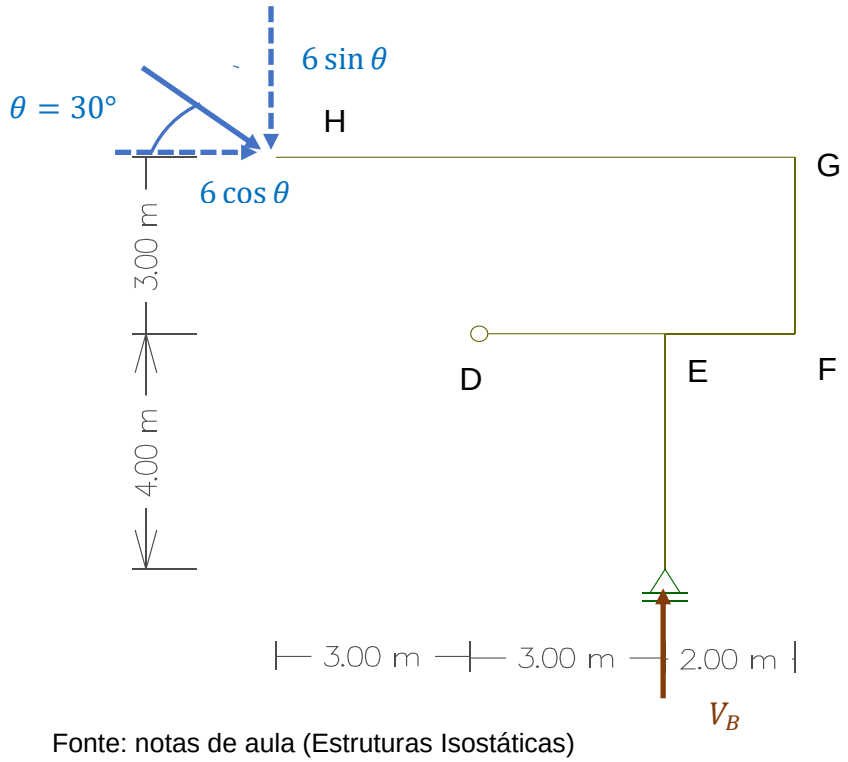
$gh = 25 - 25 = 0$

B) Reações de apoios:

• Considerando a parte DBEFGH, sem estabilidade própria, e aplicando $(\sum M_D = 0)$ temos V_B como única variável, assim podemos obtê-la diretamente

DCL inicial da parte DEBFGH (sem estabilidade própria)

Figura. 263 - Exemplo 1



Fonte: notas de aula (Estruturas Isostáticas)

Logo:

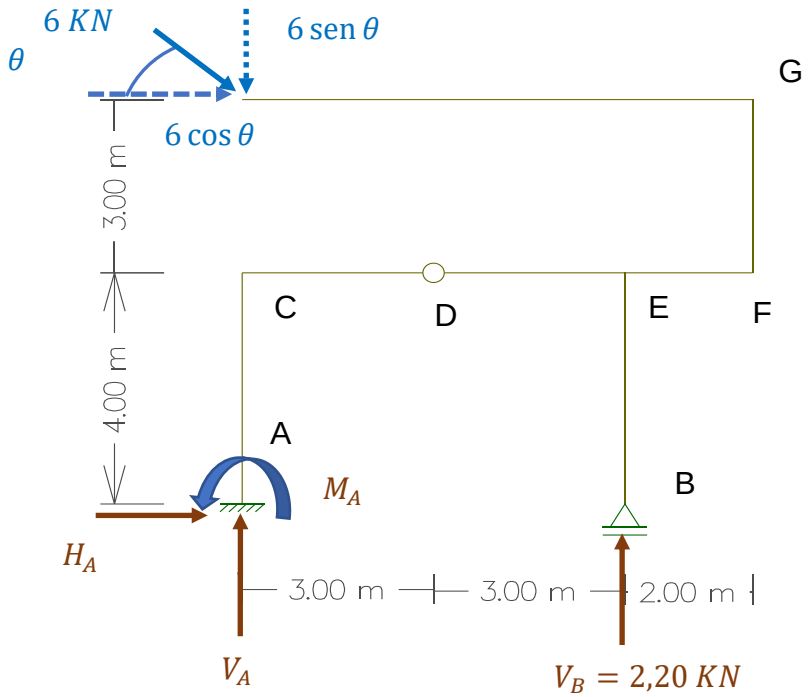
$$\sum M_D = 0 \;\therefore 3V_B - 3 * (6\cos 30°) + 3 * (6\sin 30°) = 0 \;\Rightarrow 3V_B - 15{,}6 + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$3V_B - 6{,}6 = 0 \;\Rightarrow\; 3V_B = 6{,}6 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{V_B = 2{,}20\ KN}$$

Agora, construímos o DCL inicial da estrutura inteira anotando a reação V_B com sentido e valor corretos e aplicamos as três equações de equilíbrio da estática para obter as demais reações.

DCL inicial da estrutura inteira

Figura 264 – **Exemplo 1**



Fonte: notas de aula (Estruturas Isostáticas)

Logo:

$$\sum M_A = 0 \ \therefore M_A + 6V_B - 7 * (6\cos 30°) = 0 \Rightarrow M_A + 6 * 2{,}2 - 36{,}37 = 0 \Rightarrow$$

$$M_A + 13{,}2 - 36{,}37 = 0 \Rightarrow M_A - 23{,}17 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{M_A = 23{,}17\ KN.m}$$

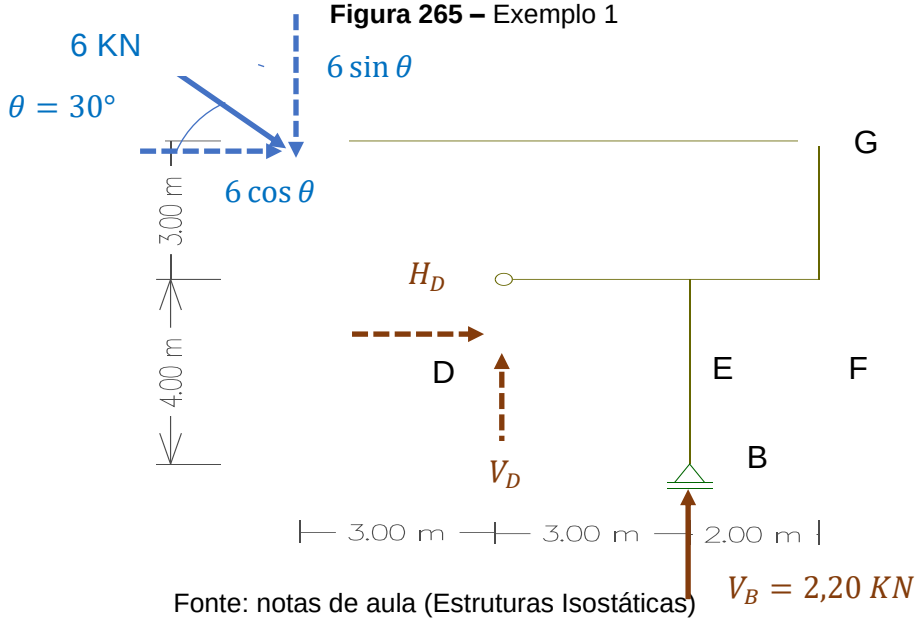
$$\sum F_V = 0 \ \therefore V_A + V_B - 6 * (\sin 30°) = 0 \Rightarrow V_A + 2{,}2 - 3 = 0 \Rightarrow V_A - 0{,}80 = 0$$

$$\boldsymbol{V_A = 0{,}80\ KN}$$

$$\sum F_H = 0 \therefore \ H_A + 6 * (\cos 30°) = 0 \Rightarrow H_A + 5{,}2 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{H_A = -5{,}20\ KN}$$

C) Reações na rótula interna D pela direita (DCL inicial)

Figura 265 – Exemplo 1



Fonte: notas de aula (Estruturas Isostáticas)

Logo:

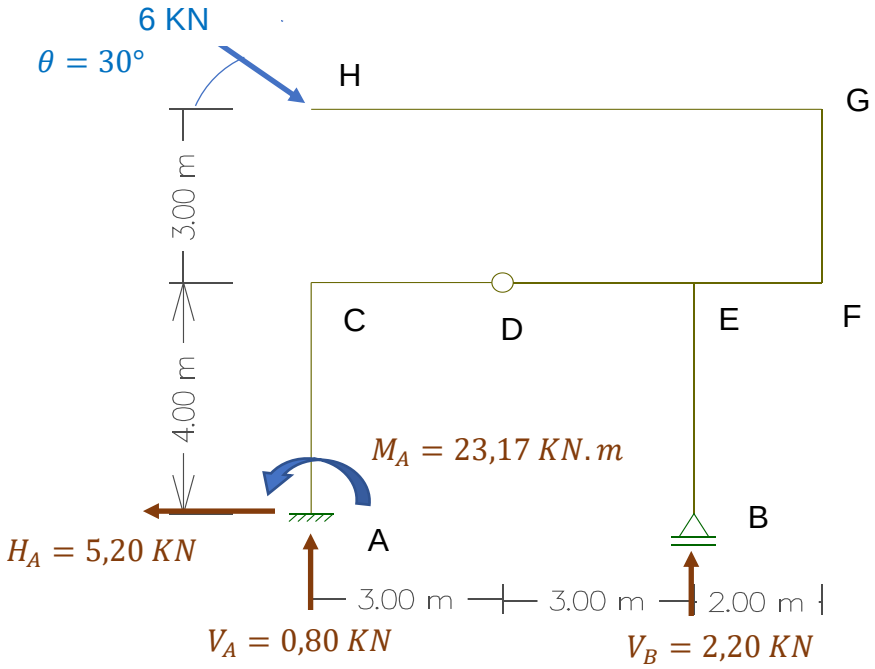
$$\sum F_V = 0 \ \therefore \ V_D + V_B - 6 * (\sin 30°) = 0 \ \Rightarrow V_D + 2{,}2 - 3 = 0 \ \Rightarrow \ V_D - 0{,}8 = 0$$

$$\boldsymbol{V_D = 0{,}8\ KN}$$

$$\sum F_H = 0 \therefore \ H_D + 6 * (\cos 30°) = 0 \ \Rightarrow \ H_D + 5{,}2 = 0 \ \Rightarrow \ \boldsymbol{H_D = -5{,}2\ KN}$$

DCL final

Figura 266 – Exemplo 1



Fonte: notas de aula (Estruturas Isostáticas)

Isostático pelos critérios das letras A, B e C da letra A do item 7.3.1

2°) caso: Pórtico composto com dois apoios e duas rótulas internas

Roteiro para o cálculo das reações

A) Iniciar a resolução construindo o DCL inicial da parte sem estabilidade própria, aquela que contém o apoio do 2° gênero e usar $(\sum M = 0)$ em relação a primeira rótula para encontrar uma das reações no apoio de 2° gênero se esse apoio estiver alinhado com a rótula. Em seguida usar $(\sum M = 0)$ em relação à outra rótula para encontrar a outra reação no apoio de 2° gênero. Quando o apoio de 2° gênero não estiver alinhado com uma das rótulas obteremos duas equações cujas variáveis serão as reações do apoio de 2° gênero, assim montamos e resolvemos um sistema 2x2 para encontrá-las

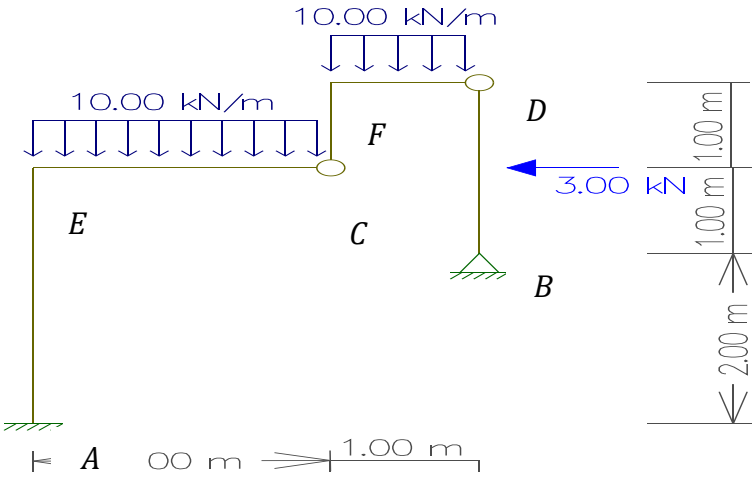
B) Construir o DCL inicial da estrutura inteira, desenhar com valor e sentido corretos as reações do apoio de 2° gênero calculadas no passo anterior e aplicar as três equações de equilíbrio da estática para obter as demais reações de apoios.

C) para encontrar as reações nas rótulas internas desmembre a estrutura em cada rótula por vez, construa o DCL inicial, incluindo as reações de apoio e use $(\sum F_V)$ e $(\sum F_H)$ para obter as reações internas

Aplicação:

1°) Calcule o grau de hiperestaticidade, as reações de apoios, as reações nas rótulas internas e mostre o DCL final para o pórtico composto abaixo

Figura 267- Exemplo 1



Fonte: notas de aula (Estruturas Isostáticas)

RESP:

A) Grau de hiperestaticidade gh:

Aplicando a equação da letra B do item 7.3.2 (existe 1 rótula), temos:

Temos duas rótulas internas (rótulas internas são nós) e $l_1 = l_2 = (2-1)$.

$gh = (3b + r) - 3n - l_1 - l_2 \ldots \quad \Rightarrow gh = (3 * 5 + 5) - (3 * 6) - 2 * (2 - 1)$

$gh = 20 - 18 - 2 = 20 - 20 = 0$

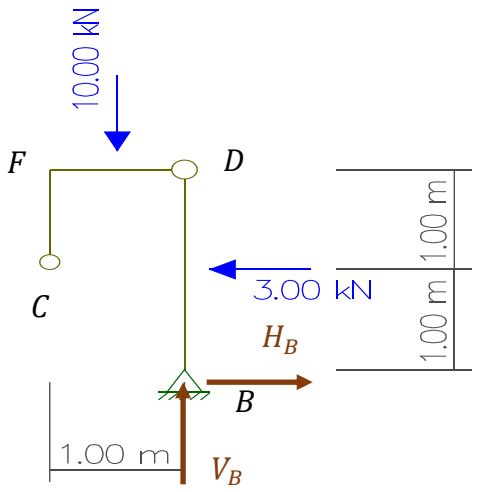
B) Reações de apoios:

Agora, construímos o DCL inicial da parte CFDB, sem estabilidade própria e aplicamos sucessivamente$(\sum M_D = 0)$ e $(\sum M_C = 0)$ para obtemos as reações no apoio de 2° gênero alinhado com a rótula D (apoio B)

DCL inicial da parte CFDB

$$\boldsymbol{F_{R,FD} = A_{FD} = (10 * 1) = 10\ KN} \quad \boldsymbol{e} \quad \boldsymbol{\bar{X}_{C,FD} = \frac{L_{FD}}{2} = \frac{1}{2} = 0,5\ m}$$

Figura 268 – Exemplo 1



Fonte: autor

Logo:

$\sum M_D = 0 \therefore 2H_B - 1 * 3 = 0 \quad \Rightarrow 2H_B - 3 = 0 \quad \Rightarrow 2H_B = 3 \Rightarrow \quad \boldsymbol{H_B = 1,5\ KN}$

$\sum M_C = 0 \therefore 1V_B + 1H_B - 10 * 0,5 = 0 \quad \Rightarrow 1V_B + 1 * 1,5 - 5 = 0 \quad \Rightarrow 1V_B - 3,5 = 0$

$\boldsymbol{V_B = 3,5\ KN}$

Agora construímos o DCL inicial da estrutura inteira, desenhamos as reações já calculadas com valor e sentido corretos e aplicamos as três equações de equilíbrio da estática para obter as reações no engaste (apoio A)

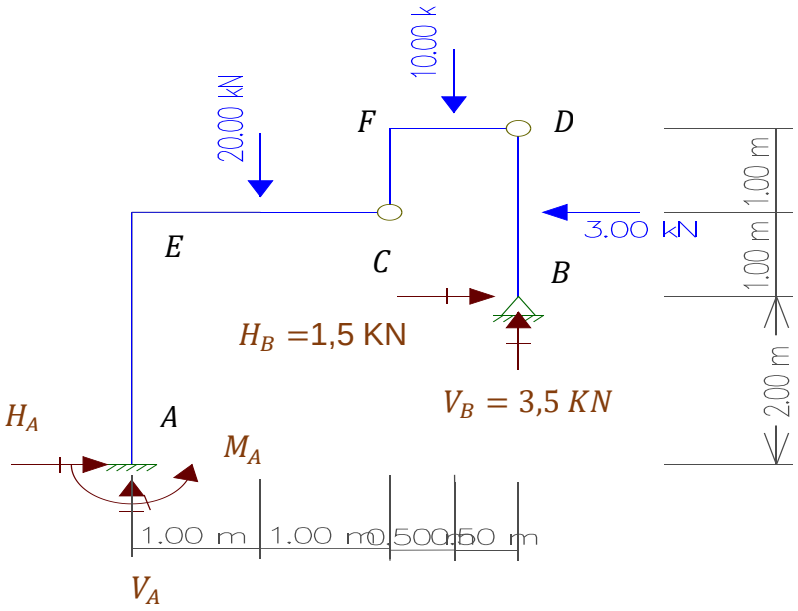
DCL inicial da estrutura inteira:

Dos exemplos anteriores e da tabela 01 (item 3.8) sabemos que:

a) $\boldsymbol{F_{R,FD} = 10\ KN}$ $\quad$ $\boldsymbol{e}$ $\quad$ $\boldsymbol{\bar{X}_{A,FD} = 2 + \frac{L_{FD}}{2} = 2 + \frac{1}{2} = 2,5\ m}$

b) $\boldsymbol{F_{R,EC} = A_{EC} = (10 * 2) = 20\ KN}$ $\quad$ $\boldsymbol{e}$ $\quad$ $\boldsymbol{\bar{X}_{A,FD} = \frac{L_{FD}}{2} = \frac{2}{2} = 1\ m}$

Figura 269 – Exemplo 1



Fonte: autor

Logo:

$$\sum F_H = 0 \therefore\ H_A + H_B - 3 = 0\ \Rightarrow\ H_A + 1{,}5 - 3 = 0\ \Rightarrow\ H_A - 1{,}5 = 0\ \Rightarrow\ \boldsymbol{H_A = 1,5\ KN}$$

$$\sum M_A = 0 \therefore M_A + 3V_B - 2H_B + 3 * 3 - 10 * 2{,}5 - 20 * 1 = 0 \Rightarrow$$

$$M_A + 3 * 3{,}5 - 2 * 1{,}5 + 9 - 25 - 20 = 0\ \Rightarrow M_A + 10{,}5 - 3 + 9 - 25 - 20 = 0 \Rightarrow$$

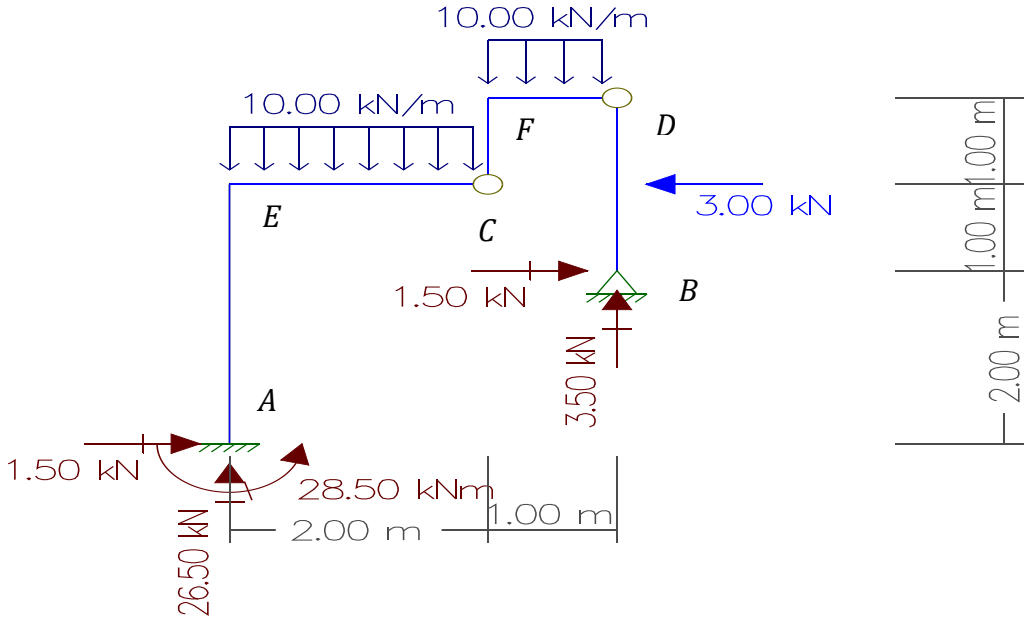
$$M_A + 19{,}5 - 48 = 0\ \Rightarrow M_A - 28{,}5 = 0\ \Rightarrow\ \boldsymbol{M_A = 28,5\ KN.m}$$

$$\sum F_V = 0\ \therefore V_A + V_B - 10 - 20 = 0\ \Rightarrow\ V_A + 3{,}5 - 30 = 0\ \Rightarrow V_A - 26{,}5 = 0\ \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{V_A = 26,5\ KN}$$

DCL final da estrutura inteira

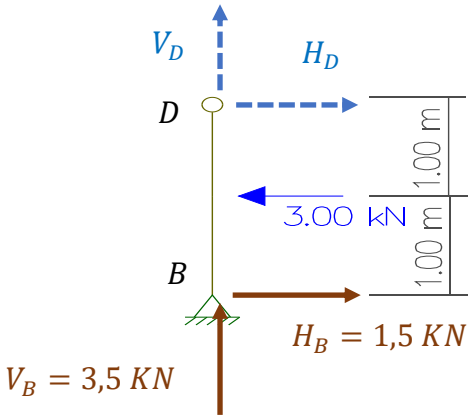
Figura 270 – Exemplo 1



Fonte: autor

D) Reações V_D e H_D na rótula interna D usando a barra DB (DCL inicial)

Figura 271 – Exemplo 1



Fonte: autor

Logo:

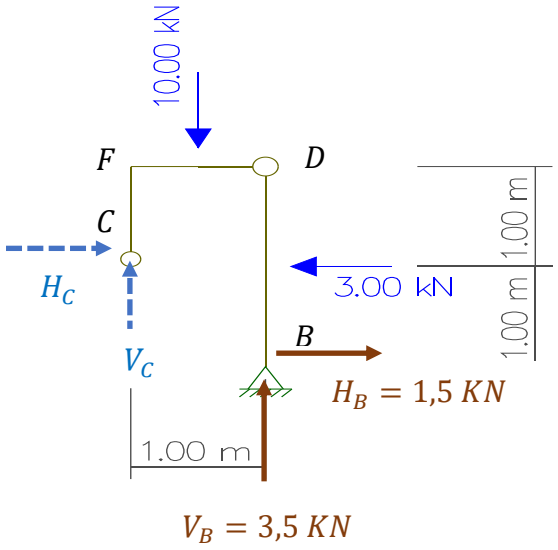
$\sum F_V = 0 \ \therefore \ V_D + V_B = 0 \ \Rightarrow V_D + 3{,}5 = 0 \ \Rightarrow \ \boldsymbol{V_D = -3{,}5\ KN}$ $(sentido\ invertido \rightarrow o\ sentido\ correto\ de\ V_D\ é\ para\ baixo)$

$\sum F_H = 0 \ \therefore \ H_D + H_B - 3 = 0 \ \Rightarrow \ H_D + 1{,}5 - 3 = 0 \ \Rightarrow \ H_D - 1{,}5 = 0 \Rightarrow$

$\boldsymbol{H_D = 1{,}5\ KN}$

E) Reações V_C e H_C na rótula interna C usando a parte CFDB à direita de C.

Figura 272 – Exemplo 1



Fonte: autor

$$\sum F_V = 0 \ \therefore \ V_C + V_B - 10 = 0 \ \Rightarrow V_C + 3{,}5 - 10 = 0 \ \Rightarrow \ V_C - 6{,}5 = 0 \ \Rightarrow$$

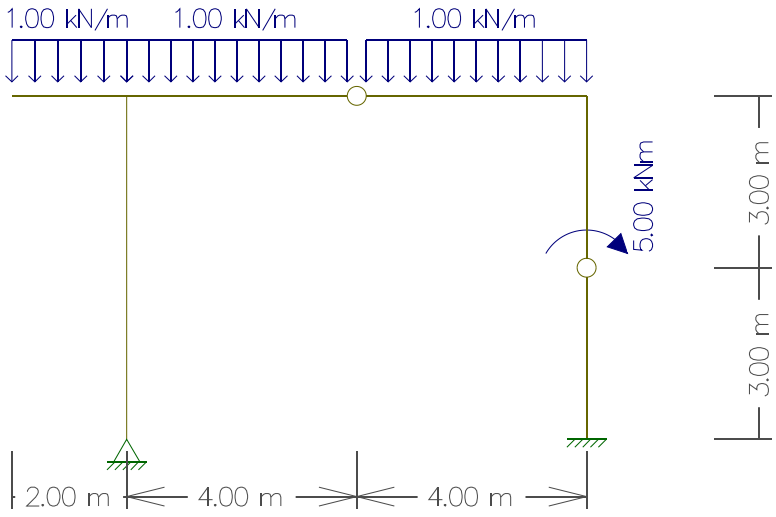
$$\boldsymbol{V_C = 6{,}5\ KN}$$

$$\sum F_H = 0 \therefore \ H_C + H_B - 3 = 0 \ \Rightarrow \ H_D + 1{,}5 - 3 = 0 \ \Rightarrow H_D - 1{,}5 = 0 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{H_C = 1{,}5\ KN}$$

2°) Calcule o grau de hiperestaticidade, as reações de apoios, as reações nas rótulas internas e mostre o DCL final para o pórtico composto abaixo

Figura 273 -Exemplo 2



Fonte: Adaptado de notas de aula (Estruturas Isostáticas)

RESP:

A) Grau de hiperestaticidade gh:

Aplicando a equação da letra b do item 7.3.2 (existe 1 rótula), temos:

Temos duas rótulas internas (rótulas internas são nós) e $l_1 = l_2 = (2-1)$.

$gh = (3b + r) - 3n - l_1 - l_2 \ldots \quad \Rightarrow gh = (3 * 6 + 5) - 3 * 7 - 2 * (2 - 1)$

$gh = 23 - 21 - 2 = 23 - 23 = 0$

B) Reações de apoios:

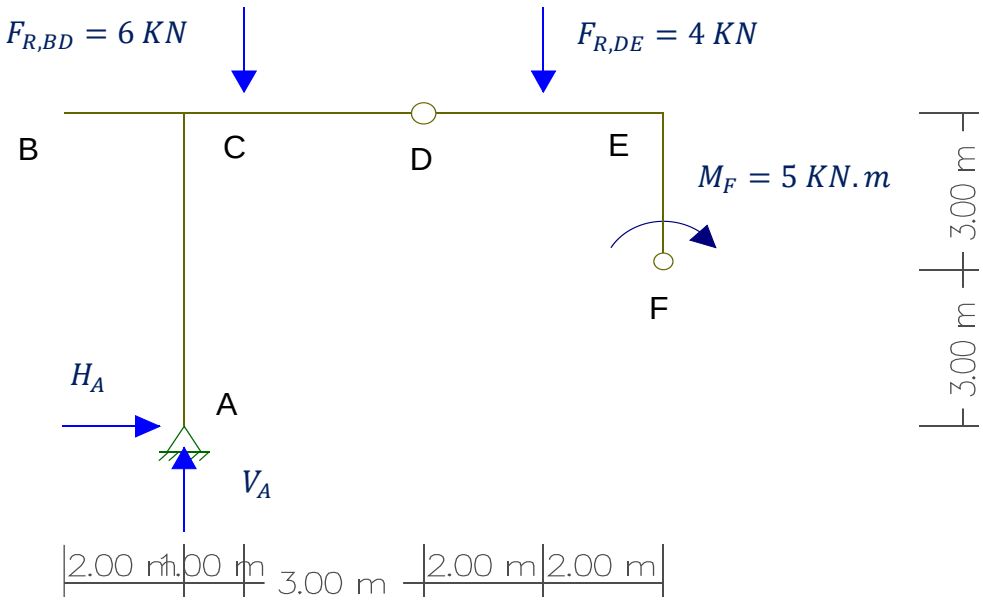
Nesse caso, construímos o DCL inicial da parte ABCDEF, sem estabilidade própria, e aplicamos sucessivamente $(\sum M_D = 0)$ e $(\sum M_F = 0)$. Como o apoio do 2° gênero não está alinhado com nenhuma das rótulas internas iremos obter duas equações nas variáveis V_A e H_A com as quais montamos e resolvemos um sistema 2x2 para obtermos aquelas reações no apoio de 2° gênero (apoio A)

DCL inicial da parte ABCDEF

$$\boldsymbol{F_{R,BD} = A_{BD} = (1 * 6) = 6\ KN} \quad \boldsymbol{e} \quad \boldsymbol{\bar{X}_{B,BE} = \frac{L_{BE}}{2} = \frac{6}{2} = 3\ m}$$

$$\boldsymbol{F_{R,DE} = A_{DE} = (1 * 4) = 4\ KN} \quad \boldsymbol{e} \quad \boldsymbol{\bar{X}_{D,DE} = \frac{L_{DE}}{2} = \frac{4}{2} = 2\ m}$$

Figura. 274 – Exemplo 2



Fonte: notas de aula (Estruturas Isostáticas)

Logo:

$$\sum M_D = 0 \therefore -4V_A + 6H_A + 3F_{R,BD} = 0 \Rightarrow -4V_A + 6H_A + 3 * 6 = 0 \Rightarrow$$

$$-4V_A + 6H_A + 18 = 0 \Rightarrow \quad \boldsymbol{-4V_A + 6H_A = -18} \quad \boldsymbol{eq.01}$$

$$\sum M_F = 0 \therefore -8V_A + 3H_A + 7F_{R,BD} + 2F_{R,DE} + (-M_F) = 0 \Rightarrow$$

$$-8V_A + 3H_A + 7 * 6 + 2 * 4 - 5 = 0 \Rightarrow -8V_A + 3H_A + 42 + 8 - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$-8V_A + 3H_A + 50 - 5 = 0 \Rightarrow \quad \boldsymbol{-8V_A + 3H_A = -45} \quad \boldsymbol{eq.02}$$

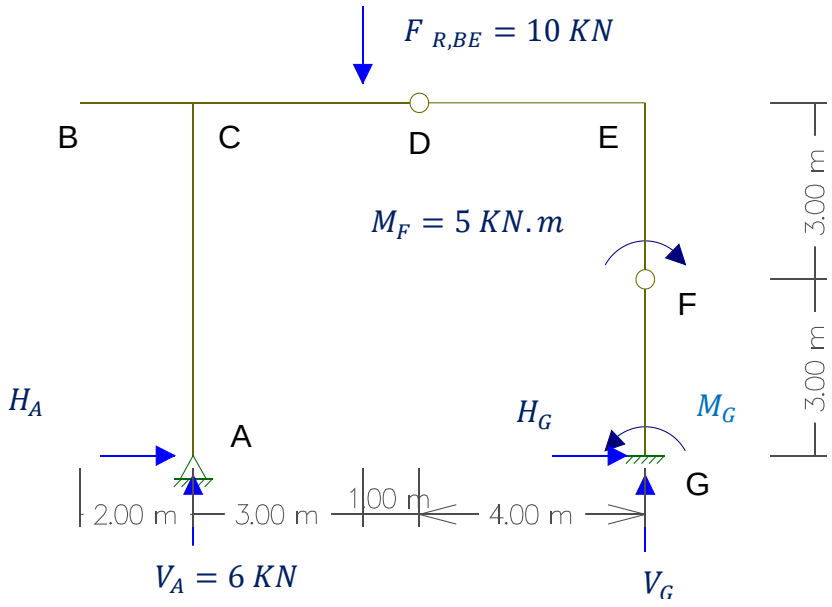
Montando e resolvendo um sistema (2 x 2), temos:

$\begin{cases} -4V_A + 6H_A = -18 & eq\ 1 \\ -8V_A + 3H_A = -45 & eq\ 2 \end{cases}$ resolvendo pelo método da adição, obtemos:

$\boldsymbol{H_A = 1\ KN}$ e $\boldsymbol{V_A = 6\ KN}$

B) DCL inicial da estrutura inteira

Figura 275 – Exemplo 2



Fonte: autor

Aplicando as três equações de equilíbrio estático para obter as três reações no apoio G.

$$\sum F_H = 0 \therefore\ H_G + H_A = 0 \Rightarrow\ H_G + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$H_G = \boldsymbol{-1\ KN}\ (inverter\ sentido\ no\ DCL\ final)$$

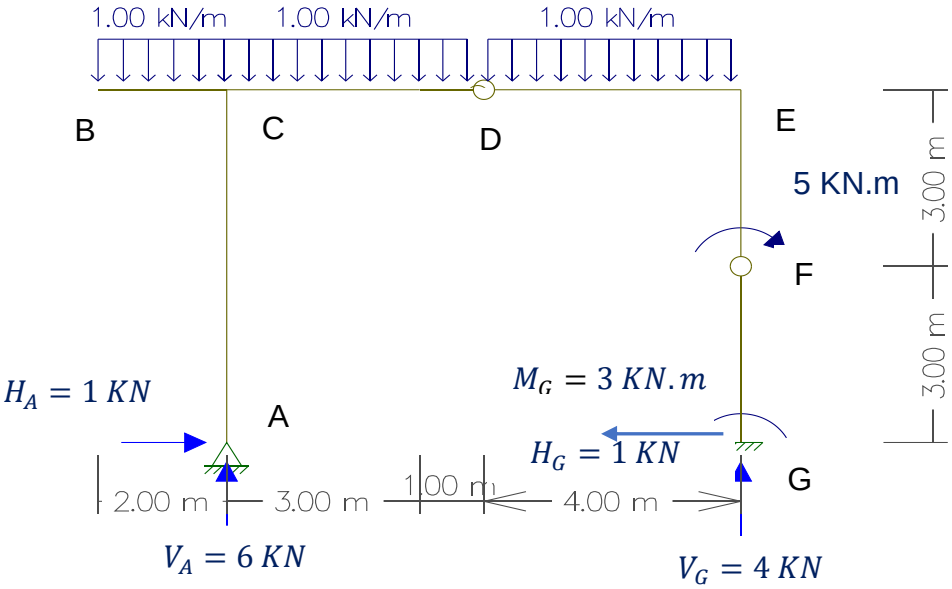
$$\sum M_G = 0 \therefore M_G - 8V_A + 5F_{R,BE} + (-M_F) = 0 \Rightarrow\ M_G - 8 * 6 + 5 * 10 - 5 = 0 \Rightarrow$$

$M_G - 48 + 50 - 5 = 0 \Rightarrow M_G - 53 + 50 = 0 \Rightarrow M_A - 3 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{M_G = 3\ KN.m}$

$\sum F_V = 0 \therefore V_G + V_A - F_{R,BE} = 0 \Rightarrow V_G + 6 - 10 = 0 \Rightarrow V_A - 4 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{V_A = 4\ KN}$

DCL final da estrutura inteira

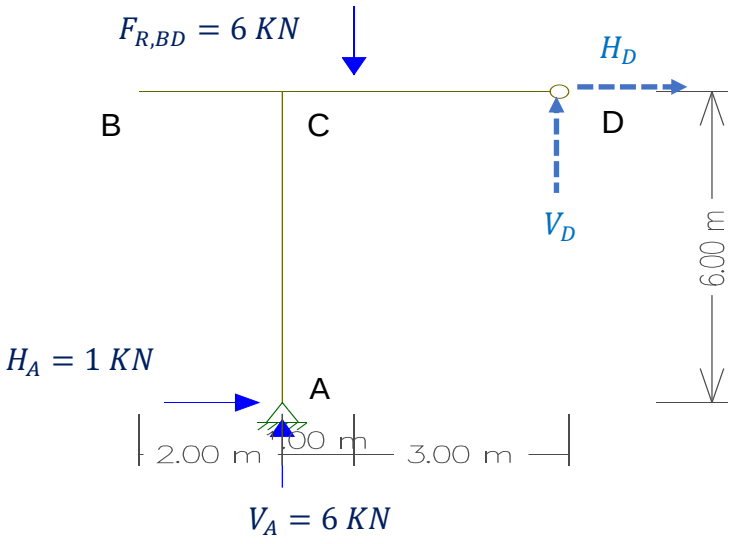
Figura 276 – Exemplo 2



Fonte: autor

D) Reações V_D e H_D na rótula interna D usando a parte ABCD (DCL inicial)

Figura 277 – Exemplo 2



Fonte autor

Logo:

$$\sum F_V = 0 \ \therefore \ V_D + V_A - 6 = 0 \ \Rightarrow V_D + 6 - 6 = 0 \ \Rightarrow \ \boldsymbol{V_D = 0\ KN}$$

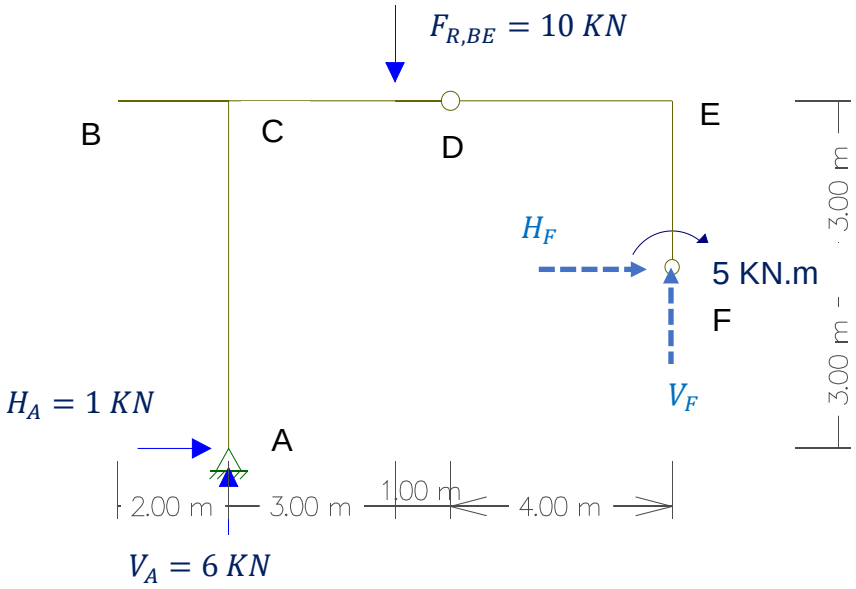
$$\sum F_H = 0 \therefore \ H_D + H_A = 0 \ \Rightarrow \ H_D + 1 = 0 \ \Rightarrow$$

$H_D = -\mathbf{1}\ \boldsymbol{KN}$ $(0\ sentido\ adotado\ para\ H_D$

$está\ invertido)$

D) Reações V_D e H_D na rótula interna D usando a parte ABCD (DCL inicial)

Figura 278 – Exemplo 2



Adaptado de notas de aula (Estruturas Isostáticas)

Logo:

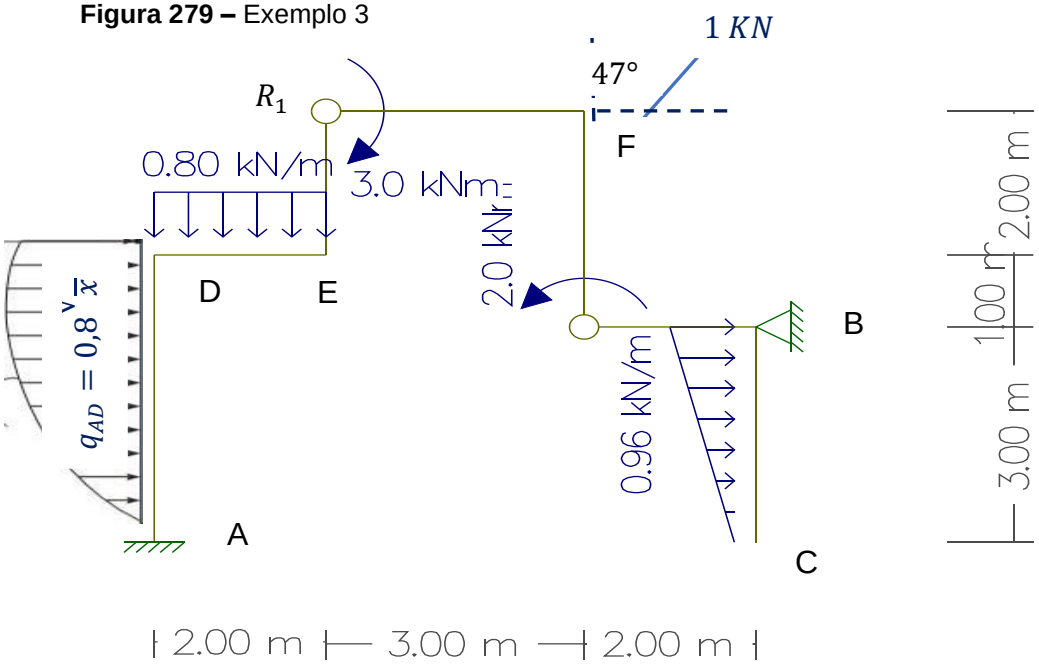
$$\sum F_V = 0 \ \therefore \ V_F + V_A - F_{B,BE} = 0 \ \Rightarrow V_F + 6 - 10 = 0 \ \Rightarrow \ \boldsymbol{V_F = 4\ KN}$$

$$\sum F_H = 0 \therefore \ H_F + H_A = 0 \ \Rightarrow \ H_F + 1 = 0 \ \Rightarrow$$

$$H_F = -\mathbf{1}\ \boldsymbol{KN}\ (0\ sentido\ adotado\ para\ H_F\ está\ invertido)$$

3°) Calcule o grau de hiperestaticidade, as reações de apoios, mostre o DCL final e calcule as reações nas rótulas internas para o pórtico composto abaixo

Figura 279 – Exemplo 3



Fonte: notas de aula (Estruturas Isostáticas)

RESP:

A) Grau de hiperestaticidade gh:

Aplicando a equação da letra B do item 7.3.2, temos:

Lembre-se: rótulas internas são nós e temos duas rótulas, assim $l_1 = l_2 = (2-1)$

$gh = (3b + r) - 3n - l_1 - l_2$ ...

$$gh = (3 * 7 + 5) - 3 * 8 - 2 * (2 - 1) = 26 - 24 - 2 \Rightarrow gh = 26 - 26 = 0$$

B) Reações de apoios:

Agora, construímos o DCL inicial da parte (R_1FR_2BC) sem estabilidade própria e aplicamos sucessivamente$(\sum M_{R2} = 0)$ e $(\sum M_{R1} = 0)$ para obtermos as reações no apoio de 2° gênero (apoio B) alinhado com a rótula R_2 (apoio B)

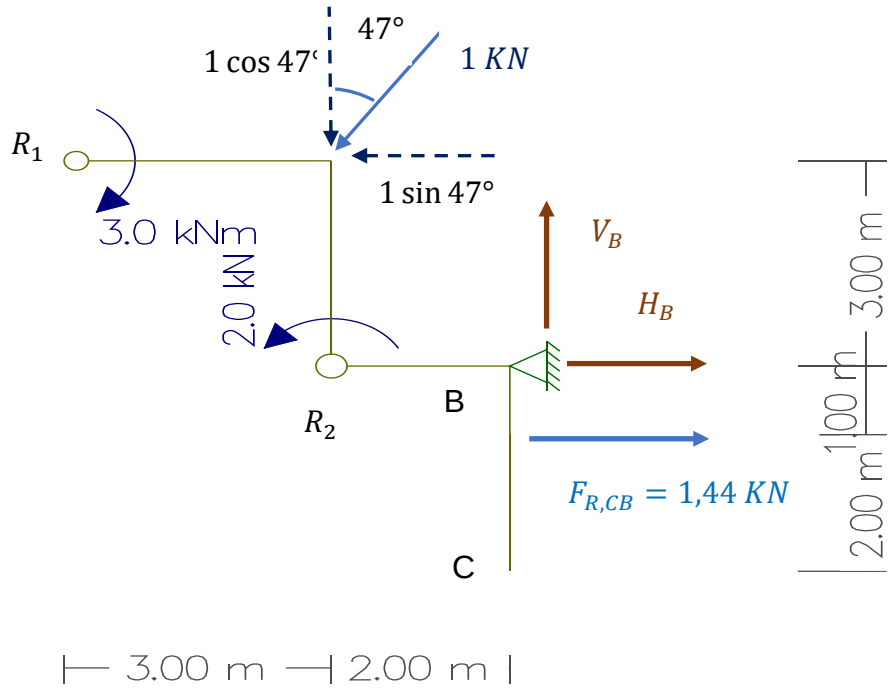
DCL inicial da parte (R_1FR_2BC)

A tabela 01 do item 5.1.4.2.2 fornece

$$\boldsymbol{F_{R,CB} = A_{CB} = \frac{q * L_{CB}}{2} = \frac{0{,}96 * 3}{2} = 1{,}44\ KN}$$

$$\boldsymbol{\bar{X}_{C,CB} = \frac{2 * L_{CB}}{3} = \frac{2 * 3}{3} = 2\ m}$$

Figura 280 – Exemplo 3



Fonte: notas de aula (Estruturas Isostáticas)

Logo:

$$\sum M_{R2} = 0 \therefore 2V_B + 1 * 1{,}44 = 0 \Rightarrow 2V_B = -1{,}44 \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_B = -0{,}72\ KN}$$

$$\sum M_{R1} = 0 \therefore 3H_B + 5V_B + 4 * 1{,}44 + M_2 - 3 * (1\cos 47°) - M_1 = 0 \Rightarrow$$

$$3H_B + 5(-0{,}72) + 5{,}76 + 2 - 2{,}05 - 3 = 0 \Rightarrow 3H_B - 8{,}65 + 7{,}76 = 0 \Rightarrow$$

$$3H_B - 0{,}92 = 0 \Rightarrow 3H_B = 0{,}92 \Rightarrow \quad \boldsymbol{H_B = 0{,}3\ KN}$$

DCL inicial da estrutura inteira

Dos exemplos anteriores e da tabela 01 (item 5.1.4.2.2) sabemos que:

$\boldsymbol{q_{AD}(x)} = 0{,}8\sqrt{x} = \sqrt{0{,}8^2 * x} = \sqrt{0{,}64 * x}$ logo:

$$\boldsymbol{F_{R,AD} = A_{AD}} = \frac{\boldsymbol{2} * \sqrt{\boldsymbol{0{,}64 * L_{AD}{}^3}}}{\boldsymbol{3}} = \frac{2\sqrt{0{,}64 * 4^3}}{3} = \frac{2 * \sqrt{40{,}96}}{3} = \frac{2 * 6{,}4}{3} = \boldsymbol{4{,}26\ KN}$$

$$\boldsymbol{\bar{X}_{A,AD} = 0{,}6 * L_{AD}} = 0{,}6 * 4 = \boldsymbol{2{,}4\ m}$$

$$\boldsymbol{F_{R,DE} = A_{DE}} = (0{,}8 * 2) = \boldsymbol{1{,}6\ KN} \quad \boldsymbol{e} \quad \boldsymbol{\bar{X}_{A,DE}} = \frac{\boldsymbol{L_{DE}}}{\boldsymbol{2}} = \frac{2}{2} = \boldsymbol{1\ m}$$

$$\boldsymbol{F_{R,CB} = A_{CB}} = \frac{q * L_{CB}}{2} = \frac{0{,}96 * 3}{2} = \boldsymbol{1{,}44\ KN}$$

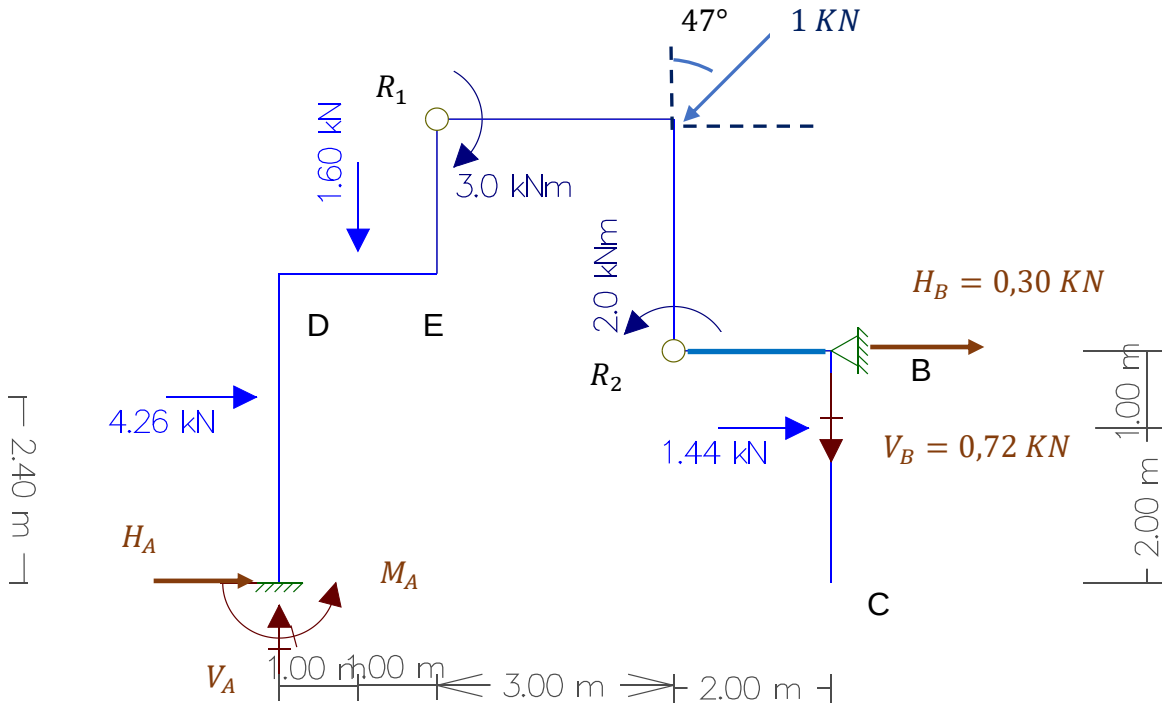
$$\bar{X}_{C,CB} = \frac{2 * L_{CB}}{3} = \frac{2 * 3}{3} = \mathbf{2\ m}$$

Observação: essa mesma resposta pode ser obtida pelas integrais abaixo

a) $\mathbf{FR} = \mathbf{A} = \int_0^{\mathbf{L}} \mathbf{q(x)\ dx}$ eq. 12 (item 4.1.4.2.1)

b) $\bar{\mathbf{x}} = \frac{\int_0^{\mathbf{L}} \mathbf{x} * \boldsymbol{q(x)dx}}{\boldsymbol{FR}}$ eq. 17 (item 4.1.4.2.2)

Figura. 281 – Exemplo 3



Fonte: notas de aula (Estruturas Isostáticas)

Logo:

$$\sum F_H = 0 \therefore\ H_A + H_B + 1{,}44 - 1 * \sin 47° + 4{,}26 = 0 \Rightarrow$$

$$H_A + 0{,}3 + 1{,}44 - 0{,}73 + 4{,}26 = 0 \Rightarrow H_A + 6 - 0{,}73 = 0\ \Rightarrow H_A + 5{,}27 = 0 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{H_A = -5{,}27KN}$$

$$\sum M_A = 0 \therefore M_A + 7V_B - 3H_B - 1{,}44 * 2 + M_2 + 6(1 \sin 47°) - 5(1 \cos 47°) - M_3$$

$$- 1{,}6 * 1 - 4{,}26 * 2{,}4 = 0\ \Rightarrow$$

$$M_A - 7 * 0{,}72 - 3 * 0{,}3 - 2{,}88 + 2 + 4{,}39 - 3{,}41 - 3 - 1{,}6 - 10{,}22 = 0 \Rightarrow$$

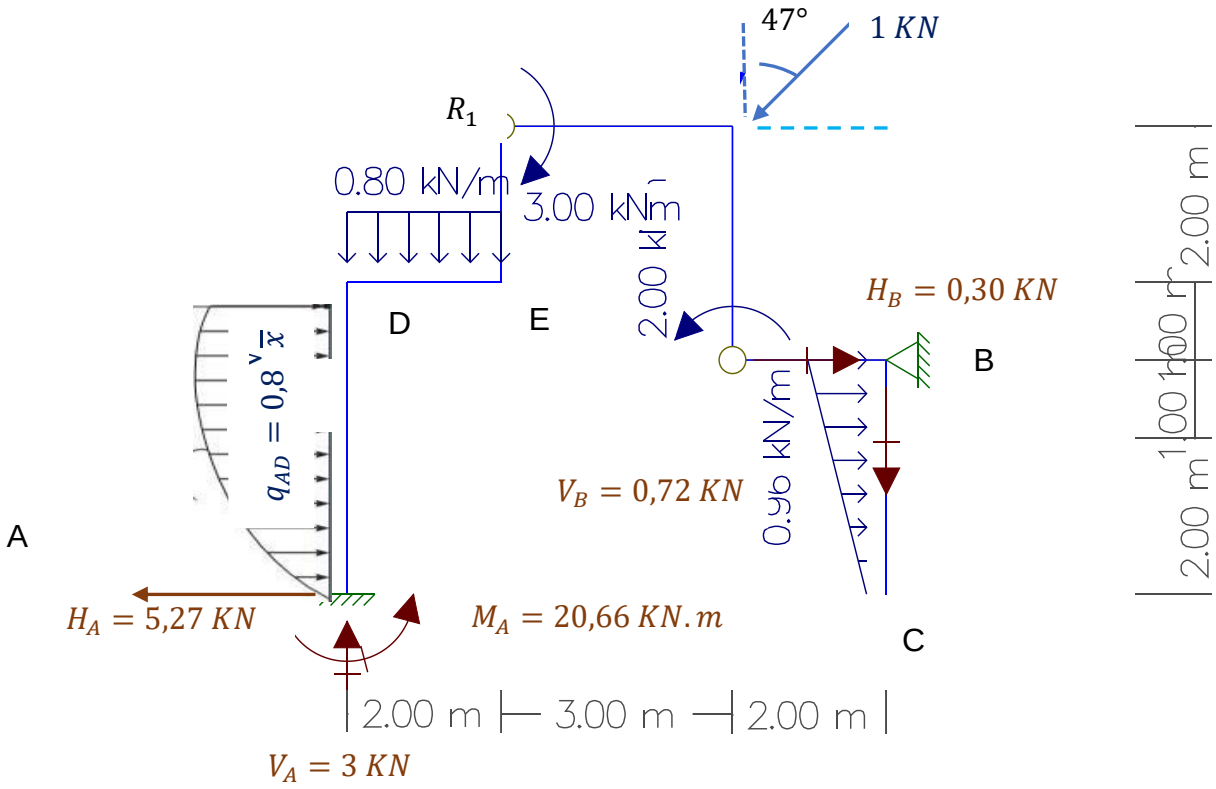
$$M_A + 6{,}39 - 27{,}05 = 0 \Rightarrow M_A - 20{,}66 = 0\ \Rightarrow\ \ \boldsymbol{M_A = 20{,}66\ KN}$$

$$\sum F_V = 0\ \ \therefore V_A + V_B - 1{,}6 - 1\,(\cos 47°) = 0\ \ \Rightarrow\ \ V_A - 0{,}72 - 1{,}6 - 0{,}68 = 0\ \ \Rightarrow$$

$V_A - 3 = 0 \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_A = 3\ KN}$

DCL final da estrutura inteira

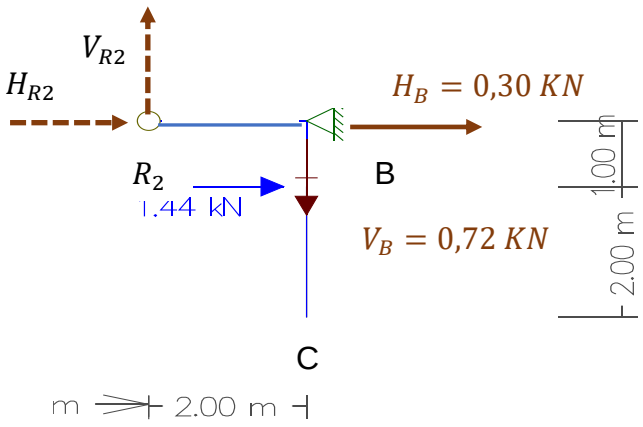
Figura 282 – Exemplo 3



Fonte: notas de aula (Estruturas Isostáticas)

D) Reações V_{R2} e H_{R2} na rótula interna R_2 usando a parte R_2BC (DCL inicial)

Figura 283 – Exemplo 3



Fonte: autor

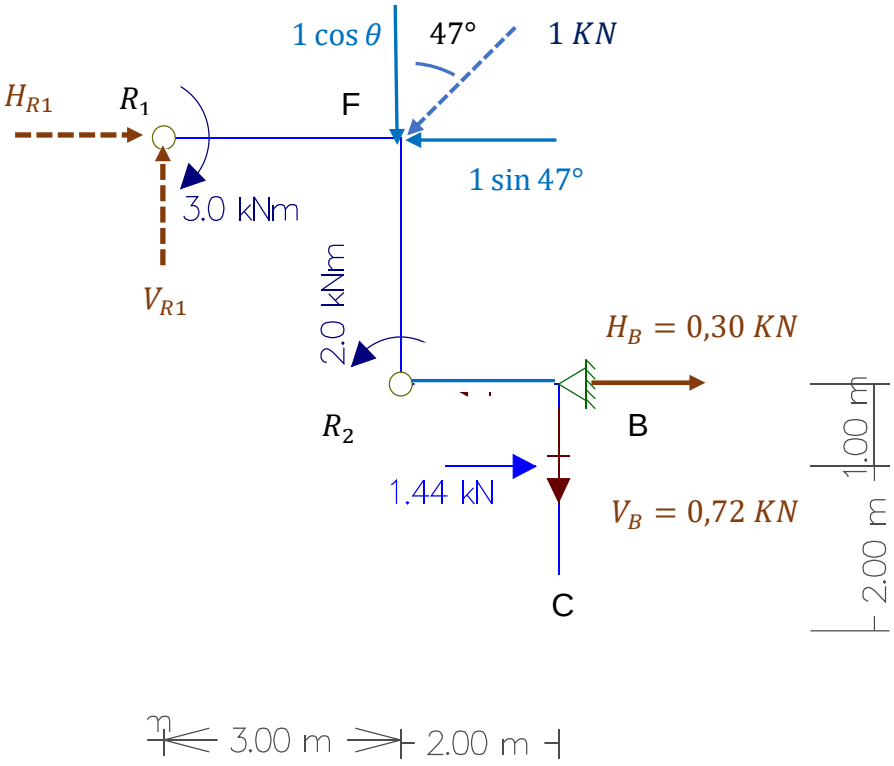
$\sum F_V = 0 \ \therefore \ V_{R2} - V_B = 0 \ \Rightarrow V_{R2} - 0{,}72 = 0 \ \Rightarrow \ \boldsymbol{V_{R2} = 0{,}72\ KN}$

$\sum F_H = 0 \therefore \ H_{R2} + H_B + 1{,}44 = 0 \ \Rightarrow \ H_{R2} + 0{,}3 + 1{,}44 = 0 \ \Rightarrow \ H_{R2} + 1{,}74 = 0 \Rightarrow$

$\boldsymbol{H_{R2} = -1{,}74\ KN}$ (o sentido correto é para a esquerda)

C) Reações na rótula interna R2 usando a parte R_1FR_2BC (DCL inicial)

Figura 284 – Exemplo 3



Fonte: notas de aula (Estruturas Isostáticas)

$\sum F_V = 0 \ \therefore V_{R1} - 1 * \cos 47° - V_B = 0 \ \Rightarrow V_{R1} - 0{,}68 - 0{,}72 = 0 \ \Rightarrow \ V_{R1} - 1{,}4 = 0$

$\Rightarrow$

$\boldsymbol{V_{R1} = 1{,}4\ KN}$

$\sum F_H = 0 \therefore \ H_{R1} - 1 * \sin 47° + H_B + 1{,}44 = 0 \Rightarrow \ H_{R1} + 1{,}74 - 0{,}73 = 0 \ \Rightarrow$

$H_{R1} + 1{,}01 = 0 \ \Rightarrow \boldsymbol{H_{R1} = -1{,}01 KN}$ (o sentido correto é para a esquerda)

3°) caso: Pórticos compostos com mais de dois apoios.

Roteiro para o cálculo das reações de apoios

• Identificar as partes sem estabilidade própria e construir o DCL inicial de cada uma dessa desmembrando a estrutura nas rótulas e introduzindo uma ou duas

reações nas rótulas internas (apoio do 1° ou do 2° gênero) de modo a transformar cada parte sem estabilidade própria em uma estrutura isostática.

• Calcular as reações de apoio de cada parte sem estabilidade própria aplicando

($\sum M_{Rót} = 0$) e em seguida calcular as reações na rótula usando $\sum F_V = 0$ e $\sum F_H = 0$

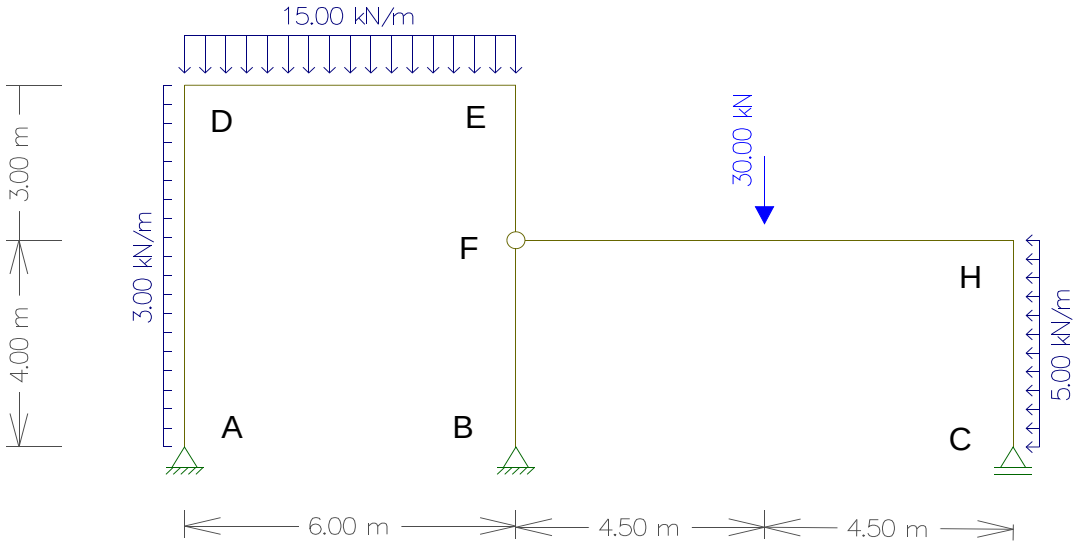
• Após obter as reações em cada parte sem estabilidade própria construir o DCL inicial da(s) parte(s) com estabilidade própria transferindo, com sentidos invertidos, as reações nas rótulas e aplica r as três equações de equilíbrio estático para obter as reações de apoios da parte com estabilidade própria

• Construir o DCL inicial da estrutura inteira

Aplicação

1°) Calcule o grau de hiperestaticidade, as reações de apoios e mostre o DCL final para o pórtico composto abaixo

Figura 285 – Exemplo 1



Fonte: notas de aula (Estruturas Isostáticas)

RESP

A) Grau de hiperestaticidade gh:

Aplicando a equação da letra B do item 7.3.2, temos:

Lembre-se: rótulas internas são nós e temos uma rótula na qual chegam três barras assim l1= (3 -1)

$gh = (3b + r) - 3n - l_1 - l_2 \ldots \quad \Rightarrow gh = (3 * 6 + 5) - 3 * 7 - (3 - 1) = 23 - 21 - 2$

$gh = 23 - 23 = 0$

B) Reações de apoios

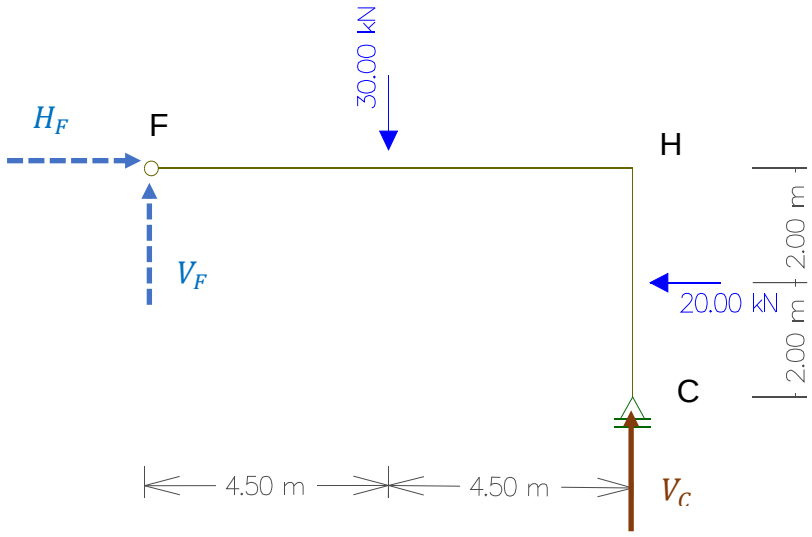
A parte sem estabilidade própria é FHC à direita da rótula F

DCL inicial da parte FHC:

Dos exemplos anteriores e da tabela 01 (item 5.1.4.2.2) sabemos que:

a) $\boldsymbol{F_{R,HC}} = (5 * 4) = \mathbf{20\ KN} \qquad \boldsymbol{\bar{X}_{C,HC}} = \frac{L_{HC}}{2} = \frac{4}{2} = \mathbf{2\ m}$

Figura 286– Exemplo 1



Fonte: notas de aula (Estruturas Isostáticas)

Logo:

• $\sum M_F = 0 \therefore 9V_C - 20 * 2 - 30 * 4{,}5 = 0 \Rightarrow 9V_C - 40 - 135 = 0 \Rightarrow 9V_C - 175 = 0$

$9V_C = 175 \Rightarrow \boldsymbol{V_C = 19{,}44\ KN}$

• Reações na rótula interna F:

$\sum F_V = 0 \ \therefore \ V_F + V_C - 30 = 0 \Rightarrow \ V_E + 19{,}44 - 30 = 0 \Rightarrow \ V_E - 10{,}56 = 0 \Rightarrow$

$\boldsymbol{V_F = 10{,}56\ KN}$

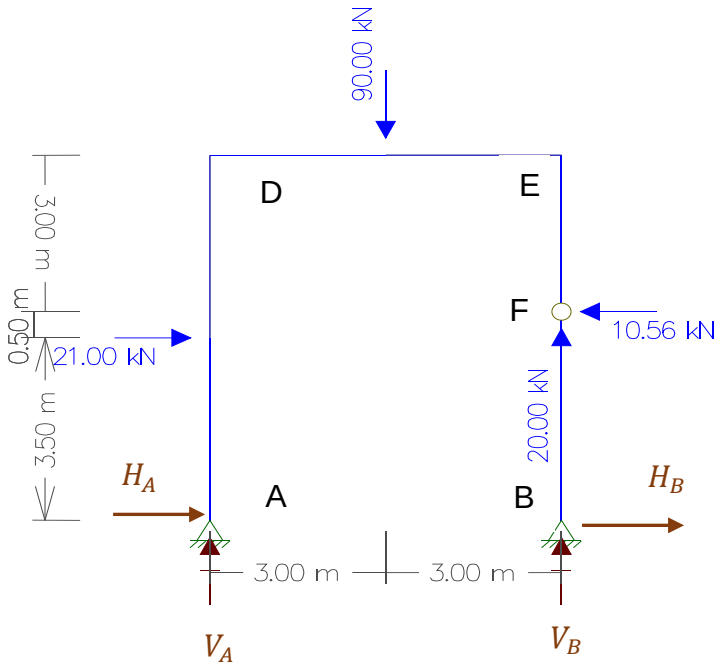
$\sum F_H = 0 \therefore \ H_F - 20 = 0 \ \Rightarrow \quad \boldsymbol{H_F = 20\ KN}$

• Agora, construímos o DCL inicial da parte com estabilidade própria (o tri-articulado de apoios alinhados ADEFB) e transferimos as reações internas invertendo os seus sentidos.

a) **FR1** = AAD = 3 x 7 = **21 KN** **FR2** = ADE = (15 x 6) = **90 KN**

b) $\overline{X_{A1}}$ = LAD / 2 = 7 / 2 = **3,5 m** $\overline{X_{A2}}$ = LDE / 2 = 6 / 2 = **3 m**

Figura 287 – Exemplo 1



Fonte: notas de aula (Estruturas Isostáticas)

• $\sum M_B = 0 \therefore -6V_A - 21 * 3{,}5 + 90 * 3 + 20 * 4 = 0 \Rightarrow -6V_A - 73{,}5 + 350 = 0 \Rightarrow$

$-6V_A + 276{,}5 = 0 \Rightarrow -6V_A = -276{,}5 \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_A = 46{,}08\ KN}$

• $\sum F_V = 0 \therefore V_B + V_A - 90 - 10{,}56 = 0 \Rightarrow V_B + 46{,}08 - 90 - 10{,}56 = 0 \Rightarrow$

$V_B - 54{,}48 = 0 \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_B = 54{,}48\ KN}$

• Considerando a parte ADEF, à esquerda da rótula, inclusive as reações de apoio dessa parte, temos (se achar necessário faça o DCL inicial da parte ADEF):

$\sum M_F = 0 \therefore 4H_A - 6V_A + 21 * 0{,}5 + 90 * 3 = 0 \Rightarrow 4H_A - 6 * 46{,}08 + 10{,}5 + 270 = 0$

$4H_A - 276{,}5 + 280{,}5 = 0 \Rightarrow 4H_A + 4 = 0 \Rightarrow 4H_A = -4 \Rightarrow \quad \boldsymbol{H_A = -1\ KN}$

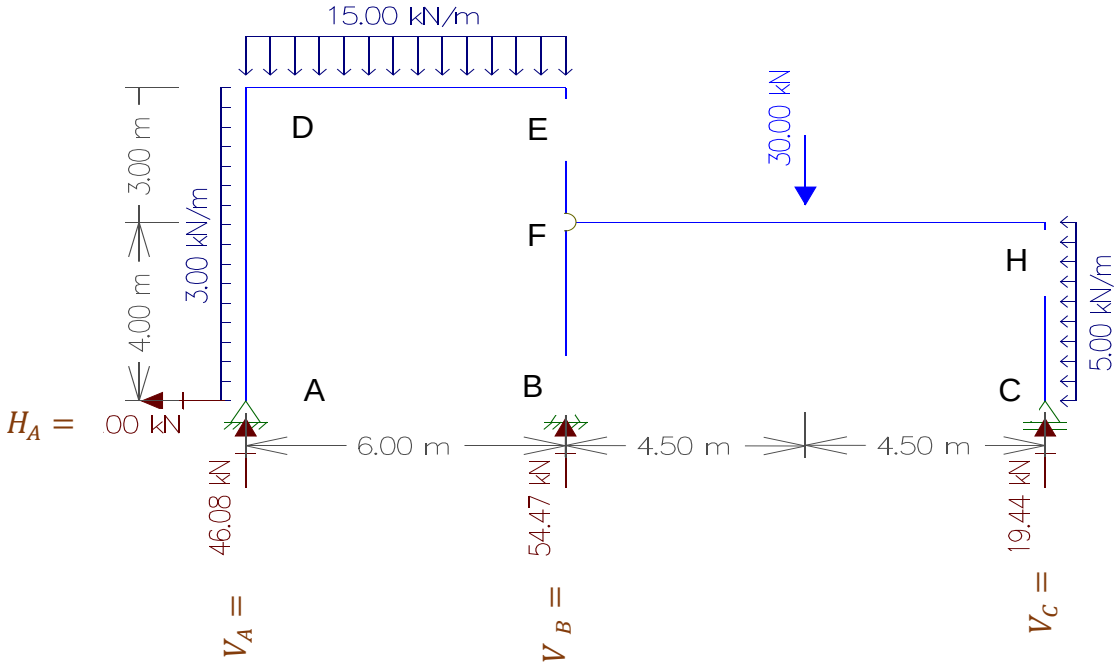
$$\sum F_H = 0 \therefore\ H_B + H_A + 21 - 20 = 0 \Rightarrow H_B - 1 + 21 - 20 = 0\ \Rightarrow\ H_B - 21 + 21 = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{H_B = 0\ KN}$$

DCL final da estrutura inteira

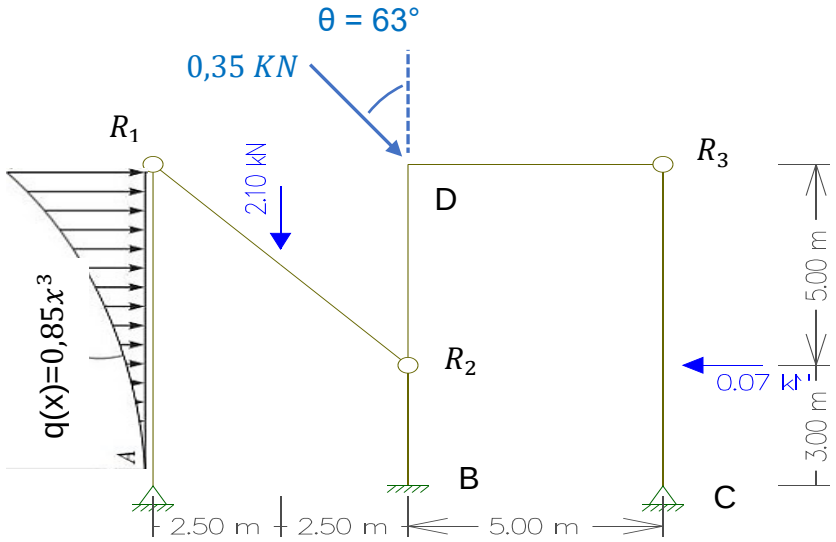
Figura 288 – Exemplo 1



Fonte: notas de aula (Estruturas Isostáticas)

2°) Calcule o grau de hiperestaticidade, as reações de apoios e mostre o DCL final para o pórtico composto a seguir:

Figura 289- Exemplo 2



Fonte: notas de aula (Estruturas Isostáticas)

RESP

A) Grau de hiperestaticidade gh:

Aplicando a equação da letra B do item 7.3.2, temos

Lembre-se: rótulas internas são nós e temos três rótulas tal que l_1= (2 -1), l_2 = (3-1) e l_3 = (2-1).$gh = (3b + r) - 3n - l_1 - l_2$ ... ⇒

$gh = (3 * 6 + 7) - 3 * 7 - (2 - 1) - (3 - 1) - (2 - 1)$

$gh = 25 - 21 - 1 - 2 - 1 = 25 - 25 = 0$

B) Reações de apoios

Considerando a parte AR_1R_2, sem estabilidade própria, à direita da rótula R_2, temos:

DCL inicial da parte AR_1R_2:

Dos exemplos anteriores e da tabela 01 (item 5.1.4.2.2) sabemos que:

a) **FR** = A_{AR1} = $\frac{K*L^4}{4} = \frac{0,85*8^4}{4} = \mathbf{870,4\ KN}$

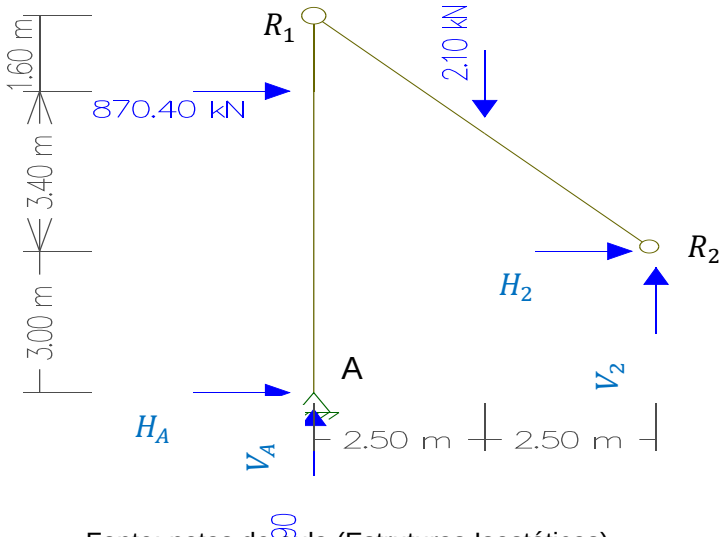
$\overline{X_A} = 0,8.L = 0,8 * 8 = \mathbf{6,40\ m}$

Observação: essa mesma resposta pode ser obtida pelas integrais abaixo

$\mathbf{FR = A = \int_0^L q(x)\,dx}$ eq. 12 (item 4.1.4.2.1)

b) $\bar{\mathbf{x}} = \frac{\int_0^L \mathbf{x} * q(x)dx}{FR}$ eq. 17 (item 4.1.4.2.2)

Figura. 290– Exemplo 2



Fonte: notas de aula (Estruturas Isostáticas)

• Observe que temos agora o tri-articulado AR1R2 com um apoio alinhado com a rótula, assim considerando a barra AR1 vamos aplicar $(\sum M_{R1} = 0)$, logo ficamos com HA como única incógnita e poderemos obtê-la imediatamente.

$$\sum M_{R1} \circlearrowright = 0 \therefore 8H_A + 870{,}4 * 1{,}6 = 0 \Rightarrow 8H_A + 1392{,}64 = 0 \Rightarrow 8H_A = -1392{,}64 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{H_A = -174{,}08\ KN}$$

Agora, aplicamos $(\sum M_{R2} = 0)$ para obtermos a reação vertical V_A.

$$\sum M_{R2} \circlearrowright = 0 \ \therefore \ -5V_A + 3H_A - 870{,}4 * 3{,}4 + 2{,}1 * 2{,}5 = 0 \Rightarrow$$

$$-5V_A - 3 * 174{,}08 - 2959{,}36 + 5{,}25 = 0 \Rightarrow -5V_A - 522{,}24 - 2959{,}36 + 5{,}25 = 0 \Rightarrow$$

$$-5V_A - 3481{,}6 + 5{,}25 = 0 \Rightarrow -5V_A - 3476{,}35 = 0 \Rightarrow -5V_A = 3476{,}35 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{V_A = -695{,}27\ KN}$$

Conhecendo V_A *e* H_A podemos obter as reações H_2 *e* V_2 na rótula R_2

$$\sum F_H = 0 \therefore \ H_2 + H_A + 870{,}4 = 0 \ \Rightarrow \ H_2 - 174{,}08 + \ 870{,}4 = 0 \Rightarrow H_2 + 696{,}32 = 0$$

$$\Rightarrow$$

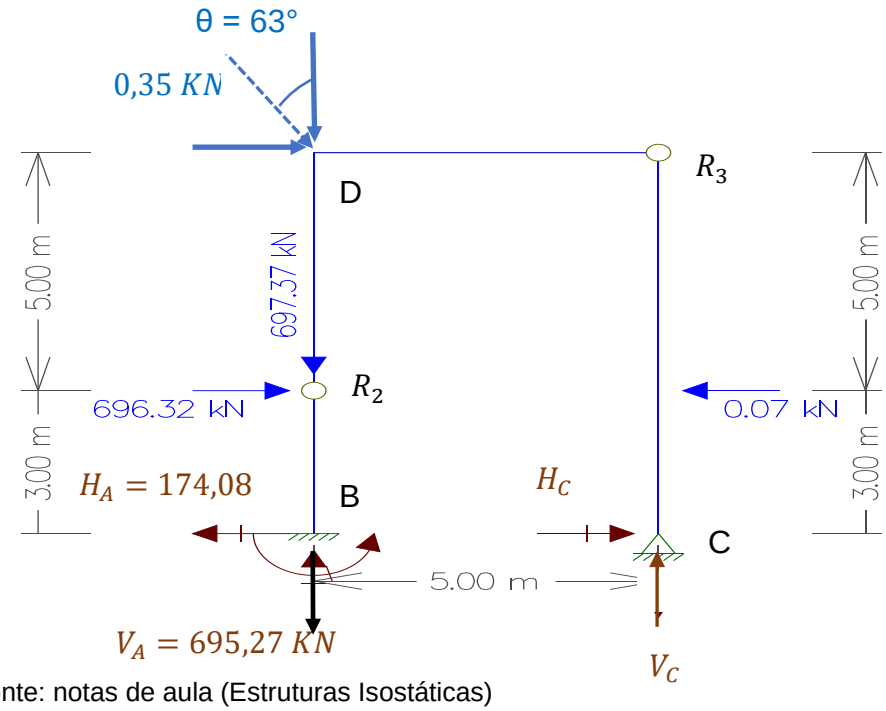
$$\boldsymbol{H_2 = -696{,}32\ KN}\ (o\ sentido\ correto\ de\ H_2\ \text{é}\ para\ a\ esquerda)$$

$$\sum F_V = 0 \ \therefore V_2 + V_A - 2{,}1 = 0 \ \Rightarrow \ V_2 - 695{,}27 - 2{,}1 = 0 \Rightarrow V_2 - 697{,}37 = 0 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{V_2 = 697{,}37\ KN}$$

Agora, construímos o DCL inicial do pórtico composto BR2DR3C com dois apoios e duas rótulas internas sendo um apoio alinhado com uma rótula transferindo para ele as reações na rótula R_2 com os sentidos invertidos.

Figura 291 – Exemplo 2



Fonte: notas de aula (Estruturas Isostáticas)

• Considerando a parte CR3 de apoio alinhado com a rótula R3 e aplicando ($\sum M_{R3} = 0$) temos Hc como única variável, assim podemos obtê-la imediatamente

$\sum M_{R3} \circlearrowright = 0 \therefore 8H_C = 0 \Rightarrow 8H_A - 0{,}07 * 5 = 0 \Rightarrow 8H_C - 0{,}35 = 0 \Rightarrow 8H_C = 0{,}35 \Rightarrow$

$\boldsymbol{H_C = 0{,}04\ KN}$

Agora, conhecendo H_C e considerando o tri-articulado CR3DR2 aplicamos ($\sum M_{R2} = 0$) e ficamos com Vc como única variável, assim podemos obtê-la imediatamente

$\sum M_{R2} \circlearrowright = 0 \therefore 5V_C + 3H_C - 5(0{,}35 \sin 63°) = 0 \Rightarrow 5V_C + 3 * 0{,}04 - 5 * 0{,}31 = 0 \Rightarrow$

$5V_C + 0{,}12 - 1{,}55 = 0 \Rightarrow 5V_C - 1{,}43 = 0 \Rightarrow 5V_C = 1{,}43 \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_C = 0{,}29\ KN}$

Agora, conhecendo H_C e V_C e considerando o pórtico composto BR2DR3C aplicamos as três equações de equilíbrio estático para obtermos as reações no apoio B, logo:

$$\sum F_H = 0 \therefore H_B + H_C + H_2 - 0{,}07 + 0{,}35(\sin 63°) = 0 \Rightarrow$$

$$H_B + 0{,}04 + 696{,}32 - 0{,}07 + 0{,}31 = 0 \Rightarrow H_B + 696{,}6 = 0 \Rightarrow \quad \boldsymbol{H_B = -696{,}6\ KN}$$

$$\sum M_B = 0 \ \therefore M_B + 5V_C + 0{,}07 * 3 - 8(0{,}35 \sin 63°) - 3H_2 = 0 \Rightarrow$$

$$M_B + 5 * 0{,}29 + 0{,}07 * 3 - 2{,}49 - 3 * 696{,}32 = 0$$

$$\Rightarrow M_B + 1{,}45 + 0{,}21 - 2{,}49 - 2088{,}96 = 0$$

$$M_B - 2089{,}79 = 0 \Rightarrow \quad \boldsymbol{M_B = 2089{,}79\ KN}$$

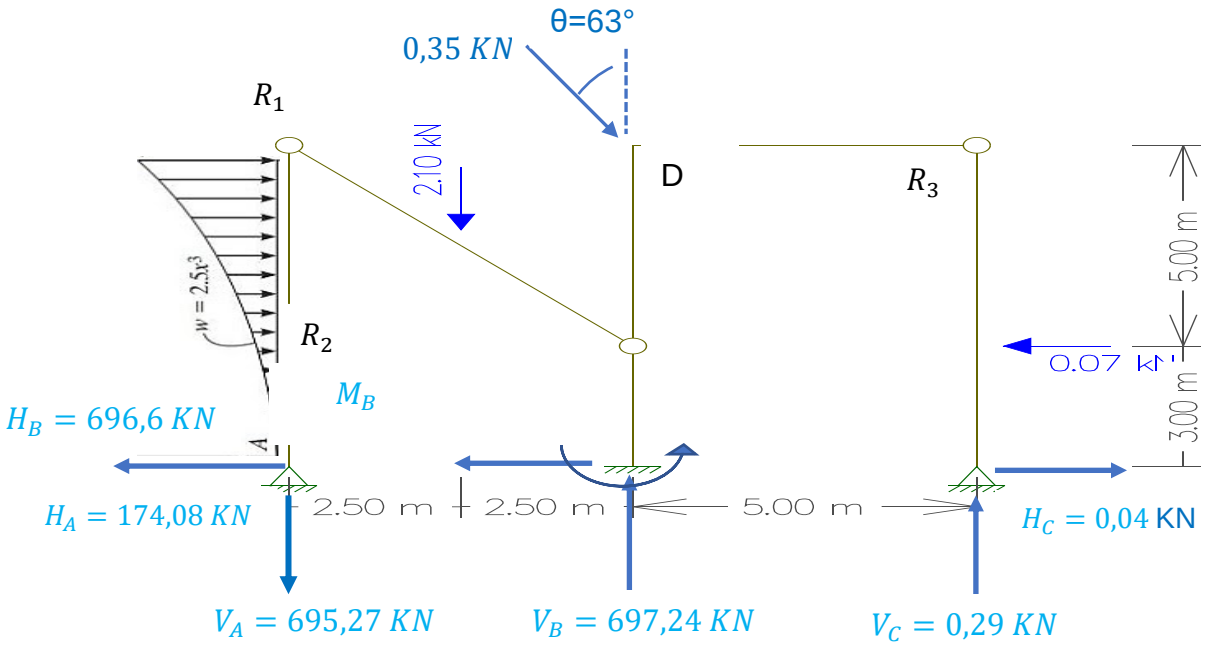
$$\sum F_V = 0 \ \therefore V_B + V_C - 0{,}35 \cos 63° - 697{,}37 = 0 \ \Rightarrow \ V_B + 0{,}29 - 0{,}16 - 697{,}37 = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$V_B - 697{,}39 = 0 \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_B = 697{,}24\ KN}$$

DCL final

Figura 292- Exemplo 2

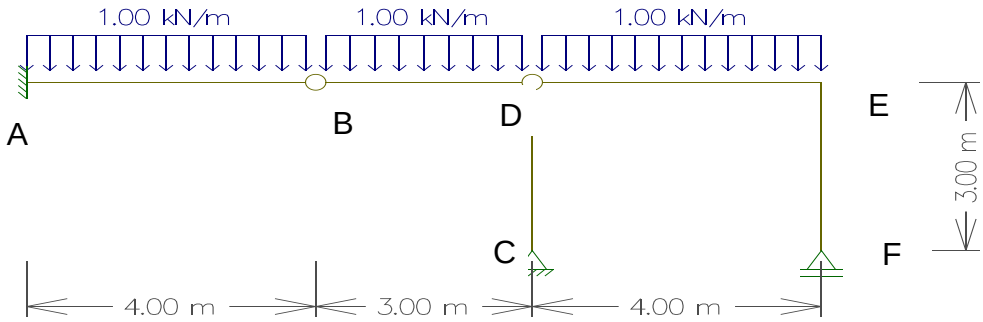


Fonte: notas de aula (Estruturas Isostáticas)

3°) Calcule as reações de apoios e mostre o DCL final para o pórtico composto abaixo:

$q(x) = 0{,}85x^3$

Figura.293 – Exemplo 3



Fonte: notas de aula (Estruturas Isostáticas)

RESP

A) Grau de hiperestaticidade gh:

Aplicando a equação da letra B do item 7.3.2, temos

Lembre-se: rótulas internas são nós e temos três rótulas tal que l_1= (2 -1), l_2 = (3-1)

$gh = (3b + r) - 3n - l_1 - l_2 \ldots \quad \Rightarrow$

$gh = (3 * 5 + 6) - 3 * 6 - (2 - 1) - (3 - 1) - (2 - 1)$

$gh = 21 - 18 - 1 - 2 = 21 - 21 = 0$

B) Reações de apoios

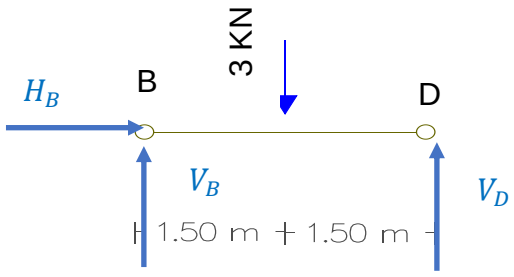
Considerando a viga geber BD, sem estabilidade própria, temos:

Dos exemplos anteriores e da tabela 01 (item 5.1.4.2.2) sabemos que:

a) $\boldsymbol{F_{R,BD}} = A_{BD} = (q * L_{BD}) = (1 * 3) = 3\ \boldsymbol{KN}$ $\qquad \overline{\boldsymbol{X_B}} = \frac{L_{BD}}{2} = \frac{3}{2} = \boldsymbol{1,5\ m}$

DCL inicial isostática BD

Figura 293 – Exemplo 3



Fonte: autor

Logo:

$\sum F_H = 0 \ \therefore H_C + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{H_C = 0\ KN}$

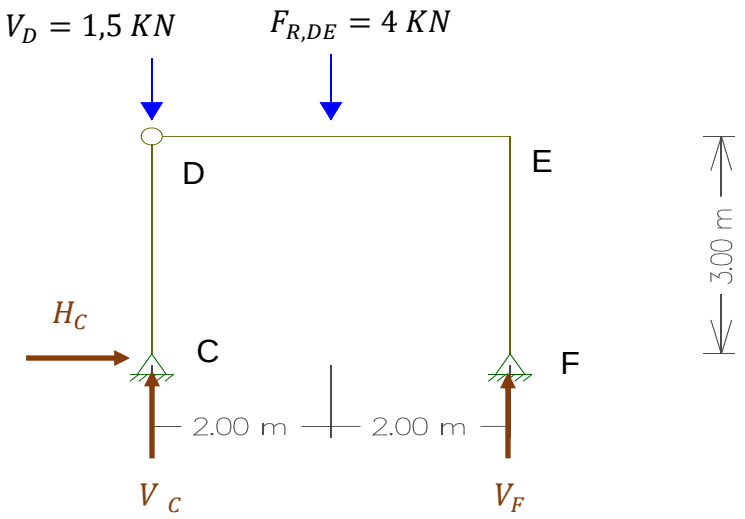
$\sum M_B \circlearrowright = 0 \therefore 3V_D - 3 * 1{,}5 = 0 \Rightarrow 3V_D = 4{,}5 \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_D = 1{,}5\ KN}$

$\sum F_V = 0 \ \therefore V_B + V_D - 3 = 0 \ \Rightarrow V_B + 1{,}5 - 3 = 0 \Rightarrow V_B - 1{,}5 = 0 \ \Rightarrow \boldsymbol{V_B = 1{,}5\ KN}$

Considerando o triarticulado de apoios alinhados CDEF e transferindo a reação V_D com o sentido invertido, temos

• $\boldsymbol{F_{R,DE} = A_{DE} = (q * L_{DE}) = (1 * 4) = 4\ KN} \qquad \boldsymbol{\overline{X_C} = \frac{L_{DE}}{2} = \frac{4}{2} = 2\ m}$

Figura 294 – Exemplo 3



Fonte: notas de aula (Estruturas Isostáticas)

Considerando o pórtico triarticulado CDEF, temos:

$\sum M_C \circlearrowright = 0 \therefore 4V_F - 2 * 4 = 0 \Rightarrow 4V_F = 8 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_F = 2\ KN}$

$\sum F_V = 0 \ \therefore V_C + V_F - 4 - 1{,}5 = 0 \ \Rightarrow V_C + 2 - 4 - 1{,}5 = 0 \Rightarrow V_B + 2 - 5{,}5 = 0 \ \Rightarrow$

$\boldsymbol{V_C = 3{,}5\ KN}$

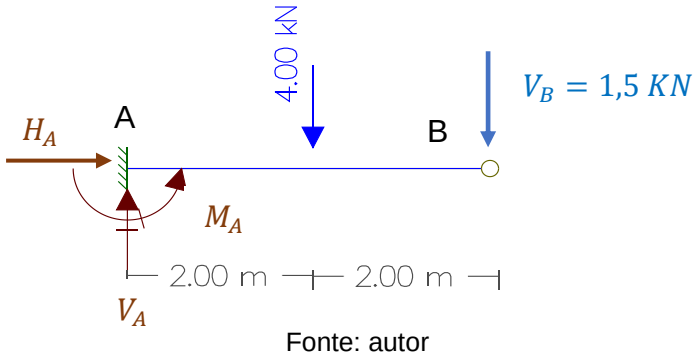
Considerando a barra CD, temos

$\sum M_D \circlearrowright = 0 \therefore 3H_C = 0 \Rightarrow \boldsymbol{H_C = 0\ KN}$

Para calcular as reações na barra engastada AB Construímos o DCL inicial transferindo a reação V_B com sentido invertido

• $\boldsymbol{F_{R,AB} = A_{AB} = (q * L_{AB}) = (1 * 4) = 4\ KN} \qquad \boldsymbol{\overline{X_A} = \frac{L_{AB}}{2} = \frac{4}{2} = 2\ m}$

Figura. 295 – Exemplo 3



Fonte: autor

Agora vem:

$$\sum F_H = 0 \ \therefore H_B + 0 = 0 \ \Rightarrow \quad \boldsymbol{H_B = 0\ KN}$$

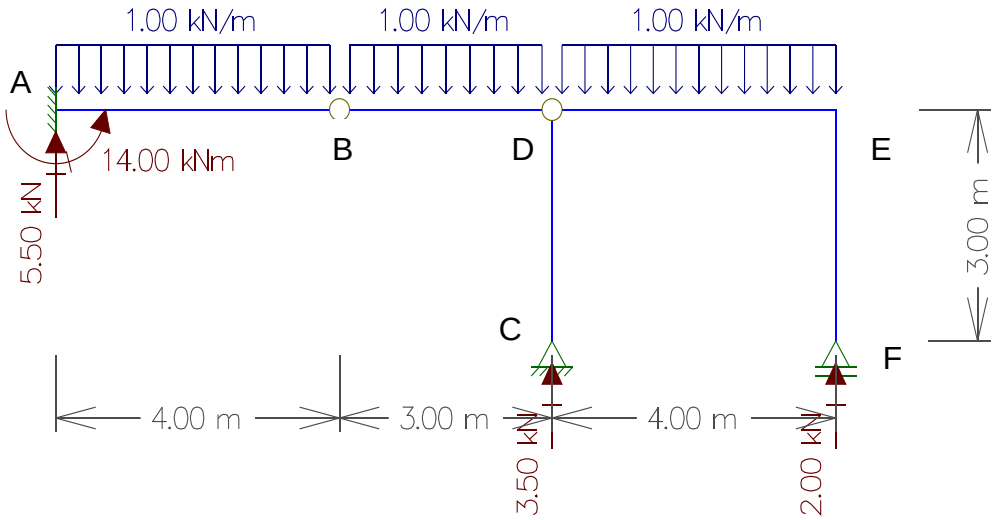
$$\sum M_A = 0 \therefore M_A - 2 * 4 - 4 * 1{,}5 = 0 \ \Rightarrow \ M_A - 8 - 6 = 0 \ \Rightarrow \ M_A - 14 = 0 \ \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{M_A = 14\ KN.m}$$

$$\sum F_V = 0 \ \therefore V_A - V_B - 4 = 0 \ \Rightarrow V_A - 1{,}5 - 4 = 0 \ \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_A = -5{,}5\ KN}$$

DCL final da estrutura inteira

Figura 296 – Exemplo 3



Fonte: notas de aula (Estruturas Isostáticas)

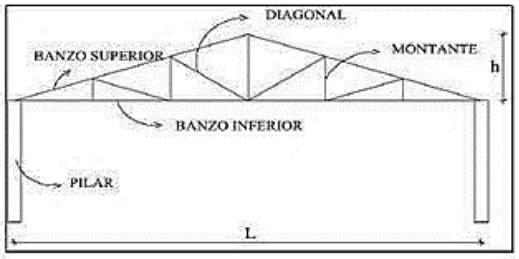
8.8 Treliças planas

Treliças são estruturas reticuladas constituídas por barras delgadas unidas de modo a formar triângulos produzindo um elemento estrutural leve e resistente.

Adaptado de: Sussekind 1981 e de Leet, Kenneth; Uang, Chia-ming e Anne, Gilbert 2010)

Representação de uma treliça típica e denominação de seus elementos

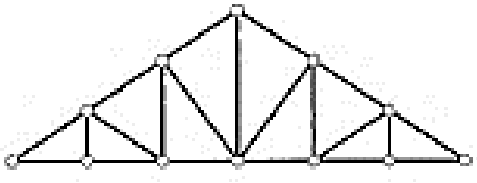
Figura 297 – Treliça plana e pilares de apoios



Fonte: internet(izabelahendrix.edu.br)

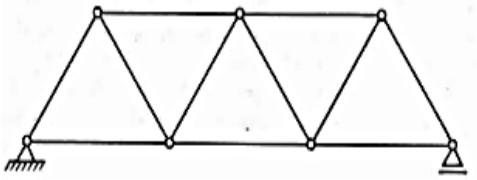
Outros exemplos de treliças planas:

Figura 298



Fonte: internet(bemvi.org)

Figura 299



Fonte: Sussekind 1981

8.9 Estabilidade de polígonos fechados

Todo polígono fechado rotulado em seus vértices é instável e, portanto, hipostático exceto o triângulo, isso explica o fato das treliças serem uma associação de triângulos

Adaptado de Sussekind 1981

Veja a ilustração abaixo

Figura 300

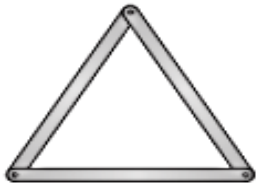


Figura 301



Fonte: Leet, Kenneth; Uang, Chia-ming e Anne, Gilbert 2010

8.10 Grau de hiperestaticidade das treliças (gh)

Uma condição necessária, mas não suficiente, para determinação do grau de hiperestaticidade gh de uma treliça é dada pela expressão abaixo

$gh = (b + r) - 2n$

podendo ocorrer três casos:

1°) CASO: gh < 0 → Treliça hipostática

2°) CASO: gh = 0 → indica que a treliça é isostática, mas só podemos fazer essa afirmação após uma análise da estabilidade da treliça

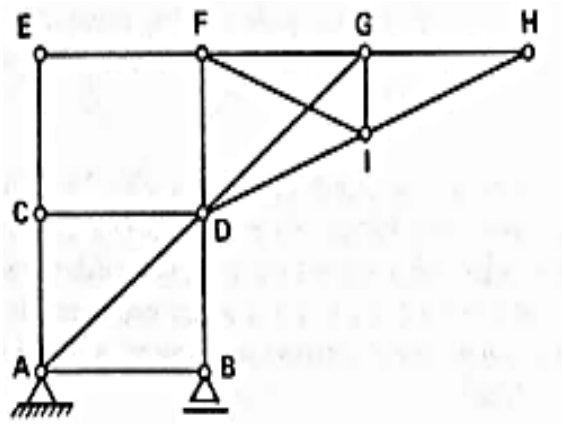
3°) CASO: gh > 0 → indica que a treliça é hiperestática, mas só podemos fazer essa afirmação após uma análise da estabilidade da treliça

Onde:

b→ número de barras **r→ número de reações** **n→ número de nós**

Exemplo de treliça com gh = 0, mas que é hipostática

Figura 302 – treliça hipostática

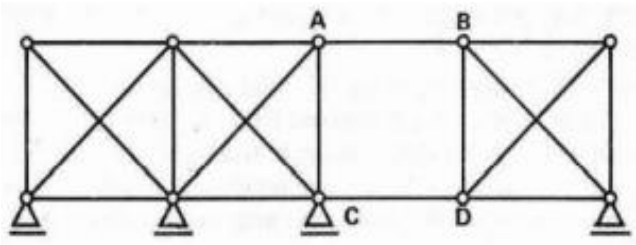


Fonte: Sussekind 1981

$gh = (b + r) - 2n \Rightarrow gh = (15 + 3) - 2 * 9 = 18 - 18 = 0, porém\ como\ o\ quadro\ CDFE\ é\ instável\ a\ treliça\ é\ também\ instavel\ e, portanto\ hipostática$

Exemplo de treliça com gh > 0, mas que é hipostática

Figura 302 – treliça hipostática



Fonte: Sussekind 1981

$gh = (b + r) - 2n \Rightarrow gh = (19 + 4) - 2 * 10 = 23 - 20 = 3 > 0, porém\ não\ é$ $hiperestática, pois\ além\ das\ reações\ serem\ paraleleas\ o\ quadro\ ACDB\ é instável,$ $assim\ a\ treliça\ é\ instável, ou\ seja, hipostática.$

8.11 Resolução de treliças

Resolver uma treliça significa calcular as reações de apoios e a força normal de tração ou compressão em cada barra.

Para o cálculo das reações de apoios aplicamos as três equações de equilíbrio da estática. Para o cálculo da força normal nas barras usamos as equações de equilíbrio adotando as seguintes hipóteses simplificadoras.

A) As barras são retas e trabalham somente sob esforços normais de tração ou de compressão. Se houver necessidade de considerar o peso próprio da barra aplicamos metade em cada extremidade.

• as forças de tração são positivas e representadas saindo da barra ou nó

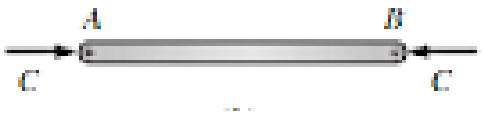
Figura 303 – Barra tracionada



Fonte: Leet, Kenneth; Uang, Chia-ming e Anne, Gilbert 2010

• as forças de compressão são negativas e representadas entrando na barra ou nó.

Figura 304 – Barra comprimida



Fonte: Leet, Kenneth; Uang, Chia-ming e Anne, Gilbert 2010

B) As barras são conectadas por nós articulados, assim não há transmissão de momento entre elas, ou seja, $(\sum M = 0)$ em relação a qualquer nó.

C) as cargas externas são aplicadas exclusivamente nos nós.

Adaptado de: Leet, Kenneth; Uang, Chia-ming e Anne, Gilbert 2010

8.12 Nós característicos (membros de força zero)

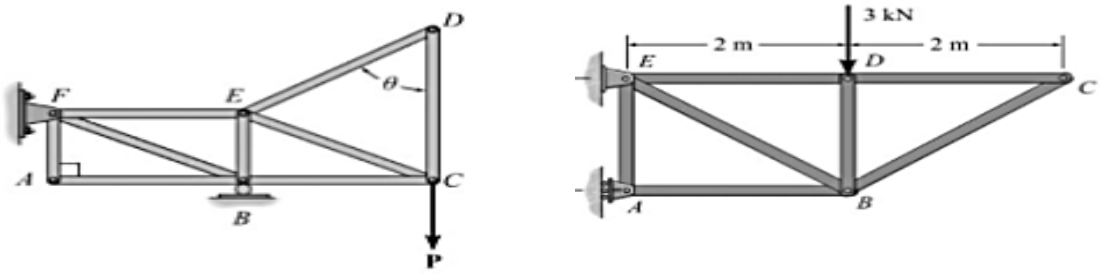
É comum nas treliças a existência dos chamados nós característicos nos quais as forças nas barras podem ser obtidas de modo imediato por simples inspeção agilizando a análise. Nesse item vamos estudar dois casos típicos:

A) Nó formado pela união de duas barras sem carga externa aplicada→ a força normal nas barras é ZERO.

Exemplo:

Figura 305 – Exemplos de nós característicos em treliças

a) **b)**



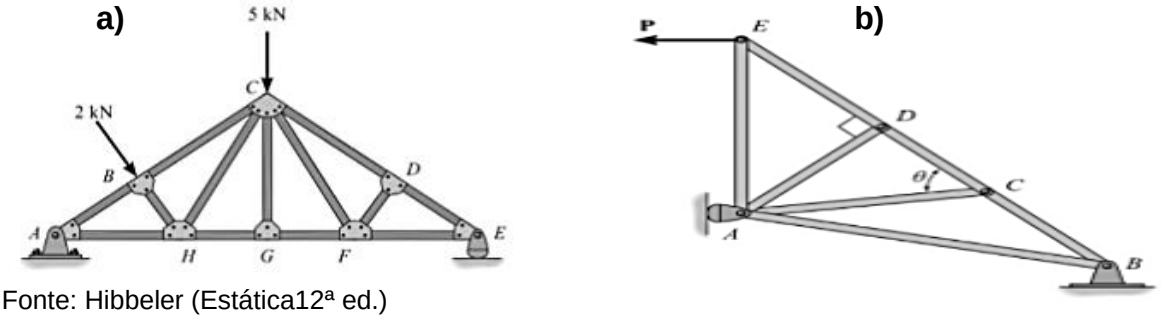
Fonte: Hibbeler (Estática 12ª ed.)

O nó D (figura. a) e C (figura. b) são nós característico, logo as forças normais N_{ED}, N_{CD} nas barras ED e CD respectivamente são nulas e assim também são as forças normais N_{DC}, N_{BC} nas barras DC e BC

B) Nó formado por três barras, sendo duas colineares e sem carga externa aplicada→ as forças normais nas barras colineares são iguais em módulo e natureza (tração ou compressão) e na terceira barra a força normal é nula.

Figura. 306 – Exemplos de nós característicos em treliças

a) **b)**



Fonte: Hibbeler (Estática12ª ed.)

O nó G (a) e os nós D e C (b) são nós característico, logo as forças normais nas barras GC, DA e CA são nulas, enquanto que nas barras GH e GF são iguais em módulo e natureza (N_{GH} = N_{GF}) ocorrendo o mesmo nas barras DE, DC e CB.

8.13 Métodos de análise de treliças planas (forças nas barras)

Os dois métodos mais utilizados e os quais iremos aprender para determinação da força normal nas barras de uma treliça são o Método de Equilíbrio dos Nós e o Método das Seções ou de Ritter.

8.14 Método do equilíbrio dos nós

Esse método é utilizado na resolução de treliças com geometria relativamente simples e tem como princípio básico o estudo do equilíbrio de cada nó da treliça

Roteiro de cálculo

A) Construa o DCL inicial e aplique as três equações de equilíbrio da estática para calcular as reações de apoios na treliça.

B) Analise cada nó individualmente estabelecendo um sistema de coordenadas (X, Y) com origem no nó a ser analisado. Para cada nó estão disponíveis duas equações $(\sum F_X = 0)\ e\ (\sum F_Y = 0)$, assim inicie os cálculos por um nó que ofereça pelo menos uma força de valor conhecido e no máximo duas incógnitas (forças desconhecidas).

C) Substitua a barra pela sua força normal(incógnita) sempre desenhando a força normal a ser calculada (incógnita) e suas projeções em X e Y saindo do nó (tração). Forças conhecidas (reações de apoios, cargas externas aplicadas e forças normais já calculadas) devem ser desenhadas com sentido correto no nó a ser analisado.

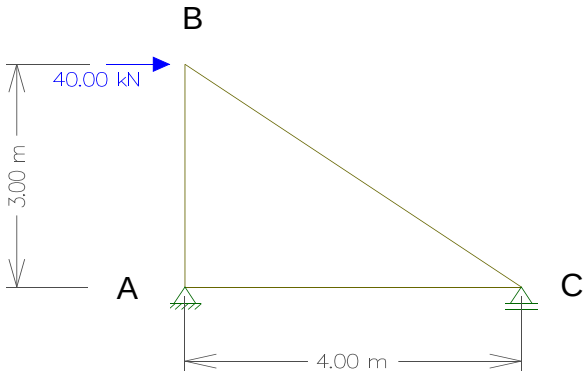
D) Em cada direção as forças no sentido positivo do eixo são positivas e as forças no sentido contrário são negativas.

E) Se o resultado for positivo a força normal na barra é de tração e se for negativo a força normal na barra é de compressão

Aplicação:

1°) Calcule o grau de hiperestáticidade gh e resolva a treliça abaixo

Fig. 307- Exemplo 1



Fonte: notas de aula (Estruturas isostáticas)

RESP

A) Grau de hiperestaticidade gh:

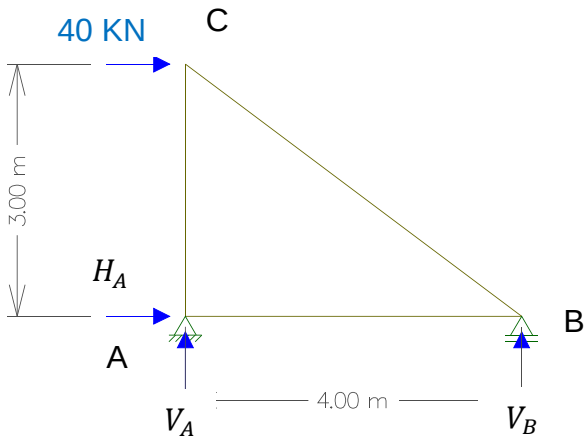
Aplicando a equação do item (8.3.2), temos:

$gh = (b + r) - 2n \quad \Rightarrow gh = (3 + 3) - 2 * 3 = 6 - 6 = 0$

B) Reações de apoios

DCL inicial:

Figura. 308 – Exemplo 1



Fonte: notas de aula (Estruturas isostáticas)

Aplicando as equações de equilíbrio da estática, temos:

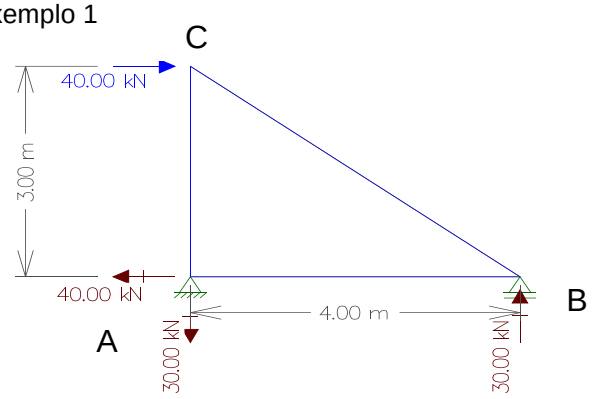
$\sum F_H = 0 \therefore \ H_A + 40 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{H_A = -40\ KN}$

$\sum M_A = 0 \ \therefore \ 4V_B - 40 * 3 = 0 \ \Rightarrow 4V_B - 120 = 0 \ \Rightarrow 4V_B = 120 \ \Rightarrow \boldsymbol{V_B = 30\ KN}$

$\sum F_V = 0 \ \therefore V_A + V_B = 0 \ \Rightarrow \ V_A + 30 = 0 \ \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_A = -30\ KN}$

DCL final

Figura 309 – Exemplo 1



Fonte: notas de aula (Estruturas isostáticas)

D) Forças normais nas barras (Método dos nós)

Nesse caso, podemos começar por qualquer um dos nós, pois todos oferecem pelo menos uma força conhecida e no máximo duas forças desconhecidas que são as normais nas barras (incógnitas). Vamos começar pelo nó A, pois as reações estão alinhadas com as barras, assim não é necessário fazer decomposição de forças o que facilita os cálculos

Lembre-se:

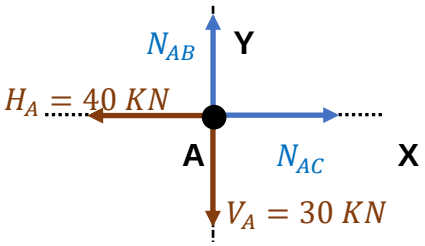
• As forças conhecidas (reações de apoios, cargas externas aplicadas e forças normais já calculadas) devem ser desenhadas com os valores e sentidos corretos e as forças desconhecidas(incógnitas) devem ser sempre desenhadas saindo do nó.

• No cálculo das forças em cada nó aquelas que ficarem no sentido positivo do eixo, em cada direção, entram como positivas e as que ficarem com sentido contrário entram como negativas nas equações

• Se o resultado for positivo a força normal na barra é de tração (saindo do nó), se for negativo a força normal na barra é de compressão (chegando no nó)

Nó A:

Figura 310 – Exemplo 1



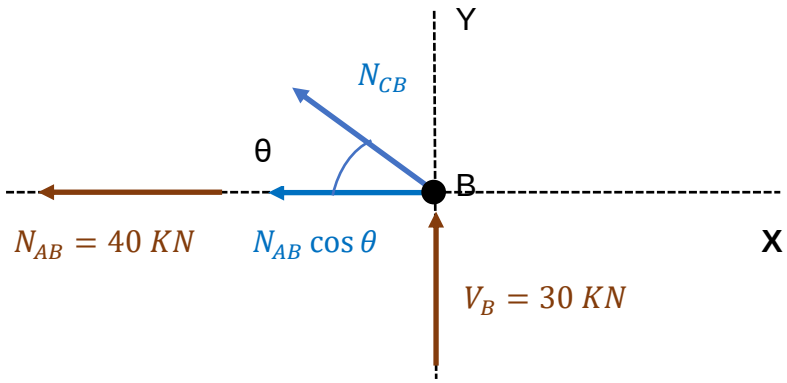
Fonte: autor

$$\sum F_Y = 0 \ \therefore N_{AC} - 30 = 0 \ \Rightarrow \ \boldsymbol{N_{AC} = 30\ KN} \ (tração\ na\ barra\ AC)$$

$$\sum F_X = 0 \ \therefore \ N_{AB} - 40 = 0 \ \Rightarrow \boldsymbol{N_{AB} = 40\ KN} \ \ (tração\ na\ barra\ AB)$$

Nó B:

Figura 311 – Exemplo 1



$$\theta = arctg\left(\frac{3}{4}\right) = 36{,}87°$$

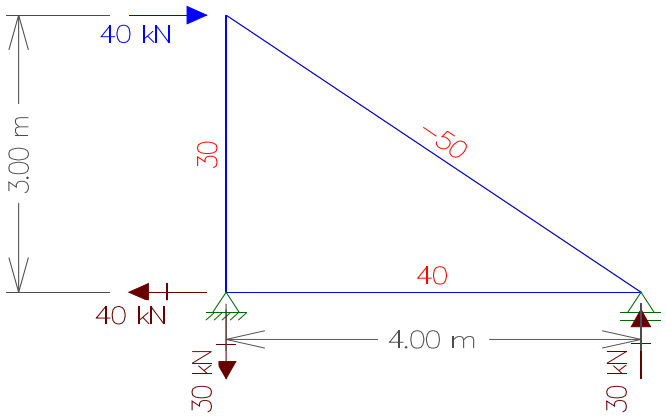
$$\sum F_X = 0 \ \therefore \ -N_{CB}\cos\theta - 40 = 0 \ \Rightarrow -N_{CB}\cos 36{,}87° - 40 = 0 \Rightarrow -0{,}8N_{CB} - 40 = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$-0{,}8N_{CB} = 40 \ \Rightarrow \ \boldsymbol{N_{CB} = -50\ KN} \ (compressão\ na\ barra\ CB)$$

DCL final (reações de apoios e forças normais nas barras) KN

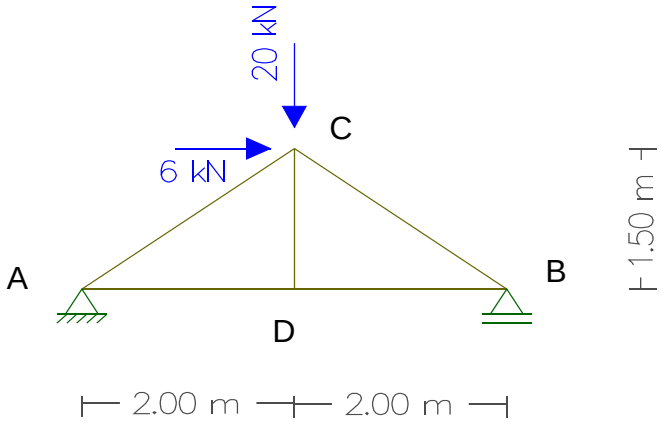
Figura 312 - Exemplo 1



Fonte: notas de aula (Estruturas isostáticas)

2°) Calcule o grau de hiperestáticidade gh e resolva a treliça abaixo

Figura 313- Exemplo 2



Fonte: notas de aula (Estruturas isostáticas)

RESP

A) Grau de hiperestaticidade gh:

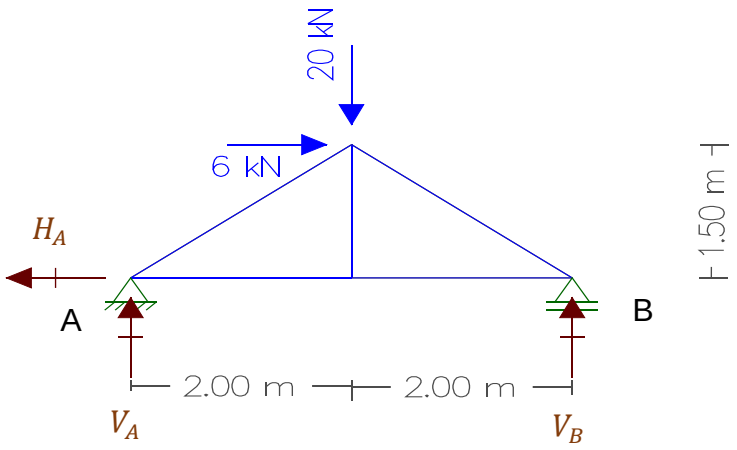
Aplicando a equação do item 8.3.2, temos:

$gh = (b + r) - 2n \quad \Rightarrow gh = (5 + 3) - 2 * 4 = 8 - 8 = 0$

B) Reações de apoios

DCL inicial:

Figura 314 – Exemplo 2



Fonte: notas de aula (Estruturas isostáticas)

Aplicando as equações de equilíbrio da estática, temos:

$\sum F_H = 0 \therefore -H_A + 6 = 0 \Rightarrow \quad \boldsymbol{-H_A = -6\ KN} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{H_A = 6\ KN}$

$\sum M_A = 0 \ \therefore \ 4V_B - 6 * 1{,}5 - 20 * 2 = 0 \ \Rightarrow 4V_B - 49 = 0 \ \Rightarrow$

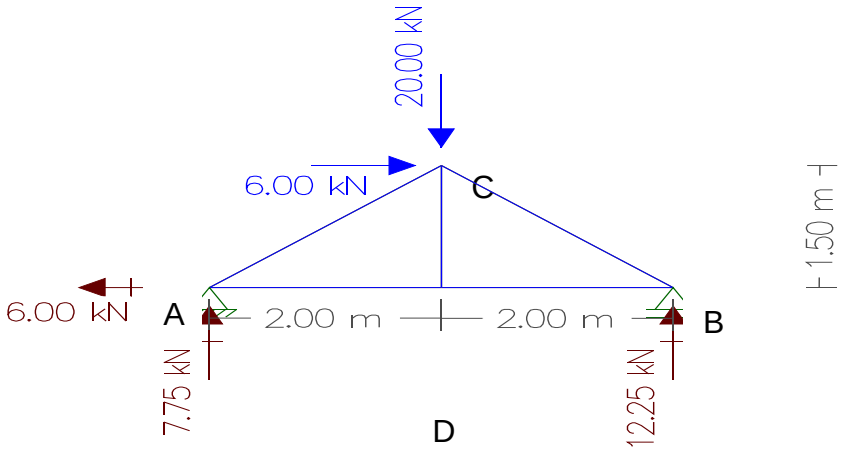
$4V_B = 49 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_B = 12{,}25\ KN}$

$\sum F_V = 0 \ \therefore V_A + V_B - 20 = 0 \ \Rightarrow \ V_A + 12{,}25 - 20 = 0 \ \Rightarrow \quad V_A - 7{,}75 = \ 0 \Rightarrow$

$\boldsymbol{V_A = 7{,}75\ KN}$

DCL final (reações de apoios)

Figura 315 – Exemplo 2



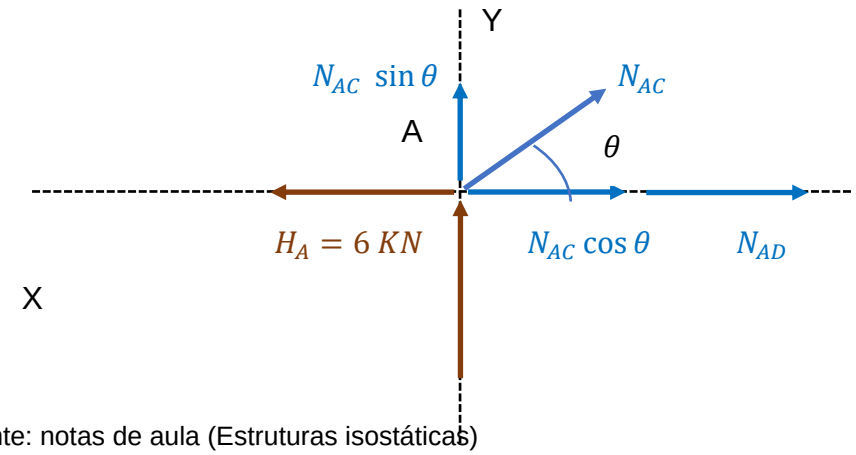
Fonte: notas de aula (Estruturas isostáticas)

D) Forças normais nas barras (Método dos nós)

Nesse caso, vamos resolver no sentido anti-horário (nós A, D e B), pois D é um nó característico e também evitamos o nó C que é o que apresenta o maior número de forças

Nó A:

Figura 316 – Exemplo 2



Fonte: notas de aula (Estruturas isostáticas)

$\theta = arctg\left(\frac{1{,}5}{2}\right) = 36{,}87°$

$\sum F_Y = 0 \ \therefore N_{AC}\sin 36{,}87° + 7{,}75 = 0 \Rightarrow 0{,}6N_{AC} + 7{,}75 = 0 \Rightarrow 0{,}6N_{AC} = -7{,}75 \Rightarrow$

$$\boldsymbol{N_{AC} = -12,92\ KN}\ \ (compressão)$$

$$\sum F_X = 0\ \ \therefore N_{AD} + N_{AC}\cos 36{,}87° - 6 = 0 \Rightarrow N_{AD} + 0{,}8N_{AC} - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$N_{AD} + 0{,}8 * (-12{,}92) - 6 = 0 \Rightarrow N_{AD} - 10{,}34 - 6 = 0 \Rightarrow N_{AD} - 16{,}34 = 0 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{N_{AD} = 16,34\ KN}\ \ (tração)$$

Nó D:

O nó D é um nó característico formado por três barras sendo duas colineares e sem carga aplicada (ver letra B do item 8.3.4), logo:

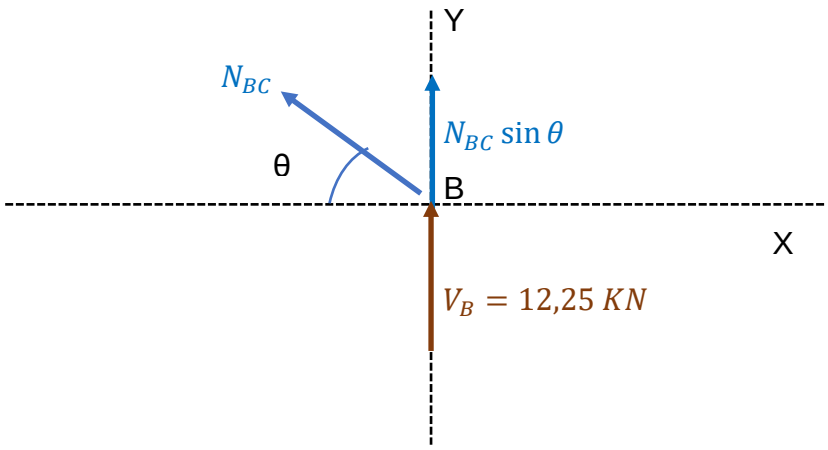
$$\boldsymbol{N_{DB} = N_{AD} = 16,34\ KN}\ (tração)\ \ e\ \ \ \boldsymbol{N_{DC} = 0\ KN}$$

Nó B:

Observe que usando $(\sum F_Y = 0)$ não necessitamos da normal na barra BD (N_{BD})

Nó B:

Figura 317 – Exemplo 2



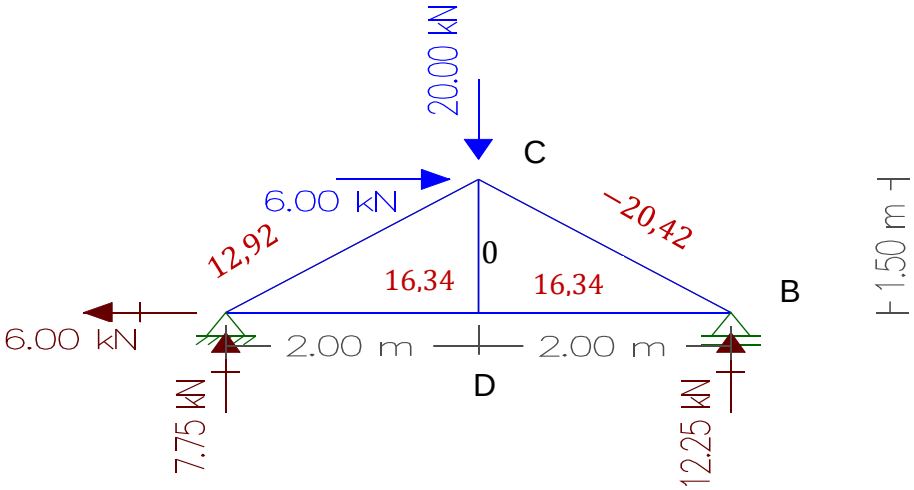
$$\theta = arctg\left(\frac{1{,}5}{2}\right) = 36{,}87°$$

$$\sum F_Y = 0\ \ \therefore N_{BC}\sin 36{,}87° + 12{,}25 = 0 \Rightarrow 0{,}6N_{BC} + 12{,}25 = 0 \Rightarrow 0{,}6N_{BC} = -12{,}25 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{N_{BC} = -20,42\ KN}\ \ (compressão)$$

DCL final (reações de apoios e forças normais nas barras) KN

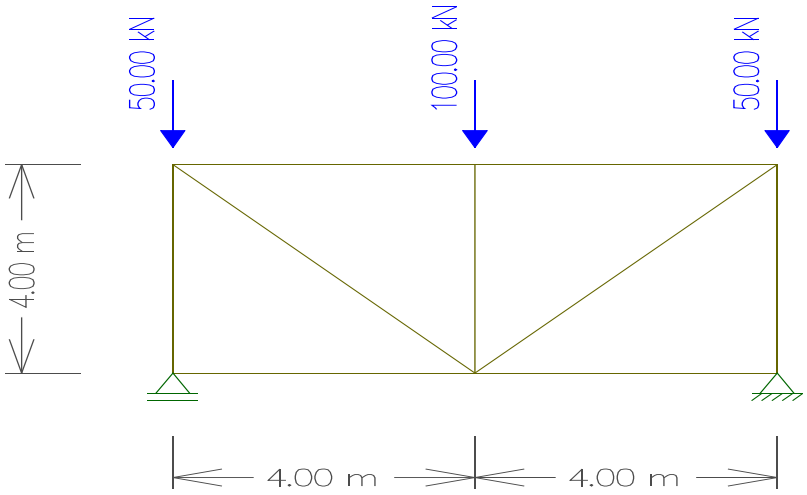
Figura 318 – Exemplo 2



Fonte: notas de aula (Estruturas isostáticas)

3°) Calcule o grau de hiperestáticidade gh e resolva a treliça abaixo

Figura 319 – Exemplo 3



Fonte: notas de aula (Estruturas isostáticas)

RESP

A) Grau de hiperestaticidade gh:

Aplicando a equação do item 8.3.2, temos:

$$gh = (b + r) - 2n \quad \Rightarrow gh = (9 + 3) - 2 * 6 = 12 - 12 = 0$$

B) Reações de apoios

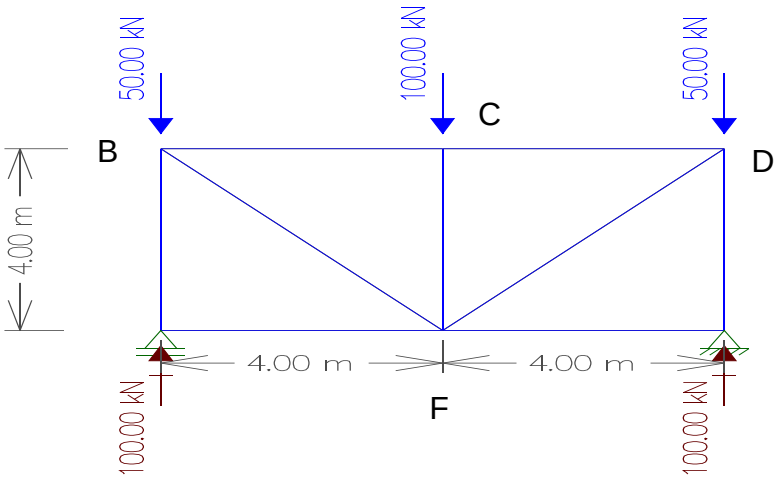
Nesse caso, observamos que a estrutura é simétrica, logo:

• **V_A = V_E = F_R / 2** = (50+100+50) / 2 = 200 / 2 = **100 KN**;

• **H_E = 0 KN** (não existem forças horizontais aplicadas)

DCL final (reações de apoios)

Figura 320 – Exemplo 3



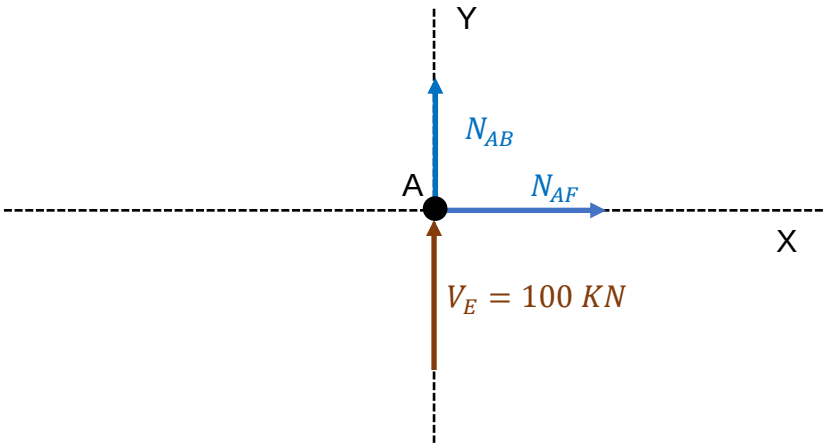
Fonte: notas de aula (Estruturas isostáticas)

D) Forças normais nas barras (Método dos nós)

Observando que a estrutura é simétrica vamos calcular apenas as forças nas barras do quadro ABCF, pois as forças normais nas barras correspondentes do lado oposto são iguais em módulo e natureza, ou seja, N_{AB} = N_{DE}; N_{AF} = N_{FE}; N_{BF} = N_{FD}; N_{BC} = N_{CD}.

Nó A

Figura 321 – Exemplo 3

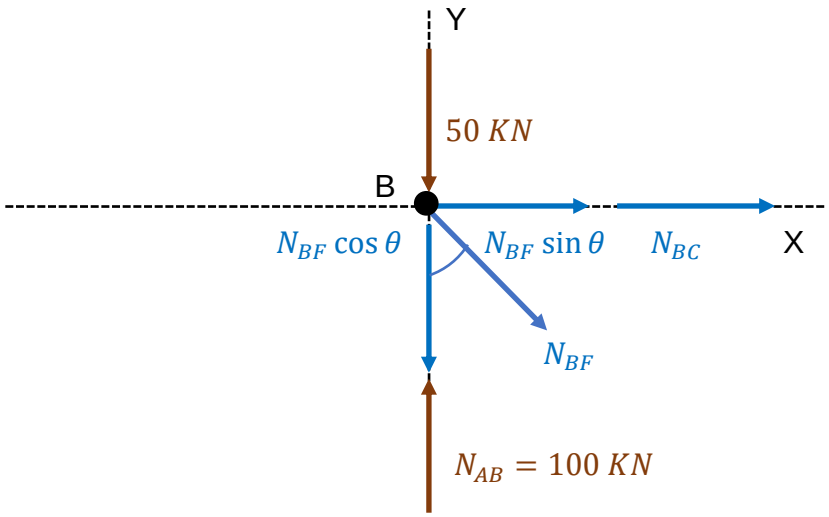


$$\sum F_Y = 0 \ \therefore N_{AB} + 100 = 0 \Rightarrow \quad \boldsymbol{N_{AB} = -100\ KN}\ (compressão)$$

$$\sum F_X = 0 \ \therefore N_{AF} + 0 = 0 \Rightarrow \quad \boldsymbol{N_{AF} = 0\ KN}$$

Nó B:

Figura 322 – Exemplo 3



$$\theta = arctg\left(\frac{4}{4}\right) = 45°$$

$$\sum F_Y = 0 \ \therefore -N_{BF}\cos 45° + 100 - 50 = 0 \Rightarrow -0{,}707N_{BF} + 50 = 0 \Rightarrow$$

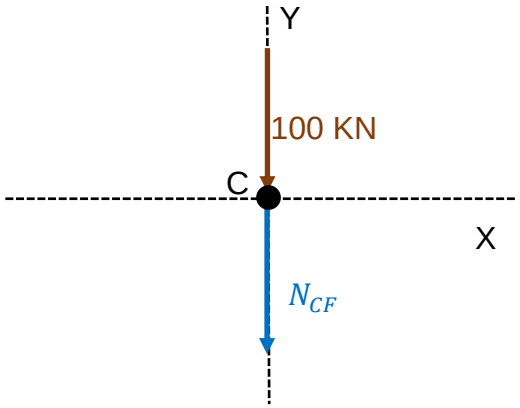
$$-0{,}707N_{BF} = -50 \quad \Rightarrow \ \boldsymbol{N_{BF} = 70{,}72\ KN}\ (tração)$$

$$\sum F_X = 0 \ \therefore N_{BC} + N_{BF}\sin 45° = 0 \Rightarrow N_{BC} + 70{,}72 * 0{,}707 = 0 \Rightarrow N_{BC} + 50 = 0 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{N_{BC} = -50\ KN}\ (compressão)$$

Nó C:

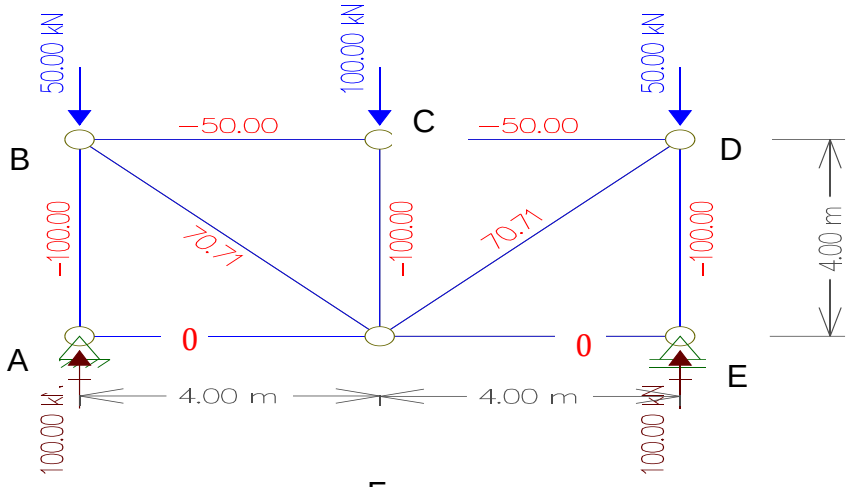
Figura 323 – Exemplo 3



$$\sum F_Y = 0 \;\therefore -N_{CF} - 100 = 0 \Rightarrow -N_{CF} = 100 \Rightarrow \quad \boldsymbol{N_{CF} = -100\,KN}\ (compressão)$$

DCL final (reações de apoios e forças normais nas barras)

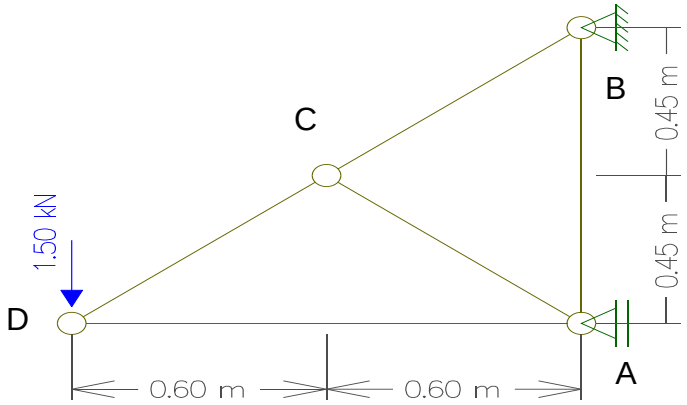
Figura 324 – Exemplo 3



Fonte: notas de aula (Estruturas isostáticas**)**

4°) Calcule o grau de hiperestáticidade gh e resolva a treliça abaixo

Figura 325 – Exemplo 4



Fonte: notas de aula (Estruturas isostáticas)

RESP

A) Grau de hiperestaticidade gh:

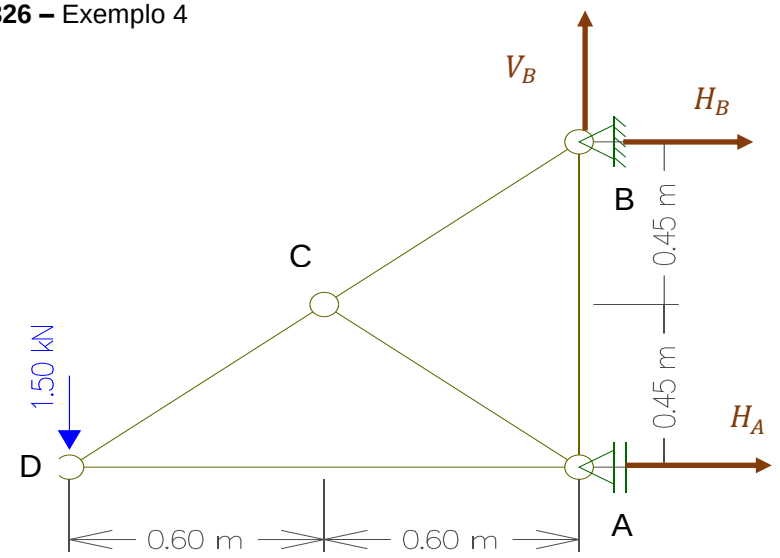
Aplicando a equação do item 8.3.2, temos:

$gh = (b + r) - 2n \quad \Rightarrow gh = (5 + 3) - 2 * 4 = 8 - 8 = 0$

B) Reações de apoios

DCL inicial:

Figura 326 – Exemplo 4



Fonte: notas de aula (Estruturas isostáticas)

Aplicando as equações de equilíbrio da estática, temos:

$$\sum F_V = 0 \ \therefore V_B - 1{,}5 = 0 \ \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_B = 1{,}5\ KN}$$

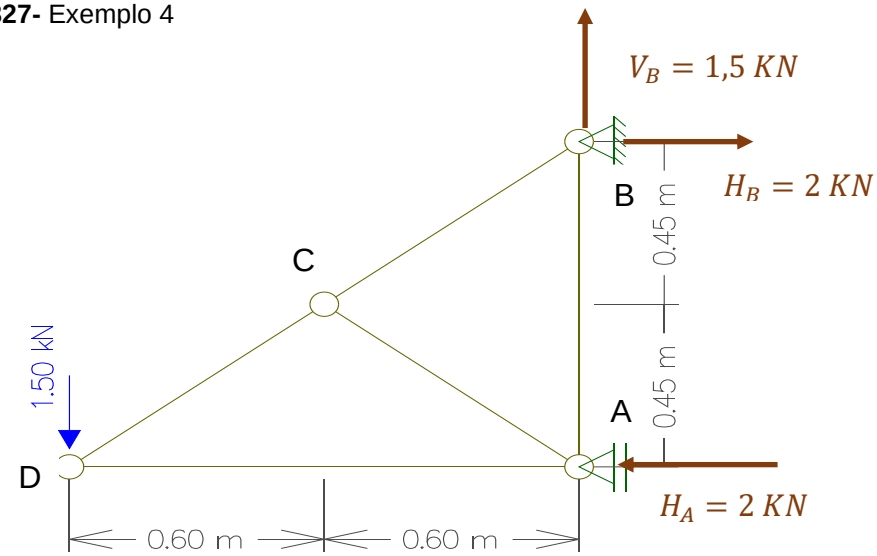
$$\sum M_B \circlearrowright = 0 \ \therefore \ 0{,}9H_A + 1{,}2 * 1{,}5 = 0 \ \Rightarrow 0{,}9H_A + 1{,}8 = 0 \ \Rightarrow 0{,}9H_A = -1{,}8 \ \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{H_A = -2\ KN}$$

$$\sum F_H = 0 \ \therefore H_B + H_A = 0 \ \Rightarrow \ H_B - 2 = 0 \ \Rightarrow \quad \boldsymbol{H_B = 2\ KN}$$

DCL final (reações de apoios)

Figura 327- Exemplo 4

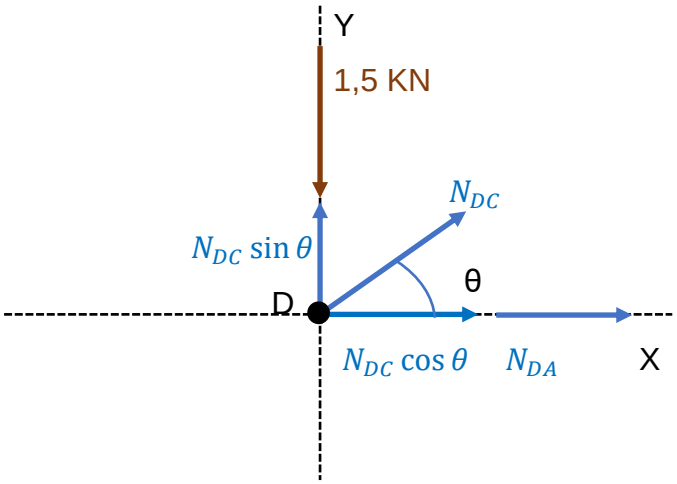


Fonte: notas de aula (Estruturas isostáticas)

D) Forças normais nas barras (Método dos nós)

Nó D:

Figura. 328 – Exemplo 4



$\theta = arctg\left(\frac{0,9}{1,2}\right) = 36,87°$

$\sum F_Y = 0 \;\; \therefore N_{DC}\,\text{sen}\,36,87° - 1,5 = 0 \Rightarrow 0,6N_{DC} - 1,5 = 0 \Rightarrow 0,6N_{DC} = 1,5 \Rightarrow$

$\boldsymbol{N_{DC} = 2,5\ KN}\ (tração)$

$\sum F_X = 0 \;\; \therefore N_{DA} + N_{DC}\cos 36,87° = 0 \Rightarrow N_{DA} + 2,5 * 0,8 = 0 \Rightarrow N_{DA} + 2 = 0 \Rightarrow$

$\boldsymbol{N_{DA} = -2\ KN}\ \ (compressão)$

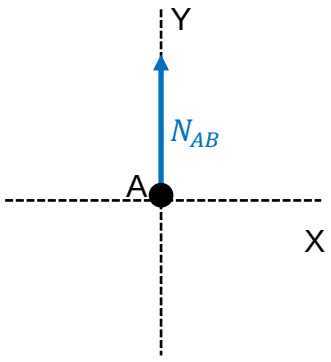
Nó C (característico):

Observe que o nó C é um nó característico, pois é formado por três barras sendo duas colineares e sem carga externa aplicada, logo:

$\boldsymbol{N_{CA} = 0\ KN}$ e $\boldsymbol{N_{CB} = N_{DC} = 2,5\ KN}\ (tração$

Nó A:

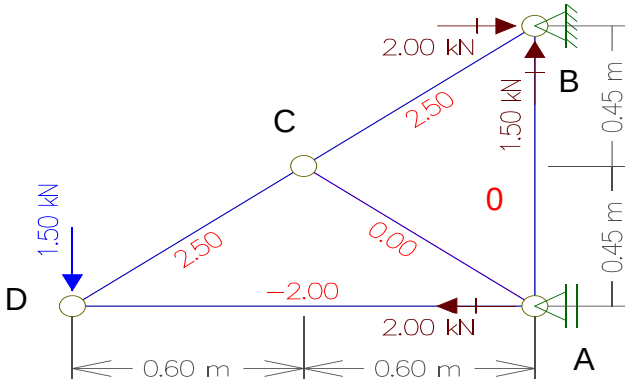
Figura 329 – Exemplo 4



$$\sum F_Y = 0 \ \therefore \ \boldsymbol{N_{AB} = 0\ KN}$$

DCL final (reações de apoios e forças normais nas barras)

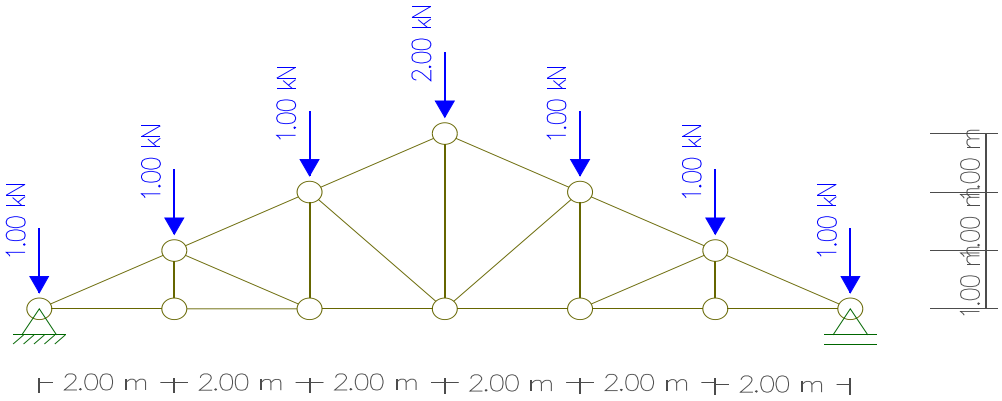
Figura 330 – Exemplo 4



Fonte: notas de aula (Estruturas isostáticas)

5°) Calcule o grau de hiperestáticidade gh e resolva a treliça abaixo

Figura 331- Exemplo 5



Fonte: notas de aula (Estruturas isostáticas)

RESP

A) Grau de hiperestaticidade gh:

Aplicando a equação do item 8.3.2, temos:

$$gh = (b + r) - 2n \quad \Rightarrow gh = (21 + 3) - 2 * 12 = 24 - 24 = 0$$

B) Reações de apoios

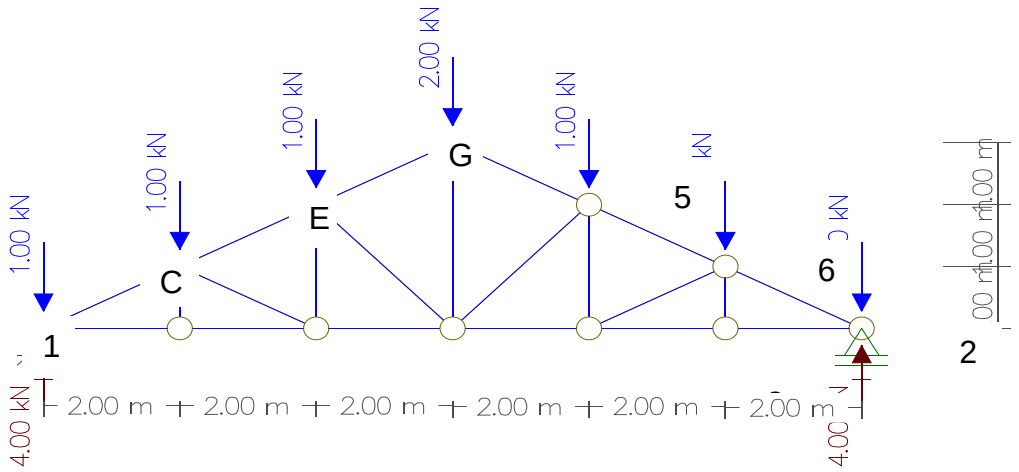
Nesse caso, observamos que a estrutura é simétrica, logo:

V_1 = V_2 = F_R / 2 = (1+1+1+2+1+1+1) / 2 = 8 / 2 = **4 KN**;

H_1 = 0 KN (não existem forças horizontais aplicadas)

DCL final (reações de apoios)

Figura. 332 – Exemplo 5



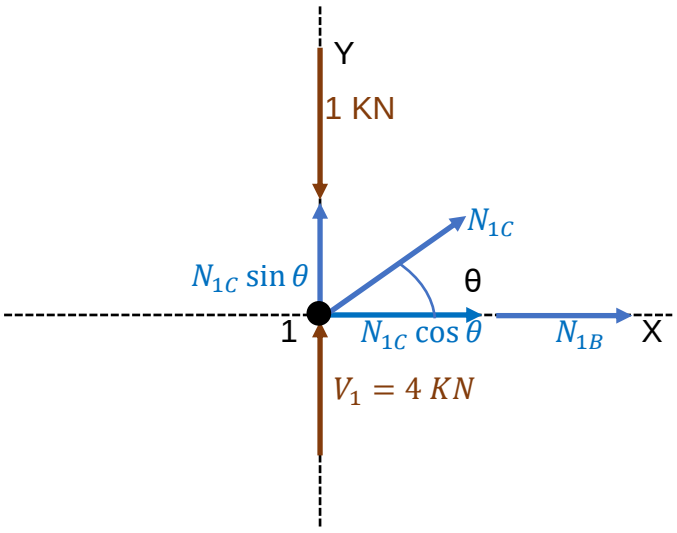
Fonte: notas de aula (Estruturas isostáticas)

D) Forças normais nas barras (Método dos nós)

Observando que a estrutura é simétrica vamos calcular as forças nas barras partindo do apoio 1 até a barra GF, pois as forças normais nas barras correspondentes do lado oposto da barra GF são iguais em módulo e natureza.

Nó 1:

Figura 333 – Exemplo 5



Fonte: autor

$$\theta = arctg\left(\frac{1}{2}\right) = 26{,}56°$$

$$\sum F_Y = 0 \ \therefore N_{1C}\, sen26{,}56° + 4 - 1 = 0 \Rightarrow 0{,}447N_{1C} + 3 = 0 \Rightarrow 0{,}447N_{1C} = -3 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{N_{1C} = -6{,}71\ KN}\ (compressão)$$

$$\sum F_X = 0 \ \therefore N_{1B} + N_{1C}\, cos26{,}56° = 0 \Rightarrow N_{1B} + 0{,}894N_{1C} = 0 \Rightarrow$$

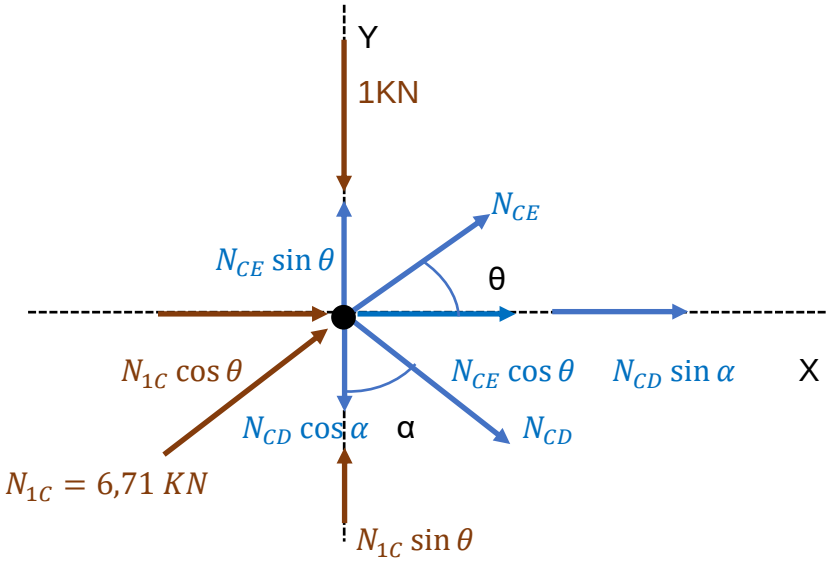
$$N_{1B} + 0{,}894 * (-6{,}71) = 0 \ \Rightarrow \ N_{1B} - 6 = 0 \Rightarrow \ \boldsymbol{N_{1B} = 6\ KN}\ (tração)$$

Nó B (característico):

$$\boldsymbol{N_{BC} = 0\ KN} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{N_{BD} = N_{1B} = 6\ KN}\ (tração)$$

Nó C:

Fig. 334 – Exemplo 5



$$\theta = arctg\left(\frac{1}{2}\right) = 26{,}56° \quad e \quad \alpha = arctg\left(\frac{2}{1}\right) = 63{,}43°$$

$$\sum F_Y = 0 \ \therefore N_{CE}\sin\theta - N_{CD}\cos\alpha + N_{1C}\sin\theta - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$N_{CE}\sin 26{,}56° - N_{CD}\cos 63{,}43° + 6{,}71\sin 26{,}56° - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$0{,}447N_{CE} - 0{,}447N_{CD} + 3 - 1 = 0 \Rightarrow \ 0{,}447N_{CE} - 0{,}447N_{CD} + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\mathbf{0{,}447N_{CE} - 0{,}447N_{CD} = -2} \quad \boldsymbol{(eq\ 1)}$$

$$\sum F_X = 0 \ \therefore N_{CEX} + N_{CDX} + N_{1CX} = 0 \Rightarrow N_{CE}\cos\theta + N_{CD}\sin\alpha + N_{1C}\cos\theta = 0 \Rightarrow$$

$$N_{CE}\cos 26{,}56 + N_{CD}\sin 63{,}43° + 6{,}71 * \cos 26{,}56° = 0 \Rightarrow$$

$$0{,}894N_{CE} + 0{,}894N_{CD} + 6 = 0 \Rightarrow \qquad \mathbf{0{,}894N_{CE} + 0{,}894N_{CD} = -6} \quad \boldsymbol{(eq\ 2)}$$

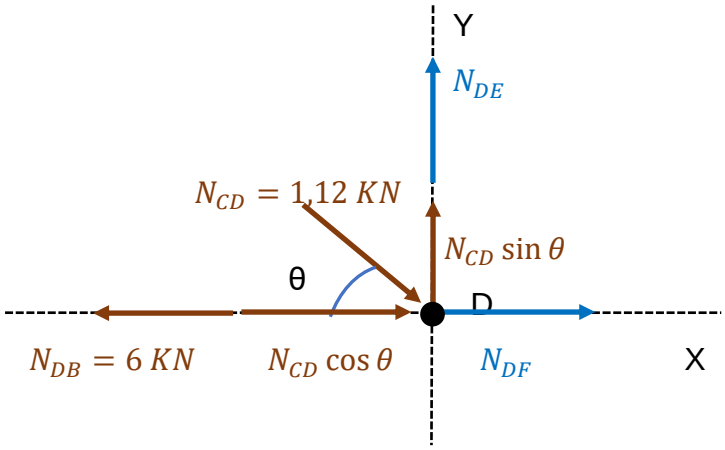
Montando um sistema (2 x 2) e resolvendo pelo método da adição, temos

$$\begin{cases} 0{,}447N_{CE} - 0{,}447N_{CD} = -2 \\ 0{,}894N_{CE} + 0{,}894N_{CD} = -6 \end{cases}$$

$\boldsymbol{N_{CD} = -1{,}12\ KN}$ $(compressão)$ $\quad e \quad$ $\boldsymbol{N_{CE} = -5{,}59\ KN}$ $(compressão)$

Nó D

Figura. 335 – Exemplo 5



$$\theta = arctg\left(\frac{1}{2}\right) = 26{,}56°$$

$\sum F_Y = 0 \ \therefore N_{DE} - N_{CD} sen\theta = 0 \Rightarrow N_{DE} - 1{,}12 \sin 26{,}56° = 0 \Rightarrow N_{DE} - 0{,}5 = 0 \Rightarrow$

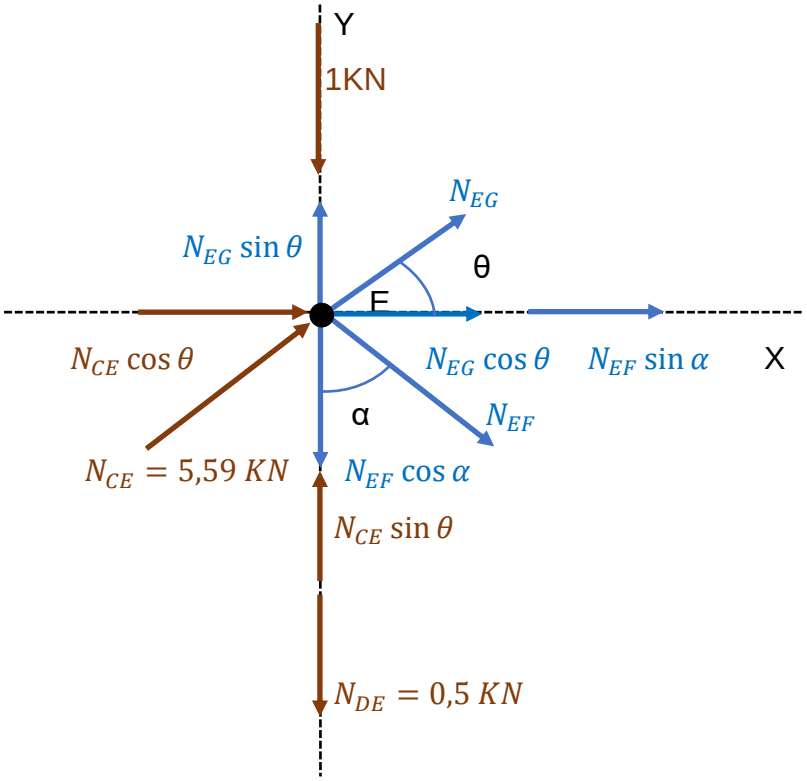
$\boldsymbol{N_{DE} = 0{,}5\ KN}$ $(tração)$

$\sum F_X = 0 \ \therefore N_{DF} + N_{CD}\ cos\theta - 6 = 0 \Rightarrow N_{DF} + 1{,}12 \cos 26{,}56° - 6 = 0 \Rightarrow$

$N_{DF} + 1 - 6 = 0 \Rightarrow N_{DF} - 5 = 0 \Rightarrow$ $\boldsymbol{N_{DF} = 5\ KN}$ $(tração)$

Nó E

Figura 336 – Exemplo 5



Fonte: autor

$\theta =$

$arctg\left(\frac{1}{2}\right) =$

$26{,}56°$ e $\alpha = arctg\left(\frac{2}{2}\right) = 45°$

$\sum F_Y = 0 \therefore N_{EG}\sin\theta - N_{EF}\cos\alpha + N_{CE}\sin\theta - N_{DE} - 1 = 0$

$N_{EG}\sin 26{,}56° - N_{EF}\cos 45° + 5{,}59\sin 26{,}56° - 0{,}5 - 1 = 0 \Rightarrow$

$0{,}447N_{EG} - 0{,}707N_{EF} + 2{,}5 - 1{,}5 = 0 \Rightarrow 0{,}447N_{EG} - 0{,}707N_{EF} + 1 = 0 \Rightarrow$

$\mathbf{0,447N_{EG} - 0,707N_{EF} = -1}$ $\boldsymbol{eq\ 1}$

$\sum F_X = 0 \therefore N_{CE}\cos\theta + N_{EG}\cos\theta + N_{EF}\sin\alpha = 0 \Rightarrow$

$5{,}59 * \cos 26{,}56° + N_{EG}\cos 26{,}56 + N_{EF}\sin 45° + 0 \Rightarrow 5 + 0{,}894N_{EG} + 0{,}707N_{EF} = 0$

$\mathbf{0,894N_{EG} + 0,707N_{EF} = -5}$ $(\boldsymbol{eq\ 2})$

Montando um sistema (2 x 2) e resolvendo pelo método da adição, temos

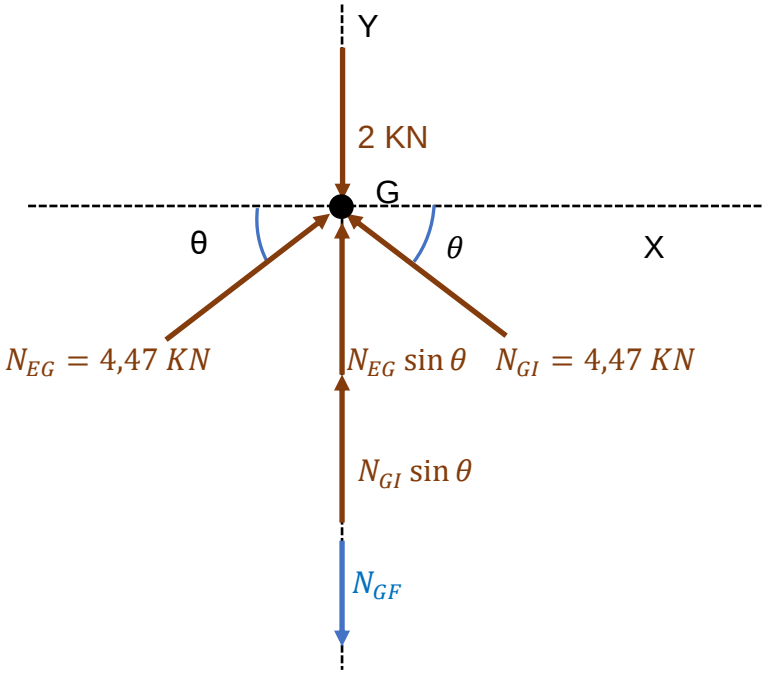
$\begin{cases} 0{,}447N_{EG} - 0{,}707N_{EF} = -1 \\ 0{,}894N_{EG} + 0{,}707N_{EF} = -5 \end{cases}$

$\boldsymbol{N_{EF} = -1{,}41\ KN}$ $(compressão)$ e $\boldsymbol{N_{EG} = N_{GI} -}$

$\mathbf{4{,}47\ KN}$ $(compressão)$

Nó G

Figura. 337 – Exemplo 5



Fonte: autor

$$\theta = arctg\left(\frac{1}{2}\right) = 26{,}56°$$

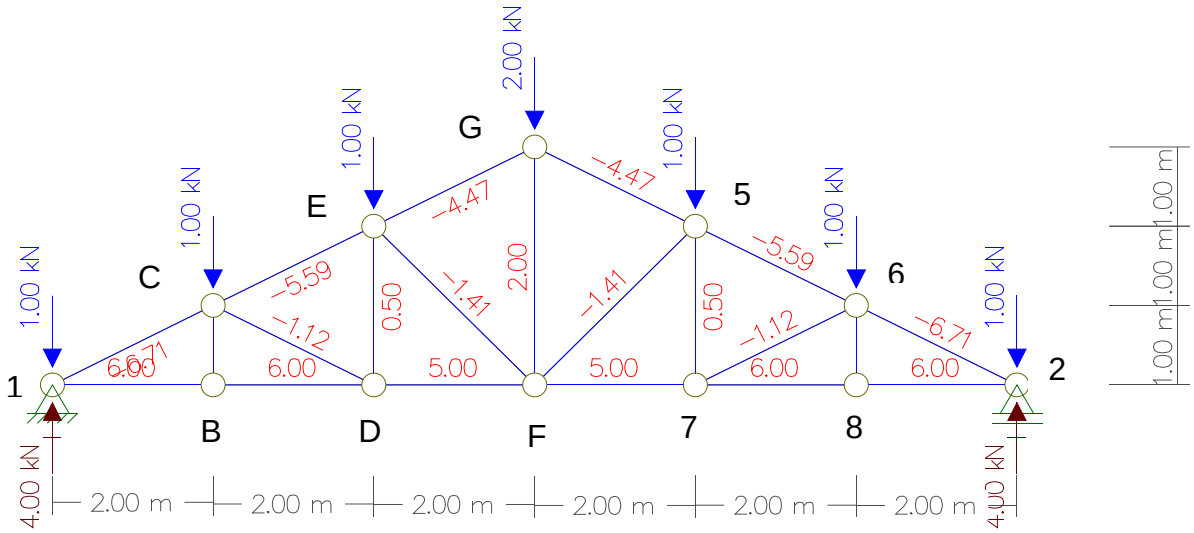
$$\sum F_Y = 0 \therefore -N_{GF} + N_{GI}\sin\theta + N_{EG}\sin\theta - 2 = 0$$

$$-N_{GF} + 4{,}47\sin 26{,}56° + 4{,}47\sin 26{,}56° - 2 = 0 \Rightarrow -N_{GF} + 2 * (4{,}47\sin 26{,}56) - 2 = 0$$

$$-N_{GF} + 4 - 2 = 0 \Rightarrow -N_{GF} + 2 = 0 \Rightarrow -N_{GF} = -2 \Rightarrow \boldsymbol{N_{GF} = 2\ KN}$$

DCL final (reações de apoios e forças normais nas barras)

Figura. 338 – Exemplo 5



Fonte: notas de aula (Estruturas isostáticas)

8.15 Método de Ritter ou das seções

O Método de Ritter ou das seções é um método de análise de treliças muito utilizado quando se quer obter os esforços normais somente em algumas das barras de uma treliça e consiste em separar completamente a treliça em duas partes, cortando três barras não paralelas nem concorrentes no mesmo ponto, e em seguida estudar o equilíbrio de qualquer uma das partes

Observações:

• Na realidade podemos cortar mais que três barras desde que a seção determinada tenha no máximo três barras com forças desconhecidas.

• Isolar a parte da estrutura com menor número de forças aplicadas para agilizar os cálculos.

Adaptado de Sussekind 1981

Roteiro de cálculo

A) Desenhar o DCL inicial da estrutura e aplicar as equações de equilíbrio da estática para obter as reações de apoios.

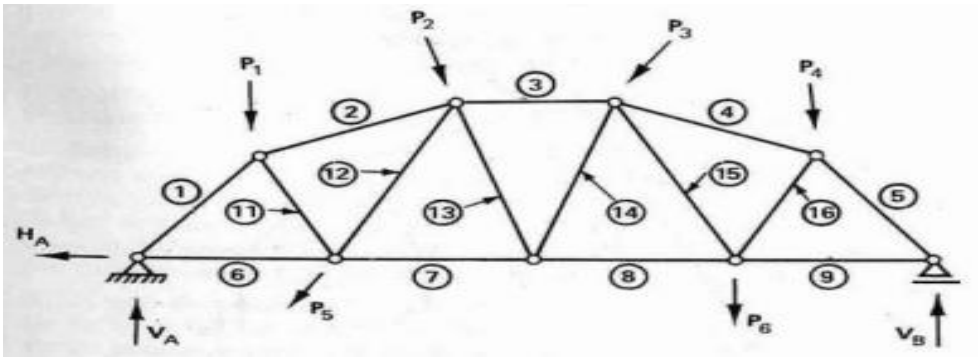
B) Fazer um corte imaginário passando pelas barras de interesse e de modo a separar a treliça em duas partes cortando três barras.

C) Construir o DCL inicial da parte isolada (geralmente a parte com menor número de forças) sempre mostrando as forças normais a serem calculadas (incógnitas) nas barras cortadas como sendo de tração, ou seja, saindo da barra ou nó.

D) Aplicar $(\sum M = 0)$ em relação a dois pontos da estrutura convenientemente escolhidos e em seguida aplicar $(\sum F_V = 0)$ para obter as forças nas barras de interesse.

Exemplo: suponha que queremos obter a força normal nas barras 3, 13 e 7 da treliça representada na figura abaixo

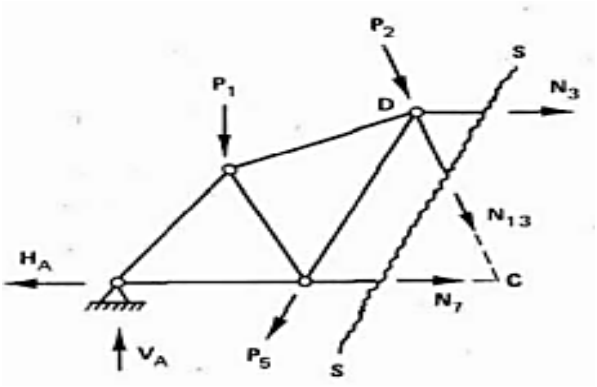
Figura. 339



Fonte: Sussekind 1981

Cortando a treliça pelas barras de interesse 7,13 e 3 (seção S-S) e isolando a parte à esquerda do corte, temos:

Figura 340 – parte isolada para os cálculos das forças normais nas barras de interesse



Fonte: Sussekind 1981

Agora usando a equação de momento em relação aos nós C e D convenientemente escolhidos, temos

• $\sum M_C = 0 \ \rightarrow temos\ N_3\ como$ única $variável, assim\ podemos\ obter\ seu\ valor\ diretamente.$

• $\sum M_D = 0 \rightarrow temos\ N_7\ como$ única $variável, assim\ podemos\ obter\ seu\ valor\ diretamente.$

Agora usamos a soma das forças verticais para obtermos N_{13}

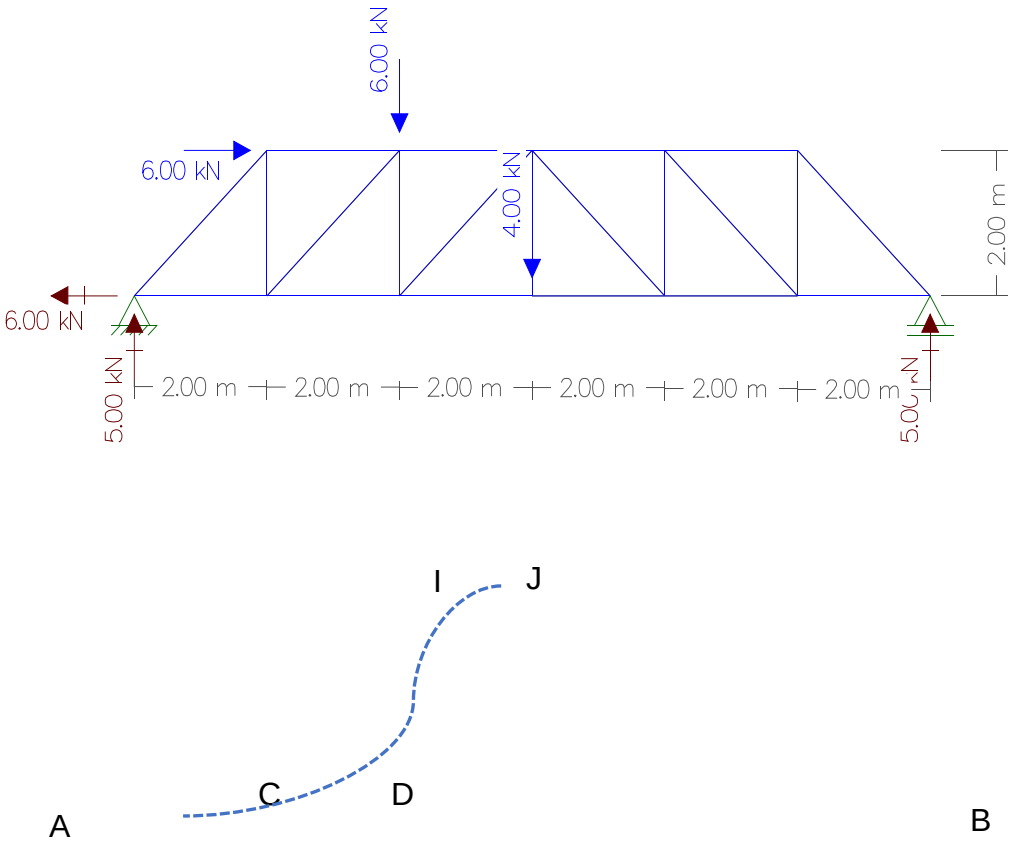
$$\sum F_V = 0 \rightarrow decompomos\ N_{13}\ e\ usamos\ a\ componente\ vertical$$

Podemos também aplicar ($\sum F_H = 0$) usando a componente horizontal de N_{13}

Exemplos:

1°) Encontre as forças normais nas barras IJ, ID e CD da treliça abaixo.

Figura 341 – Exemplo 1

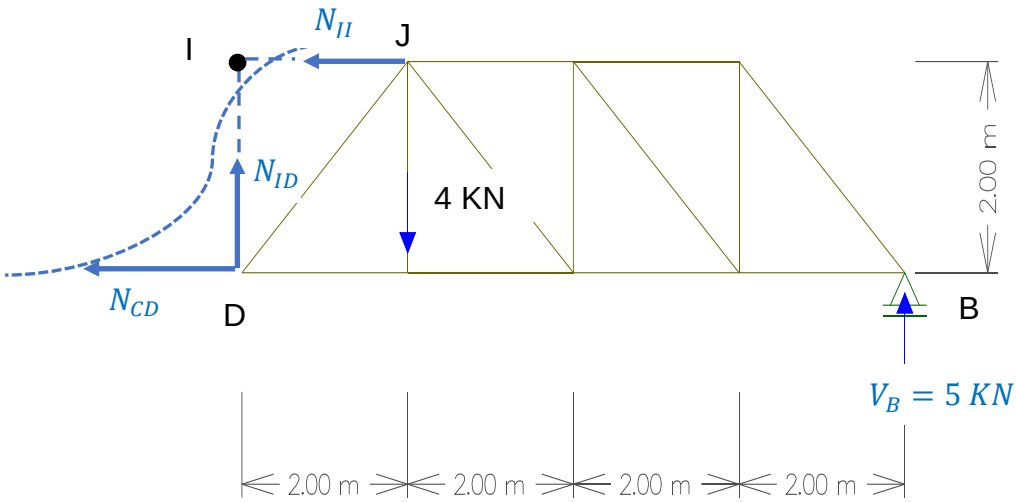


Fonte: Sussekind 1981

RESP

A) Cortando a treliça pelas barras de interesse IJ, ID e CD e isolando e construindo o DCL da parte à direita da seção de corte (menor número de forças)

Figura 342– Exemplo 1



Fonte: Adaptado de Sussekind 1981

$\sum M_I = 0 \ \therefore -2N_{CD} - 4 * 2 + 5 * 8 = 0 \Rightarrow -2N_{CD} - 8 + 40 = 0 \Rightarrow -2N_{CD} + 32 = 0 \Rightarrow$

$-2N_{CD} = -32 \Rightarrow \quad \boldsymbol{N_{CD} = 16\ KN}\ (tração)$

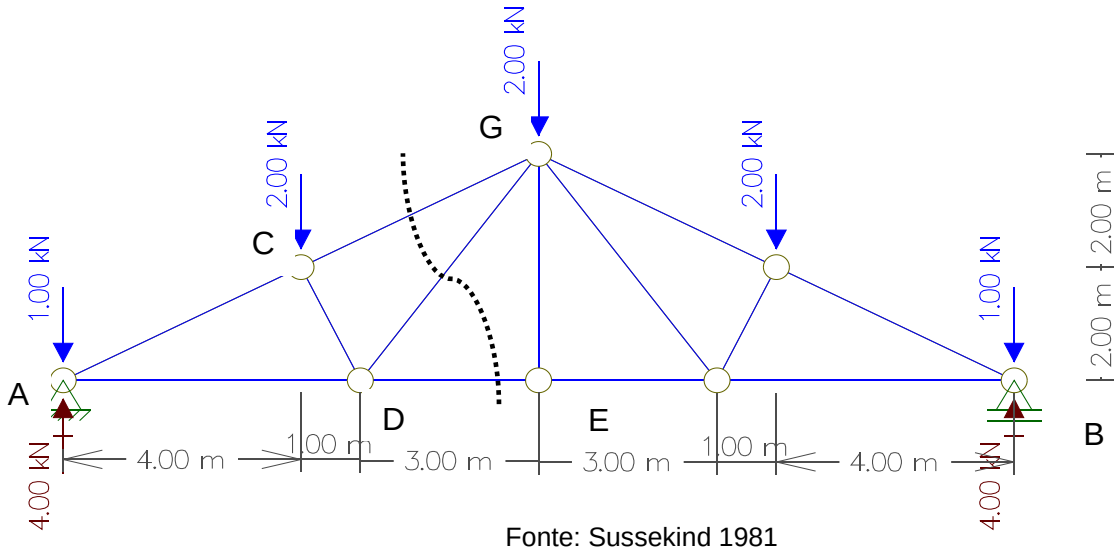
$\sum M_D = 0 \ \therefore 2N_{IJ} - 2 * 4 + 5 * 8 = 0 \Rightarrow 2N_{IJ} - 8 + 40 = 0 \Rightarrow 2N_{IJ} + 32 = 0 \Rightarrow$

$2N_{IJ} = -32 \Rightarrow \quad \boldsymbol{N_{IJ} = -16\ KN}\ (compressão)$

$\sum F_V = 0 \ \therefore \ N_{ID} - 4 + 5 = 0 \Rightarrow N_{ID} + 1 = 0 \Rightarrow \quad \boldsymbol{N_{ID} = -1\ KN}\ (compressão)$

2°) Encontre as forças normais nas barras CG, DG e DE da treliça abaixo.

Figura 343 – Exemplo 2

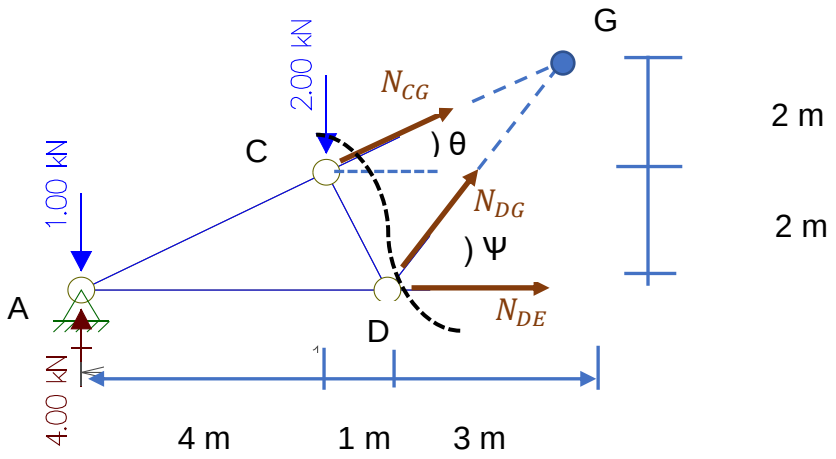


Fonte: Sussekind 1981

RESP

A) Cortando a treliça pelas barras de interesse CG, DG e DE isolando e construindo o DCL da parte à esquerda da seção de corte (menor número de forças), temos:

Figura. 344 – Exemplo 2



Fonte: Sussekind 1981

$\sum M_G = 0 \therefore 4N_{DE} + 2 * 4 + 1 * 8 - 4 * 8 = 0 \Rightarrow 4N_{DE} + 8 + 8 - 32 = 0 \Rightarrow$

$4N_{DE} - 16 = 0 \Rightarrow 4N_{DE} = 16 \Rightarrow \quad \boldsymbol{N_{DE} = 4\ KN}\ (tração)$

Para a normal CG, vamos usar as componentes dela as quais não estão mostradas na figura acima

$\theta = arctg\left(\frac{2}{4}\right) = 26{,}56°$

$\sum M_D = 0 \ \therefore \ -2N_{CG}\cos 26{,}56° + 1N_{CG}\sin 26{,}56° + 2 * 1 + 1 * 5 - 4 * 5 = 0 \Rightarrow$

$-1{,}79N_{CG} + 0{,}447N_{CG} + 7 - 20 = 0 \Rightarrow \ = 0 \ \Rightarrow -1{,}34N_{CG} - 13 = 0 \ \Rightarrow$

$-1{,}34N_{CG} = 13 \ \Rightarrow \quad \boldsymbol{N_{CG} = -9{,}7\ KN}\ (\boldsymbol{compressão})$

Para encontrar a N_{DG} vamos usar a sua componente horizontal (não mostrada na figura acima) e aplicar a equação $(\sum F_H = 0)$, logo

$\Psi = arctg\left(\frac{4}{3}\right) = 53{,}13°$

$\sum F_H = 0 \ \therefore \ N_{DG}\cos 53{,}13° + N_{CG}\cos 26{,}56 + N_{DE} = 0 \Rightarrow$

$0{,}6N_{DG} - 9{,}7 * 0{,}894 + 4 = 0 \ \Rightarrow \ 0{,}6N_{DG} - 8{,}67 + 4 = 0 \Rightarrow \ 0{,}6N_{DG} = 4{,}67 \Rightarrow$

$\boldsymbol{N_{DG} = 7{,}78\ KN}\ (\boldsymbol{tração})$

8.16 Grelas

Grelhas são estruturas constituídas por duas ou mais barras, contidas no plano horizontal (X,Y) em que todas as cargas, inclusive as reações de apoios, são perpendiculares ao plano da grelha, assim nas grelhas não existem reações horizontais.

8.17 ROTEIRO PARA O CÁLCULO DE REAÇÕES DE APOIOS EM GRELHAS

Para calcular as reações de apoios, nas grelhas, observamos a posição relativa entre os apoios podendo ocorrer três casos:

• Grelha com dois apoios alinhados em uma única direção (X ou Y)

• Grelha com dois apoios alinhados na direção X e na direção Y

• Grelha com os três apoios não alinhados

Em qualquer caso, para facilitar os cálculos, pode ser conveniente traçar eixos auxiliares paralelos às direções X e Y passando por apoios convenientemente escolhidos

$$\sum M_X = 0 \ (soma\ dos\ momentos\ em\ relação\ a\ um\ eixo\ na\ direção\ x)$$

$$\sum M_y = 0 \ (soma\ dos\ momentos\ em\ relação\ a\ um\ eixo\ na\ direção\ y)$$

$$\sum F_V = 0 \ (soma\ das\ forças\ verticais\ igual\ a\ ZERO)$$

• Os sinais dos momentos serão definidos pela regra da mão direita em relação a cada eixo local

8.18 Cálculo de reações de apoios em grelhas

Neste item vamos aprender a calcular reações de apoios para grelhas

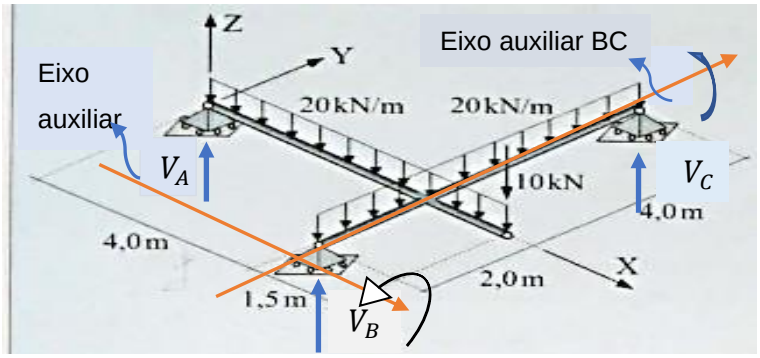
A) Reações de apoios em grelhas com dois apoios alinhados em uma única direção

1°) Calcule as reações de apoios para a grelha abaixo

Os eixos auxiliares e os sentidos positivos dos giros em torno deles também estão mostrados na figura abaixo.

DCL inicial

Fig. 345 – Exemplo 1



Fonte: Adaptado de Soriano (2007)

RESP

$$\boldsymbol{F_{R,AD} = A_{AD}} = (20 * 5{,}5) = \boldsymbol{110\ KN} \quad \boldsymbol{e} \quad \boldsymbol{\bar{X}_A = \frac{L_{AD}}{2}} = \frac{5{,}5}{2} = \boldsymbol{2{,}75\ m}$$

$$F_{R,BC} = A_{BC} = (20 * 6) = \boldsymbol{120\ KN} \quad \boldsymbol{e} \quad \boldsymbol{\bar{X}_A = \frac{L_{BC}}{2}} = \frac{6}{2} = \boldsymbol{3\ m}$$

Considerando o eixo auxiliar BC, paralelo ao eixo Y, passando pelos apoios B e C e aplicando ($\sum M_{BC} = 0$) teremos VA como única variável e poderemos obtê-la diretamente.

$$\sum M_{BC} = 0 \ \therefore \ 4V_A - 2{,}75 * F_{R,AD} + 1{,}5 * 10 = 0 \Rightarrow 4V_A - 2{,}75 * 110 + 1{,}5 * 10 = 0 \Rightarrow$$

$$4V_A - 302{,}5 + 15 = 0 \Rightarrow \quad 4V_A = 287{,}5 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_A = 71{,}88\ KN}$$

Agora considerando o eixo auxiliar paralelo ao eixo X e passando pelo apoio B teremos a reação Vc como única variável e poderemos obtê-la diretamente

$$\sum M_{eixo,B} = 0 \ \therefore \ 6V_C - 3 * F_{R,BC} + 2 * V_A - 2 * F_{R,AD} - 2 * 10 = 0 \Rightarrow$$

$$6V_C - 3 * 120 + 2 * 71{,}88 - 2 * 110 - 20 = 0 \Rightarrow 6V_C - 360 + 143{,}76 - 220 - 20 = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$6V_C - 600 + 143{,}76 = 0 \ \Rightarrow \ 6V_C = 456{,}24 \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_C = 76{,}04\ KN}$$

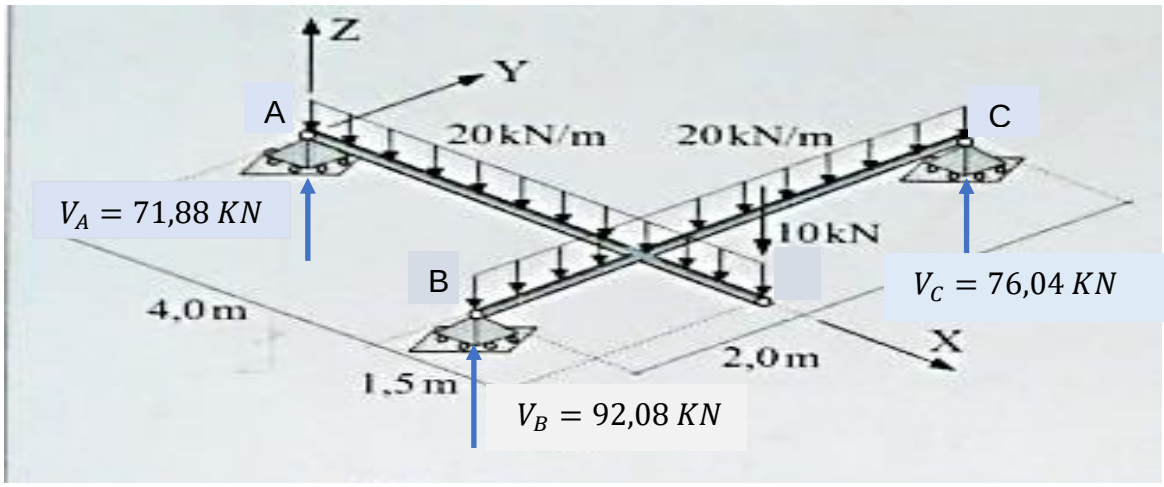
Agora usamos ($\sum F_v = 0$) para obtermos a terceira reação

$$\sum F_V = 0 \therefore V_B + V_A + V_C - F_{R,AD} - 10 - F_{R,BC} = 0 \Rightarrow$$

$$V_B + 71{,}88 + 76{,}04 - 110 - 10 - 120 = 0 \Rightarrow \ \boldsymbol{V_B = 92{,}08\ KN}$$

DCL final

Figura 346 – Exemplo 1



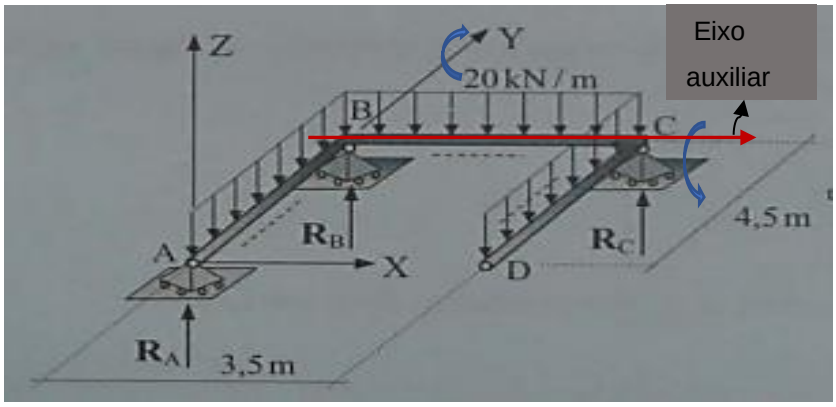
Fonte: Adaptado de Soriano (2007)

B) Reações de apoios em grelhas apoios alinhados, dois a dois, na direção x e na direção y

1°) Calcule as reações de apoios para a grelha abaixo

Os sentidos positivos do giro em torno do eixo X e Y estão indicados na figura

Figura 347 – Exemplo 1



Fonte: Adaptado de Soriano (2007)

RESP:

DCL inicial da estrutura inteira:

Dos exemplos anteriores e da tabela 01 (item 3.8) sabemos que:

- **FRAB** = 20 x 4,5 = **90 KN** $\overline{X_A}$ = LAB / 2 = 4,5 / 2 = **2,25 m**
- **FRBC** = 20 x 3,5 = **70 KN** $\overline{X_B}$ = LBC / 2 = 3,5 / 2 = **1,75 m**
- **FRDC** = 20 x 4,5 = **90 KN** $\overline{X_C}$ = LDC / 2 = 4,5 / 2 = **2,25 m**

Considerando o eixo Y, temos R_C como única variável, assim poderemos obtê-la diretamente

$$\sum M_Y = 0 \ \therefore \ -3{,}5R_C + 3{,}5 * F_{DC} + 1{,}75 * F_{BC} = 0 \Rightarrow -3{,}5R_C + 3{,}5 * 90 + 1{,}75 * 70 = 0$$

$$-3{,}5R_C + 437{,}5 = 0 \Rightarrow \quad -3{,}5R_C = -437{,}5 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{R_C = 125\ KN}$$

Considerando o eixo BC na direção X, temos R_A como única variável assim podemos obtê-la diretamente

$$\sum M_{BC} = 0 \ \therefore \ -4{,}5\ R_A + 2{,}25 * F_{R,AB} + 2{,}25 * F_{R,DC} = 0 \Rightarrow$$

$$-4{,}5R_A + 2{,}25 * 90 + 2{,}25 * 90 = 0 \ \Rightarrow \ -4{,}5R_A + 405 = 0 \ \Rightarrow \ -4{,}5R_A = -405 \ \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{R_A = 90\ KN}$$

Agora usamos ($\sum F_v = 0$) para obtermos a terceira reação

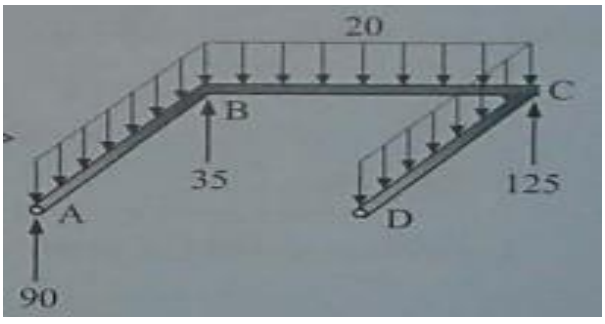
$$\sum F_V = 0 \therefore R_{\mathrm{B}} + R_A + R_C - F_{R,AB} - F_{R,BC} - F_{R,CD} = 0 \Rightarrow$$

$$R_B + 90 + 125 - 90 - 70 - 9 = 0 \ \Rightarrow \quad V_B + 215 - 250 = 0 \Rightarrow$$

$$V_B - 35 = 0 \ \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_B = 35\ KN}$$

DCL final

Fig. 348 – Exemplo 1



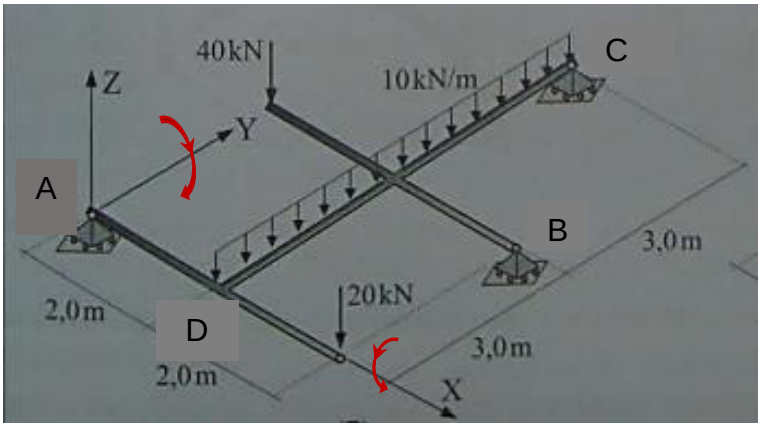
Fonte: Adaptado de Soriano (2007)

C) Reações de apoios em grelhas com os três apoios não alinhados.

Nesse caso, fixamos a origem do sistema em um dos apoios e aplicamos ($\sum M = 0$) em relação ao eixo na direção X e na direção Y obtendo duas equações. Em seguida montamos e resolvemos um sistema 2x2 para encontrar duas das reações e depois aplicamos ($\sum F_v = 0$) para calcularmos a terceira reação.

1°) Determine as reações de apoios para a grelha abaixo.

Fig. 349 – Exemplo 1



Fonte: Soriano (2007)

Os sentidos positivos dos giros estão indicados na figura acima

Dos exemplos anteriores e da tabela 01 (item 3.8) sabemos que:

$$F_{R,DC} = A_{DC} = (10 * 6) = \mathbf{60\ KN} \quad e \quad \bar{X}_D = \frac{L_{DC}}{2} = \frac{6}{2} = \mathbf{3\ m}$$

Considerando o eixo na direção X passando pelo apoio A, temos

$$\sum M_{AX} = 0 \ \therefore \ 3V_B + 6V_C - 3F_{R,DC} - 3 * 40 = 0 \ \Rightarrow \ 3V_B + 6V_C - 3 * 60 - 120 = 0 \Rightarrow$$

$$3V_B + 6V_C - 180 - 120 = 0 \ \Rightarrow \quad 3V_B + 6V_C = 300 \ \ ou \ \ \mathbf{V_B + 2V_C = 100} \quad \mathbf{eq.01}$$

Considerando o eixo Y passando pelo apoio A, temos

$$\sum M_{AY} = 0 \ \therefore \ -4V_B - 2V_C + 2F_{R,DC} + 4 * 20 = 0 \Rightarrow$$

$$-4V_B - 2V_C + 2 * 60 + 80 = 0 \Rightarrow \ -4V_B - 2V_C + 200 \ \Rightarrow \ -4V_B - 2V_C = -200 \ \ ou$$

$$\mathbf{2V_B + V_C = 100} \quad (\boldsymbol{eq\ 2})$$

Montando e resolvendo um sistema (2 x 2):

$$\begin{cases} \mathbf{V_B + 2V_C = 100} \\ \mathbf{2\ V_B + V_C = 100} \end{cases}$$ multiplicando a equação 1 por (-2), obtemos

$$\mathbf{V_C = 33,33\ KN} \qquad e \qquad \mathbf{V_B = 33,34\ KN}$$

Agora usamos ($\sum F_v = 0$) para obtermos a terceira reação

$$\sum F_V = 0 \therefore V_A + V_B + V_C - 60 - 40 - 20 = 0 \Rightarrow V_A + 33{,}33 + 33{,}34 - 120 = 0 \Rightarrow$$

$$V_A + 66{,}67 - 120 = 0 \Rightarrow \quad V_A - 53{,}33 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_A = 53,33\ KN}$$

Capítulo IX

9. ARCOS E CABOS

9.1 Arcos

Estruturas de eixo curvo projetadas para trabalharem à compressão suportando cargas ao longo de grandes vãos.

9.2 Tipos de arcos

De acordo com o número de articulações e em função das condições de apoios os arcos são classificados em: tri-articulados, biarticulados e de extremidades fixas

As figuras abaixo mostram os tipos de arcos

Fig. 350 – Arco tri-articulado



Fonte: Leet, Kenneth; Uang, Chia-ming e Anne, Gilbert (2010)

Fig. 351 – Arco biarticulado



Fonte: Leet, Kenneth; Uang, Chia-ming e Anne, Gilbert (2010**)**

Fig. 352 – Arco de extremidades fixas



Fonte: Leet, Kenneth; Uang, Chia-ming e Anne, Gilbert (2010)

Os arcos tri-articulados são estaticamente determinados os outros dois tipos são indeterminados.

Nessa apostila vamos estudar os arcos tri-articulados.

9.3 Reações de apoios em arcos tri-articulados com apoios alinhados

O cálculo das reações em arcos tri-articulados é semelhante ao cálculo das reações em pórticos tri-articulados sendo que nos arcos as reações horizontais possuem o mesmo módulo, mas sentidos contrários e são geralmente chamadas de empuxo sendo representadas pela letra H e podem ser facilmente calculadas pelas expressões abaixo

- $\boldsymbol{H = \frac{\sum M_{Rót}}{h_r}}$ $\boldsymbol{eq.19}$ $(pórtico\ triart.exclusivamente\ sob\ cargas\ concentradas)$

onde:

$\sum M_{Rót}$→ *soma dos momentos em relação a rótula produzidos por todas as forças externas atuantes na parte a esquerda ou à direita da rótula, incluindo as reações de apoios*

h_r→ *altura da rótula em relação aos apoios*

- $\boldsymbol{H = \frac{q * L^2}{8.h_r}}$ $\boldsymbol{eq.20}$ $(pórtico\ triart.exclusivamente\ sob\ carre.\ unif.distribuído)$

onde:

q→ valor do carregamento uniformemente distribuído

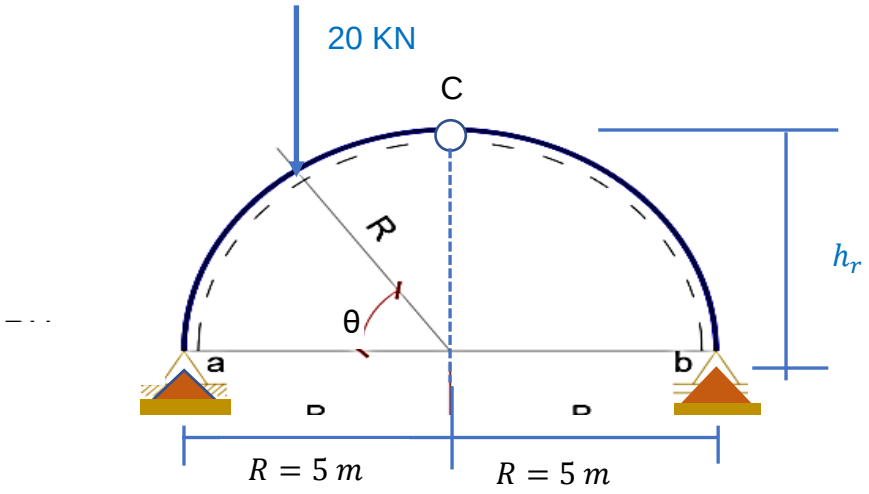
L→ distância entre os apoios do arco (vão)

h_r→ altura da rótula em relação aos apoios

Vamos mostrar as reações horizontais a serem calculadas sempre chegando ao apoio. Exemplo:

1°) Calcule as reações de apoios para o arco triarticulado abaixo.

Figura. 353 – Exemplo 1



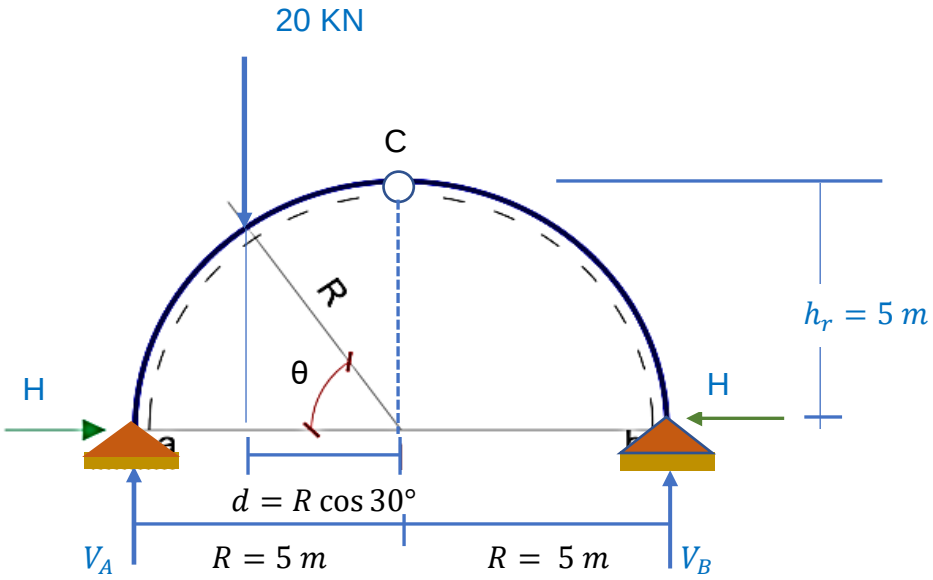
Fonte: adaptado de jjscremin

RESP

A) Reações de apoios

DCL inicial

Figura. 354 – Exemplo 1



Fonte: adaptado de jjscremin

Aplicamos $(\sum M = 0)$ em relação a um dos apoios para obtermos uma das reações verticais.

$\sum M_A = 0 \therefore 10V_B - 20 * (5 - d) = 0 \Rightarrow 10V_B - 20(5 - 2{,}5) = 0 \Rightarrow 10V_B - 50 = 0 \Rightarrow$

$10V_B = 50 \Rightarrow \boldsymbol{V_B = 5\ KN}$

Agora usamos ($\sum F_V = 0$) para obtermos a outra reação vertical, logo

$$\sum F_V = 0 \therefore\ V_A + V_B - 20 = 0 \Rightarrow V_A + 5 - 20 = 0 \Rightarrow V_A - 15 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{V_A = 15\ KN}$$

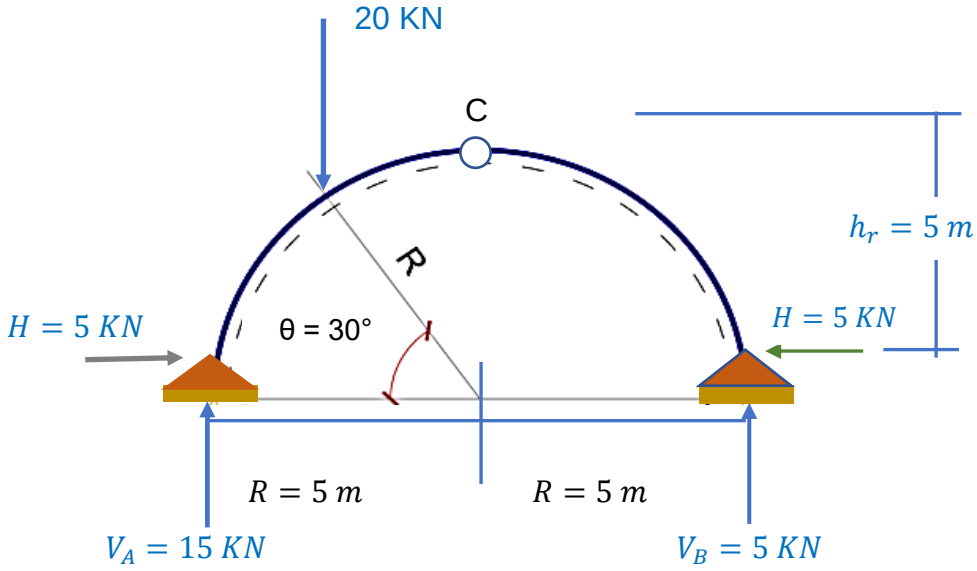
Agora devemos determinar a distância d entre a carga e a rótula interna C e aplicar a equação 19 (item 9.1.3) para obtermos o empuxo H (reação horizontal)

$$\boldsymbol{d} = R \sin 30° = 5 \sin 30° = 5 * 0{,}5 = \boldsymbol{2{,}5\ m}$$

- $\boldsymbol{H = \dfrac{\sum M_{Rót}}{h_r}} \quad \Rightarrow \quad H = \dfrac{5V_B}{h_r} = \dfrac{5 * 5}{5} = \dfrac{25}{5} = \boldsymbol{5\ KN}$

DCL final

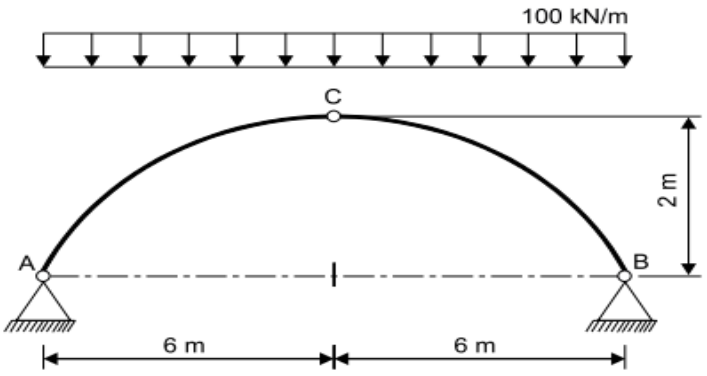
Figura. 355 – exemplo 1



Fonte: adaptado de jjscremin

2°) Calcule as reações de apoios para o arco triarticulado abaixo.

Figura. 356 – Exemplo 2



Fonte: Qconcursos.com

RESP

A) Reações de apoios

Dos exemplos anteriores e da tabela 01 (item 5.1.4.2.2) sabemos que

• **FR** = A = 100 x 12 = **1200 KN** $\overline{X_A}$ = LAB / 2 = 12 / 2 = **6 m**

Observando que a estrutura é simétrica, temos

• $V_A = V_B = \frac{F_R}{2} = \frac{1200}{2} = \mathbf{600\ KN}$

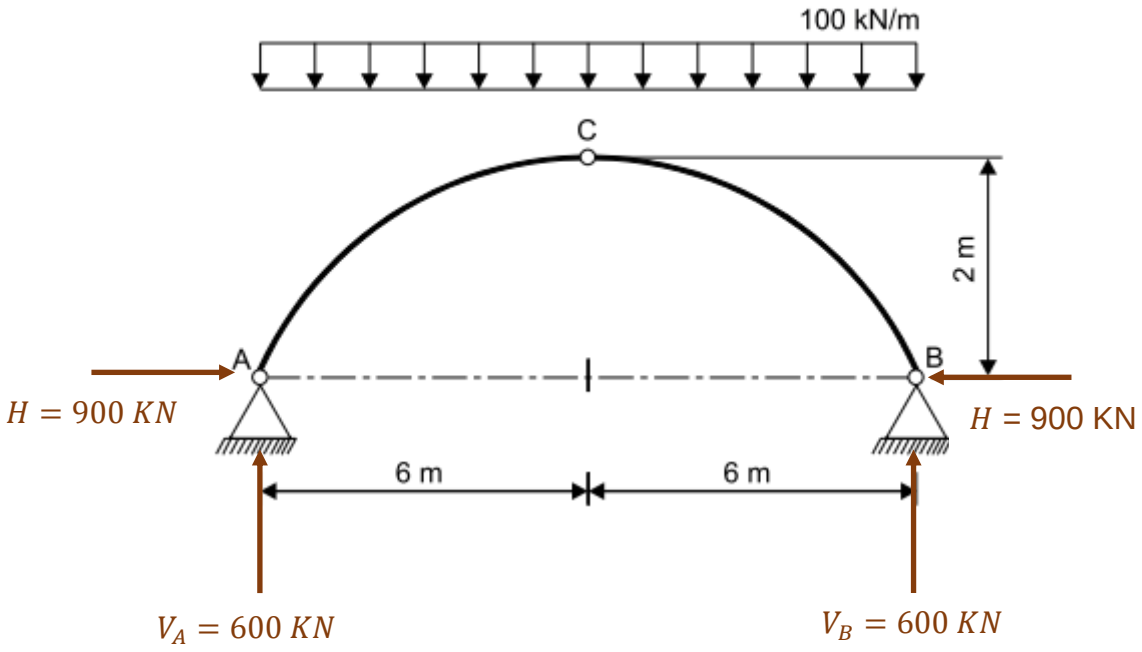
O empuxo H (reações horizontais) pode ser obtido aplicando-se a eq. 20 do (item 9.13)

• $\boldsymbol{H = \frac{q * L^2}{8.h_r}} = \frac{100 * 12^2}{8 * 2} = \frac{14400}{16} = \mathbf{900\ KN}$

Também pode ser resolvido como no caso de um pórtico tri-articulado de apoios alinhados

DCL final

Figura 357 – Exemplo 2



Fonte: Qconcursos.com

9.4 Cabos

Cabos são elementos estruturais lineares constituídos por um conjunto de fios e que trabalham somente à tração, pois são elementos flexíveis não suportando compressão, flexão, torção e nem cisalhamento.

Devido a sua alta resistência à tração e ao seu peso próprio relativamente baixo os cabos são muito utilizados para suportarem elevadas cargas de tração em estruturas de grandes vãos, tais como: pontes, grandes coberturas etc

Um cabo sob cargas verticais possui quatro reações (incógnitas) a serem determinadas. Estão disponíveis as três equações de equilíbrio da estática e usamos o fato de os cabos não transmitirem momento para obter uma equação extra $(\sum M = 0)$ que pode ser escrita em relação a qualquer ponto do cabo desde que a flecha (distância entre a corda do cabo e o cabo) em relação a esse ponto seja conhecida. Portanto um cabo suportando cargas verticais é sempre um elemento estaticamente determinado. Geralmente estaremos interessados na flecha máxima de modo a determinar a máxima altura livre e um projeto mais econômico.

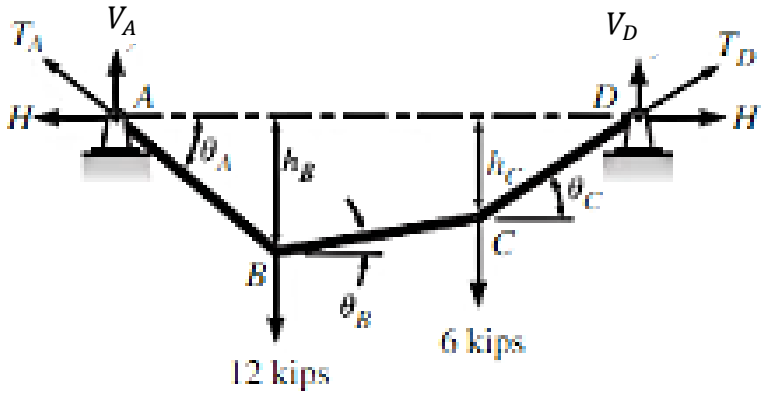
As reações nos apoios são as componentes vertical e horizontal da tração no apoio.

Para cabos exclusivamente sob cargas verticais a componente horizontal H da tração tem o mesmo valor em cada segmento do cabo. Assim, a tração (T_{ij}) num segmento IJ qualquer do cabo pode ser dada em função da componente horizonta H e da inclinação θ_i do segmento IJ através da seguinte expressão

$$\boldsymbol{T_{ij} = \frac{H}{\cos \theta_i}} \qquad \boldsymbol{eq\ 21}$$

Nos cabos a tração máxima a qual nos interessa ocorre no trecho mais inclinado geralmente no(s) apoio(s)

Fig. 358 – Cabo exclusivamente sob cargas verticais



P_2

P_1

Fonte: Adaptado de Leet (2010)

Onde:

$\boldsymbol{Linha\ AD} \rightarrow corda\ do\ cabo.\ (linha\ passando\ pelos\ apoios)$

$\boldsymbol{P_1\ e\ P_2} \rightarrow cargas\ verticais\ atuantes\ no\ cabo$

$\boldsymbol{T_A\ e\ T_D} \rightarrow tração\ no\ cabo\ nos\ apoios \boldsymbol{V_A, V_D\ e\ H} \rightarrow reações\ nos\ apoios$

$(respectivas\ componenetes\ da\ tração\ nos\ apoios)$

$\boldsymbol{h_B\ e\ h_C} \rightarrow flechas\ nos\ pontos\ B\ e\ C\ do\ cabo\ sendo\ h_B\ a\ maior\ (flecha\ máxima)$

$\boldsymbol{\theta_A} \rightarrow inclinação\ do\ cabo\ no\ apoio\ A\ e\ tambem\ do\ trecho\ AB$

$\boldsymbol{\theta_B} \rightarrow inclinação\ do\ cabo\ no\ apoio\ B\ e\ também\ no\ trecho\ CB$

$\boldsymbol{\theta_C = \theta_D} \rightarrow inclinação\ do\ cabo\ no\ trecho\ CD\ e\ também\ no\ apoio\ D$

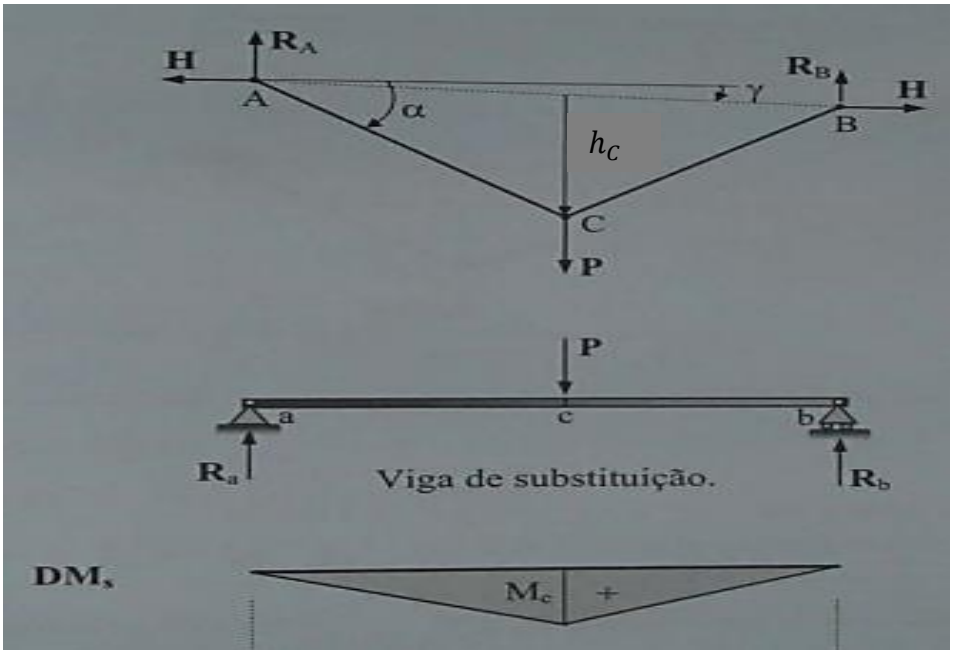
9.5 Teorema geral dos cabos

O *Teorema Geral dos Cabos* nos diz basicamente o seguinte: a reação horizontal H da tração num cabo é igual ao momento fletor (M) no mesmo ponto de uma viga simplesmente apoiada de mesmo vão e suportando as mesmas cargas nas mesmas posições dividido pela flecha (h) do cabo no ponto considerado.

Adaptado de Leet (2010)

Observe a figura a seguir

Figura. 359 - Teorema geral dos cabos



Fonte: Soriano (2007)

Logo, podemos escrever:

$$\boldsymbol{H = \frac{M_C}{h_C}} \qquad \boldsymbol{eq.22}$$

onde:

H→ componente horizontal da tração T no cabo (reação horizontal nos apoios)

M_C→ é o momento fletor no ponto C da viga AB (calculado a partir do DCL final da viga de substituição considerando as forças, inclusive a reação de apoio, à esquerda ou à direita do ponto em questão)

h_C→ é a flecha do cabo num ponto C qualquer

(Adaptado de Leet 2010)

9.6 Forma funicular de um cabo

Um cabo de peso desprezível suportando um conjunto de cargas concentradas se deforma em uma série de segmentos lineares e a forma resultante nós chamamos de polígono funicular.

Para um cabo sob carregamento uniformemente distribuído a forma funicular é uma parábola dada pela seguinte expressão

$$y = \frac{4hx^2}{L^2} \qquad eq.23$$

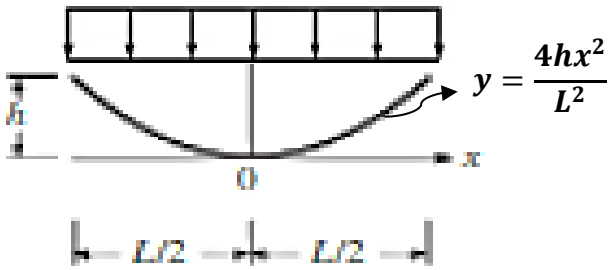
onde:

y→ é a altura do cabo na posição x sendo x medido a partir do ponto de flecha máxima, ou seja, a partir do meio do vão

h→ é a flecha no meio do vão (flecha máxima)

L→ é o vão do cabo (distância entre os apoios do cabo)

Figura. 360 – Forma funicular de um cabo



Fonte: Leet (2010)

A inclinação (**y'**) do cabo numa posição x qualquer (partindo do meio do vão) é dada pela derivada da curva y, logo

$$y' = \frac{8hx}{L^2} \quad eq.24$$

A eq. 24 mostra que a inclinação máxima ($y'_{máx}$) ocorre quando x é máximo ($x = \frac{L}{2}$), ou seja, nos apoios. Substituindo x na eq. 24, temos:

$$y'_{máx} = \frac{4h}{L}$$

logo, o ângulo (θ) de inclinação nos apoios, é:

$$\theta° = \tan^{-1}\left(\frac{4h}{L}\right) \qquad eq.25$$

Observação: um cabo exclusivamente sob a ação do peso próprio não é uma parábola, mas uma catenária, porém se a flecha máxima h que ocorre no meio do vão for pequena $(h \leq 0{,}2L)$ podemos resolver como um cabo parabólico como mostra a figura abaixo

9.7 Reações de apoios e força de tração em cabos

As reações de apoios em cabos podem ser obtidas aplicando-se somente as equações de equilíbrio estático ou pela aplicação conjunta do Teorema Geral dos

Cabos e das equações de equilíbrio estático especialmente nos cabos de apoios não alinhados.

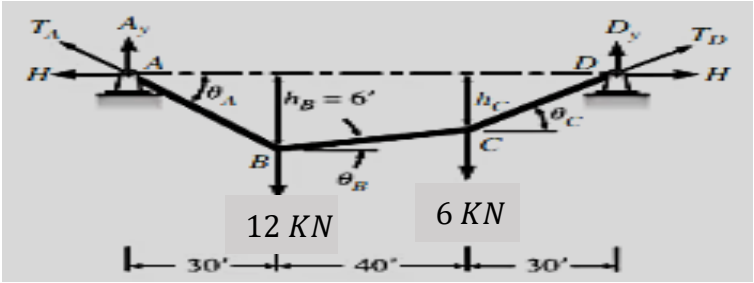
Para cabos de apoios alinhados na horizontal a ordem de resolução não é relevante, porém quando os apoios não estão no mesmo nível devemos primeiro calcular o empuxo H aplicando o teorema geral dos cabos (item 9.2.1)

Exemplos:

1°) Calcule as reações de apoios, a flecha no ponto C e também a força de tração em cada segmento do cabo abaixo.

Considere todas as distâncias em metros

Figura. 361 – Exemplo 1



Adaptado de Leet (2010)

RESP

DCL inicial

A) Reações de apoios

• Reações verticais

Como os apoios estão no mesmo nível podemos imaginar a corda AD como sendo uma viga equivalente, logo:

$$\sum M_A = 0 \ \therefore \ 100D_Y - 70 * 6 - 30 * 12 = 0 \Rightarrow \ 100D_Y - 420 - 360 = 0 \Rightarrow$$

$$100D_Y - 780 = 0 \Rightarrow \quad 100D_Y = 780 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{D_Y = 7,8\ KN}$$

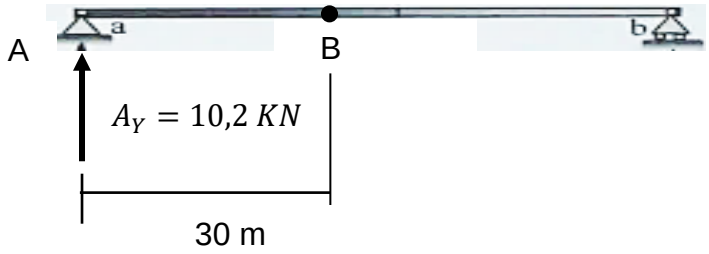
$$\sum F_V = 0 \therefore A_Y + D_Y - 12 - 6 = 0 \Rightarrow A_Y + 7{,}8 - 18 = 0 \Rightarrow \ A_Y - 10{,}2 = 0 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{A_Y = 10,2\ KN}$$

• Reação horizontal H (empuxo)

Aplicando o Teorema geral dos cabos, analisando pela esquerda do ponto B da viga equivalente e aplicando a eq. 22 (item 9.2.1), temos:

Figura.362 – Exemplo 1 (viga equivalente)



Fonte: autor

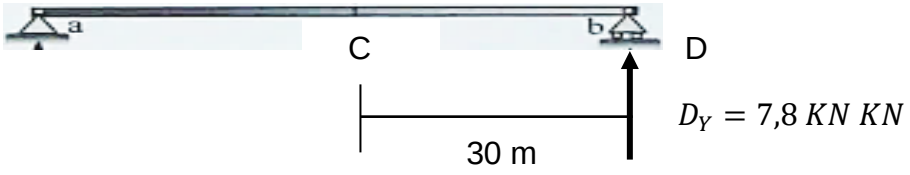
$$H = \frac{M_B}{h_B} = \frac{30 * 10{,}2}{6} = \frac{306}{6} = \mathbf{51\ KN} \quad \Rightarrow \quad (o\ empuxo\ em\ cabos\ H\ é\ sempre\ uma\ força\ de\ tração, logo\ é\ sempre\ positivo)$$

B) Flecha (h_C) no ponto C

Conhecendo o empuxo H podemos calcular a flecha num ponto qualquer aplicando o teorema geral dos cabos, analisando convenientemente a viga equivalente pela direita ou pela esquerda do ponto (menor número de forças) e aplicando a eq.22 (item 9.2.1).

Para o ponto C, temos:

Figura.363 – Exemplo 1 (viga equivalente)



Fonte: autor

$$H = \frac{M_C}{h_C} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{h_C} = \frac{M_C}{H} = \frac{30 * 7{,}8}{51} = \frac{234}{51} = \mathbf{4{,}59\ m}$$

C) Tração em cada segmento do cabo

•Tração no segmento AB

A tração (T_{AB}) no segmento AB de extremidade é igual a tração (T_A) que atua no apoio A e cujas componentes cartesianas são as já conhecidas reações H e A_y no apoio A. Assim podemos aplicar o teorema de Pitágoras para obter atração (T_{AB}), logo

$$T_{AB} = T_A = \sqrt{H^2 + {V_A}^2} = \sqrt{51^2 + 10{,}2^2} = \mathbf{52\ KN}$$

• Tração no segmento BC intermediário

Para obter a tração no segmento intermediário BC o modo mais prático é encontrar o ângulo de inclinação do segmento e aplicar a equação mostrada abaixo

$$\boldsymbol{T_{BC} = \frac{H}{\cos\theta_B}} \quad \boldsymbol{eq.21} \quad (\boldsymbol{item\ 9.2})$$

Onde:

$$\boldsymbol{\theta_B} = \tan^{-1}\left(\frac{h_B - h_C}{l_{BC}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{6 - 4{,}59}{40}\right) = \mathbf{2{,}02°}$$

$$\boldsymbol{T_{BC} = \frac{H}{\cos\theta_B}} = \frac{51}{\cos(2{,}02°)} \quad \therefore\ \boldsymbol{T_{BC} = 51{,}03\ KN}$$

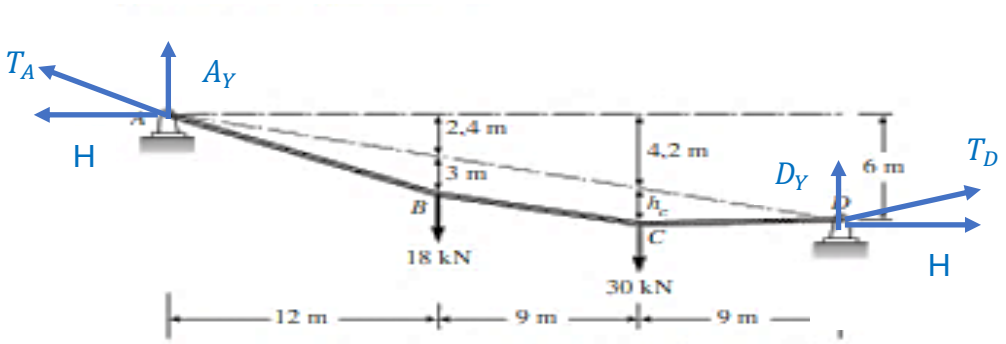
• Tração no segmento CD de extremidade

A tração (T_{CD}) no segmento CD de extremidade é igual a tração (T_D) que atua no apoio D e cujas componentes cartesianas são as já conhecidas reações H e D_y no apoio D. Assim podemos aplicar o teorema de Pitágoras para obter atração (T_{CD}), logo

$$\boldsymbol{T_{CD}} = \sqrt{H^2 + {D_Y}^2} = \sqrt{51^2 + 7{,}8^2} = \mathbf{51{,}59\ KN}$$

2°) determine as reações nos apoios A e D, a tensão máxima no cabo e o valor da flecha máxima do cabo no ponto C.

Figura 364 – Exemplo 2



Fonte: Leet 2010

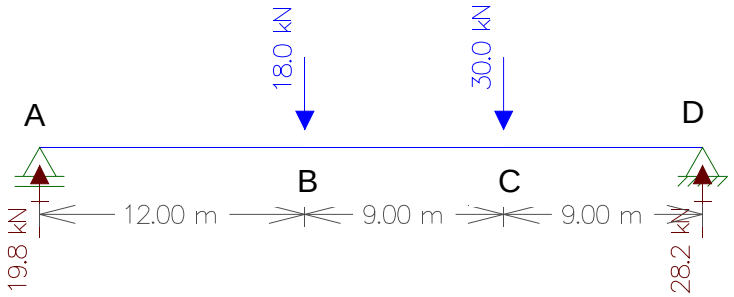
RESP

A) Reações de apoios

Para encontrar a reação horizontal H, vamos aplicar o teorema geral dos cabos

• Reação horizontal H (viga equivalente DCL final)

Figura.365 - Exemplo 2 (viga equivalente**)**



Fonte: autor

Nesse caso, conhecemos a flecha do cabo no ponto B, assim vamos escolher convenientemente aplicar a eq. 22 do item 9.2.1 a parte da viga de substituição à esquerda do ponto B

$$\boldsymbol{H = \frac{M_B}{h_B} = \frac{V_A * L_{AB}}{h_B}} = \frac{19{,}8 * 12}{3} \quad \therefore \boldsymbol{H = 79{,}2\ KN}$$

• Reações verticais

Conhecendo o empuxo H, usamos $(\sum M = 0)$ em relação a um dos apoios do cabo (fig. 366) para encontrar uma de suas reações verticais

$$\sum M_A = 0 \therefore 30D_Y - 30 * 21 - 18 * 12 + 6 * 79{,}2 = 0 \Rightarrow 30D_Y - 630 - 216 + 475{,}2 = 0$$

$$30D_Y - 846 + 475{,}2 = 0 \Rightarrow 30D_Y - 370{,}8 = 0 \Rightarrow 30D_Y = 370{,}8 \Rightarrow \quad \boldsymbol{D_Y = 12{,}36\ KN}$$

$$\sum F_V = 0 \therefore A_Y + 12{,}36 - 30 - 18 = 0 \Rightarrow A_Y + 12{,}36 - 48 = 0 \Rightarrow A_Y - 35{,}64 = 0 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{A_Y = 35{,}64\ KN}$$

B) Tração máxima no cabo

Sendo a inclinação no apoio A, em relação a horizontal, a maior então a tração máxima ocorre no apoio A ou ainda no trecho AB

$$\boldsymbol{T_{máx} = T_A = \sqrt{H^2 + {A_Y}^2}} = \sqrt{79{,}2^2 + 35{,}64^2} = \boldsymbol{86{,}85\ KN}$$

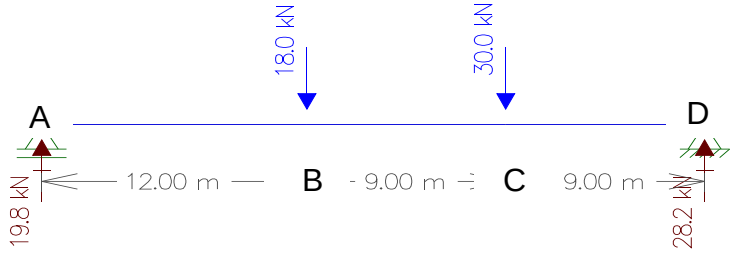
Também podemos usar:

$$\boldsymbol{T_{máx} = \frac{H}{\cos \theta_{máx}} \quad eq.21 \quad (item\ 9.2)}$$

C) Flecha máxima $(h_{máx})$

Para encontrar a flecha máxima $(h_{máx})$ a qual ocorre no ponto C calculamos o momento, pela esquerda ou pela direita, do ponto C da viga equivalente e aplicamos a eq. 22 dada no item 9.2.1

Figura.366- Exemplo 2



Fonte: autor

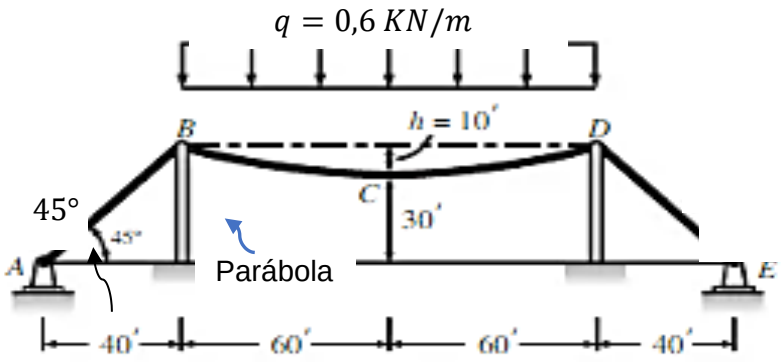
Usando a parte à direita do ponto C da viga equivalente, temos

$$\boldsymbol{h_{máx} = h_C = \frac{M_C}{H}} \quad logo, \quad h_{máx} = h_C = \frac{28{,}2 * 9}{79{,}2} \quad \therefore \boldsymbol{h_{máx} = h_C = 3{,}20\ m}$$

3°) Para o cabo BD sob carregamento uniformemente distribuído mostrado abaixo determine a tração máxima no cabo entre os pontos B e D e também a tração no cabo AB

Considere todas as distâncias em metros

Figura. 367- Exemplo 3



Fonte: Leet 2009

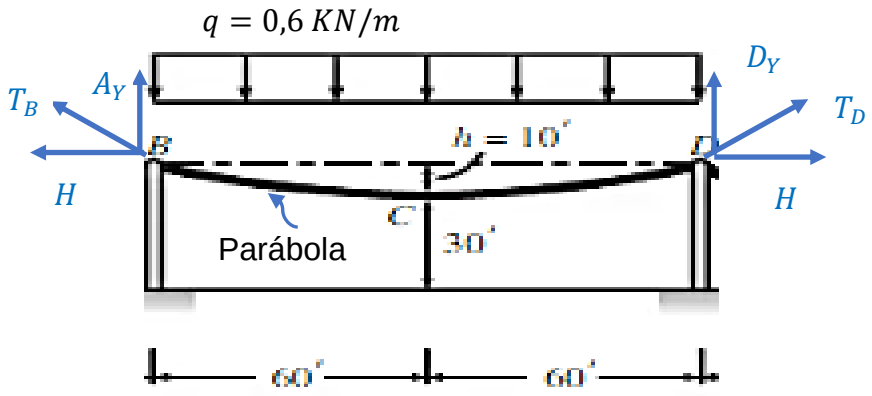
RESP

A) Resolvendo o cabo BD

DCL inicial para o trecho BD

$$F_{R,BD} = A_{BD} = (0{,}6 \, x \, 120) = \mathbf{72\ KN} \quad e \quad \bar{X}_B = \frac{120}{2} = \mathbf{60\ m}$$

Fig. 368 - Exemplo 3



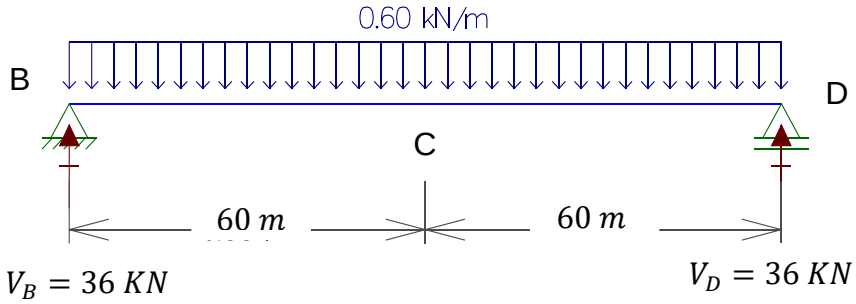
Fonte: adaptado de Leet 2009

A) Componente horizontal (H) da tração nos apoios (empuxo)

Para encontrar a componente horizontal H da tração no cabo vamos aplicar o teorema geral dos cabos, assim temos

Viga equivalente (DCL final)

Fig.369 - Exemplo 3

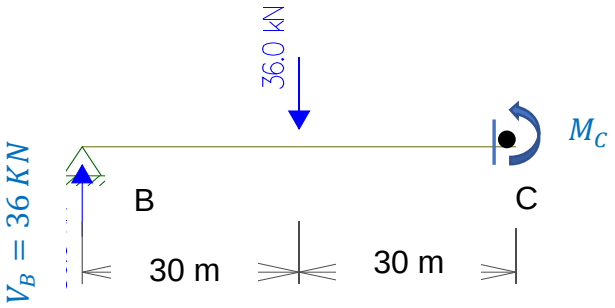


Fonte: autor

Agora calculamos momento no ponto C, cuja flecha é conhecida. Assim, considerando a parte da viga à esquerda de C,

$$\boldsymbol{F_{R,BC} = A_{BC}} = (0{,}6 \, x \, 60) = \mathbf{36\ KN} \quad e \quad \bar{X}_B = \frac{60}{2} = \mathbf{30\ m}$$

Fig. 370 – Exemplo 3



Fonte: autor

$\sum M_C = 0 \ \therefore \ M_C - 36 * 60 + 36 * 30 = 0 \Rightarrow M_C - 2160 + 1080 = 0 \Rightarrow M_C - 1080 = 0$

$\boldsymbol{M_C = 1080\ KN.m}$

Agora usamos a eq. 22 do item 9.2.1 para calcular a componente horizontal H da tração no cabo (na equação usamos o módulo do momento)

$$\boldsymbol{H = \frac{M_C}{h_C} = \frac{1080}{10} \ \therefore \ H = 108\ KN}$$

Agora observando o DCL inicial do cabo BD (fig. 370) usamos ($\sum M = 0$) em relação a um dos apoios para obter uma das reações verticais para o cabo (observe que o cabo BD é simétrico)

$\sum M_D = 0 \therefore \ 120A_Y - 60 * 72 = 0 \Rightarrow 120A_Y - 4320 = 0 \Rightarrow 120A_Y = 4320 \Rightarrow$

$\boldsymbol{A_Y = 36\ KN = D_Y\ (estrutura\ simétrica)}$

B) Tração máxima no cabo BD ($T_{máx}$)

As inclinações do cabo são maiores nos apoios, assim a tração máxima ocorre lá e sendo a estrutura simétrica a tração máxima nos apoios possuem o mesmo valor. Como já conhecemos as reações nos apoios, componentes cartesianas da tração, podemos aplicar Pitágoras para calcular a tração.

Usando as forças no apoio B e aplicando Pitágoras, temos

$$\boldsymbol{T_{máx} = T_B = T_D = \sqrt{H^2 + {A_Y}^2} = \sqrt{108^2 + 36^2}}$$

$$\boldsymbol{= 113,84\ KN\ (estrutura\ simétrica)}$$

No caso de um cabo de apoios alinhados, peso desprezível e sob carregamento uniformemente distribuído, como nesse exemplo, o cabo descreve

uma parábola e a tração máxima ocorre nos apoios e pode ser obtida sem as reações de apoios aplicando-se as equações abaixo.

$$\boldsymbol{T_{máx} = \frac{H}{\cos(\theta_{Apoio})}} \qquad \boldsymbol{eq.21} \quad (\boldsymbol{item\ 9.2})$$

Onde:

$$\boldsymbol{\theta^{\circ}_{Apoio} = \tan^{-1}\left(\frac{4h}{L}\right)} \qquad \boldsymbol{eq.25} \qquad (\boldsymbol{item\ 9.2.2})$$

Acompanhe a resolução abaixo:

$$\boldsymbol{\theta^{\circ}_{Apoio} = \tan^{-1}\left(\frac{4h}{L}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{4 * 10}{120}\right) = 18,43°}$$

Substituindo na eq. 21, temos:

$$\boldsymbol{T_{máx} = \frac{H}{\cos(\theta_{Apoio})}} = \frac{108}{\cos(18{,}43°)} = \boldsymbol{113,84\ KN}$$

C) Tração no cabo AB

Desprezando-se o peso próprio a tração no cabo AB pode ser encontrada aplicando-se a eq. 21 dada no item 9.2

$$\boldsymbol{T_{AB} = \frac{H}{\cos\theta}} \ \therefore\ T_{AB} = \frac{108}{\cos 45°} = \boldsymbol{152,76\ KN}$$

CAPÍTULO X

10. Esforços solicitantes internos

Neste capítulo estudaremos os esforços que surgem e atuam dentro de um elemento estrutural sempre que um carregamento externo ativo passa a atuar sobre ele. Esses esforços são chamados de esforços solicitantes internos.

Nesta apostila vamos estudar apenas estruturas planas e nesse caso o momento torsor é nulo, pois não há carga fora do plano da estrutura, assim os únicos esforços solicitantes internos atuantes serão: esforço normal (**N**), esforço cortante (**V**) e momento fletor (**M**).

10.1 Esforço normal solicitante interno (N):

Esforço interno que atua perpendicularmente ao plano da seção transversal e pode ser de tração ou de compressão. É originado por cargas externas que atuam na direção do eixo longitudinal da peça (cargas axiais)

Quando a força axial externa tender a esticar a peça (vetor força saindo da seção) o esforço normal (**N**) será de tração. Quando a força axial externa tender a encurtar a peça (vetor entrando na seção transversal) o esforço normal, será de compressão

Nessa apostila vamos adotar a seguinte convenção de sinais para o esforço normal

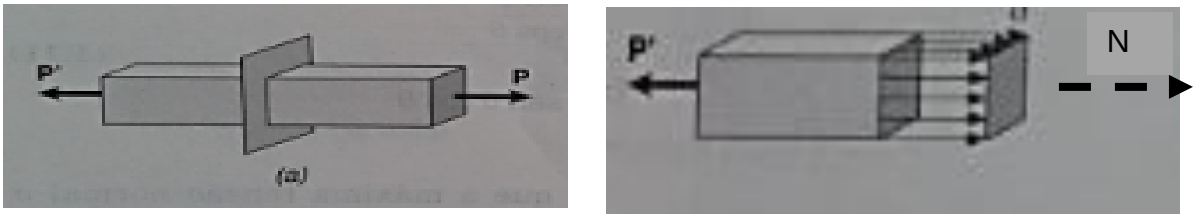
a) O esforço normal de tração (seta saindo da seção transversal) é positivo

b) O esforço normal de compressão (seta entrando na seção transversal) é negativo

Para evidenciar os esforços internos em uma seção qualquer de uma estrutura fazemos um corte imaginário pelo ponto de interesse separando o elemento estrutural em duas partes.

A fig. (a) mostra uma barra tracionada por uma força axial **P**. Na figura (b) a barra foi cortada por um plano transversal e podemos visualizar a distribuição das forças internas e a correspondente força normal resultante interna **N** de tração na seção cortada.

Figura 371



b

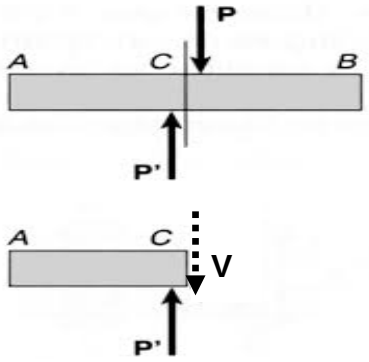
Fonte: Beer e Russel (Resistência dos Materiais)

10.2 Esforço cortante solicitante interno (V)

Esforço interno que atua paralelamente ao plano de uma seção transversal quando uma carga externa transversal ao eixo da barra tende a fazer uma parte da estrutura deslizar, subir ou descer, em relação a outra parte.

Na figura abaixo, V é a força cortante interna na seção C cortada

Figura 372



Fonte: Beer e Russel (Resistência dos Materiais)

Na figura acima vemos a barra AB cortada em C e o esforço cortante (**V**) interno que surge na seção C quando as cargas transversais P' e P tendem a produzir o deslizamento entre os trechos AC e CB

Nessa apostila vamos adotar a seguinte convenção de sinais para o esforço cortante (V):

• Em uma análise pela esquerda o cortante será positivo se a força transversal externa tender a levantar a parte à esquerda da viga como mostra a figura abaixo

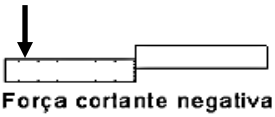
Figura 373



Fonte: www.ufjf.br

Caso contrário, como mostrado na figura abaixo, o cortante será negativo

Figura. 374



Fonte: www.ufjf.br

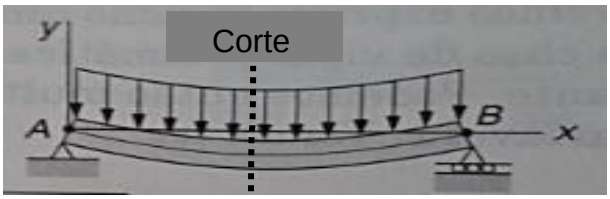
Quando a análise for pela direita a convecção de sinais se inverte, ou seja, o cortante será positivo se o sentido da força transversal externa for para baixo e negativo se a força cortante externa for para cima

10.3 Momento fletor solicitante interno (M):

O momento fletor interno é produzido por cargas externas transversais ao eixo longitudinal de uma barra e que tendem a curvar a peça. Em nosso estudo vamos considerar o momento fletor positivo quando a curva apresentar a concavidade voltada para cima, ou seja, quando tracionar as fibras inferiores e comprimir as superiores, caso contrário o momento é negativo.

A figura abaixo mostra uma viga AB curvada sob o efeito de um momento fletor positivo produzido por um carregamento uniformemente distribuído

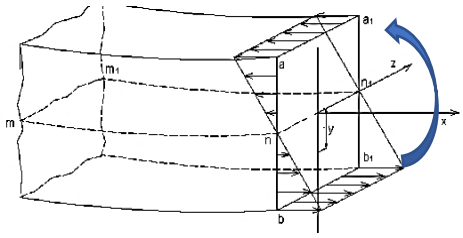
Figura. 375



Fonte: Beer e Russel (Resistência dos Materiais)

A figura abaixo mostra um corte da viga AB evidenciando o giro da seção transversal tracionando as fibras inferiores e comprimindo as superiores por efeito do momento fletor interno positivo que atua na viga AB

Figura. 376



Fonte: www.ufjf.br

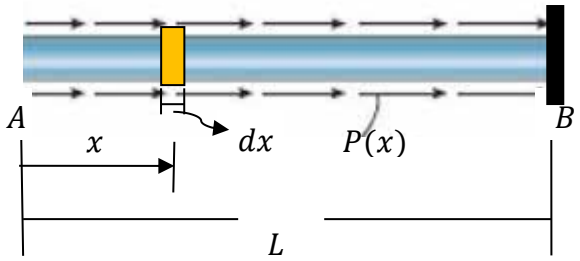
10.4 Relações fundamentais da estática

No item anterior aprendemos o conceito de esforços internos. Agora vamos desenvolver relações matemáticas que fornecem a variação de tais esforços em função da posição **X** ao longo do comprimento **L** de um elemento estrutural permitindo traçar os chamados diagramas de esforços internos que são as representações gráficas desses esforços e possibilitam uma análise estrutural detalhada do elemento em estudo.

A) Relação entre o esforço normal interno e cargas axiais.

Observe a barra AB representada a abaixo sujeita a um carregamento axial uniformemente distribuído dado por uma função **P(x)** e na qual estamos considerando um elemento de comprimento infinitesimal $\boldsymbol{dx}$ localizado na posição **x**.

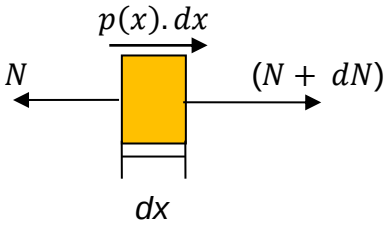
Figura 377



Fonte: elétrica.ufpr.

A figura abaixo mostra uma ampliação do elemento de comprimento $\boldsymbol{dx}$. Para garantir o equilíbrio do elemento atuado pela resultante $\boldsymbol{p(x) * dx}$ do carregamento axial é necessário que surjam esforços internos em ambos os lados do elemento como mostra a figura a seguir:

Fig. 378– Detalhe do elemento de comprimento infinitesimal dx



Fonte: autor

Onde:

$\boldsymbol{N} \rightarrow$ é $a\ resultante\ do\ esforço\ normal\ interno\ produzido\ pela\ parte\ da\ estrutura$ à $esquerda\ do\ elemento\ dx$

$\boldsymbol{dN} \rightarrow\ acréscimo\ do\ esforço\ normal\ interno\ ao\ longo\ do\ comprimento\ dx$

$\boldsymbol{p(x) * dx} \rightarrow\ resultante\ do\ cargamento\ axial\ estarno\ p(x)\ ao\ longo\ do\ comprimento\ dx\ do\ elemento$

Para garantir o equilíbrio do elemento na horizontal devemos ter:

$-N\ +\ p(x) * dx\ +\ (N\ +\ dN) =\ 0 \Rightarrow\ -N +\ p(x) * dx\ + N\ + dN = 0 \Rightarrow$

$p(x) * dx + dN = 0 \quad \Rightarrow\ \boldsymbol{dN = -\,p(x) * dx,}$

aplicando a integral indefinida nos dois lados, temos

$$\boldsymbol{N = \int -p(x) * dx + N'}$$

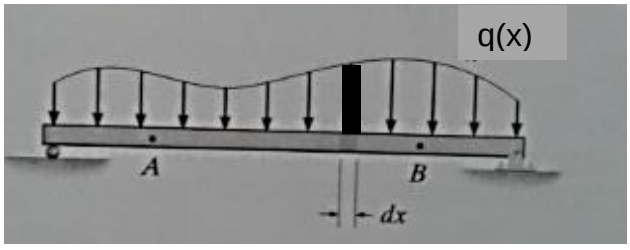
A função acima fornece o esforço normal interno (**N**) em termos da posição **x** ao longo de uma barra e o sinal negativo indica que o carregamento axial $P(x)$ está comprimindo a barra

A constante $\boldsymbol{N'}$ é a força ou soma das forças axiais externas concentradas, se existirem, aplicadas no início de uma barra ou de um trecho a ser analisado (condição de contorno)

B) Relação entre cargas transversais externas, esforço cortante (V) e momento fletor (M).

Observe a barra representada a abaixo sujeita a um carregamento distribuído **q(x)** e na qual estamos considerando um elemento de comprimento infinitesimal $\boldsymbol{dx}$ localizado na posição **x**.

Figura. 379



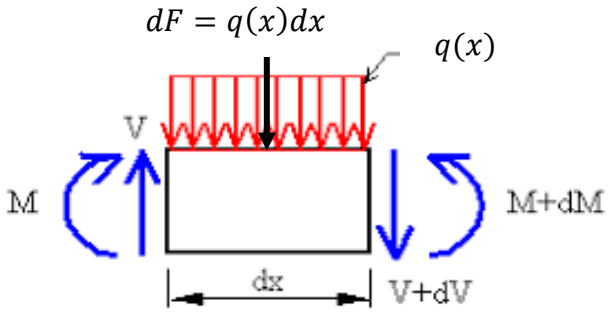


Fonte: Hibbeler (Resistencia dos Materiais**)**

Para garantir o equilíbrio do elemento de comprimento $\boldsymbol{dx}$, representado abaixo e sobre o qual atua a resultante $\boldsymbol{q(x) * dx}$ da força axial externa é necessário que surjam esforços internos em ambos os lados do elemento como mostra a figura a seguir:

Detalhe ampliado do elemento de comprimento dx

Figura 380



Fonte

Onde:

$\boldsymbol{V} \rightarrow$ $esforço\ cortante\ interno\ total\ desde\ o\ início\ da\ viga\ até\ a\ face\ esquerda\ do\ elemento\ dx$

$\boldsymbol{M}$

$\rightarrow$ $momento\ fletor\ interno\ total\ desde\ de\ o\ início\ da\ viga\ até\ a\ face\ esquerda\ do\ elemento\ dx$

$\boldsymbol{dV\ e\ dM} \rightarrow$ $são\ acréscimos\ do\ cortante\ e\ do\ momento\ ao\ longo\ do\ comprimento\ dx\ do\ elemento$

$\boldsymbol{dF = q(x) * dx} \rightarrow$ é $a\ resultante\ do\ carregamento\ distribuído\ ao\ longo\ do\ comprimento\ dx\ aplicada\ no\ ponto\ \ dx/2$

Para que ocorra o equilíbrio do elemento $\boldsymbol{dx}$ na direção vertical devemos ter:

$V - q(x) * dx - (V + dV) = 0 \Rightarrow V - q(x) * dx - V - dV = 0 \Rightarrow -q(x) * dx - dV = 0$

$dV = -q(x) * dx$

Aplicando a integral indefinida aos dois membros, temos

$$\boldsymbol{V = \int -q(x) * dx + V'}$$

A função acima fornece o esforço cortante interno (**V**) em termos da posição X ao longo do trecho analisado e mostra que o cortante é a integral do carregamento externo transversal ao eixo do elemento

A constante ($\boldsymbol{V'}$) é a soma das forças transversais externas concentradas, se existirem, aplicadas no início do trecho em analise (condição de contorno)

C) Relação entre cargas transversais externas e momento fletor

Analogamente para o equilíbrio do elemento dx (fig.382) em relação aos momentos, temos

$$M + V * dx + [-q(x) * dx] * \frac{dx}{2} - (M + dM) = 0$$

$$M + V * dx - q(x) * \frac{dx^2}{2} - M - dM = 0 \Rightarrow$$

$o\ termo\ \frac{dx^2}{2}$ é $um\ infinitesimal\ de\ ordem, ou\ seja,$ é $infinitamente\ pequeno, e$ $pode\ ser\ desprezado$

assim temos:

$$V * dx - dM = 0 \Rightarrow -dM = -V * dx \quad \therefore \quad dM = V * dx$$

aplicando a integral indefinida aos dois membros, temos

$$\boldsymbol{M = \int V * dx + M'}$$

A função acima fornece o momento fletor interno (**M**)em termos da posição X ao longo do trecho analisado e mostra que o momento é a integral do cortante no trecho em análise

A constante (***M'***) é a soma dos momentos resultantes, se existirem, aplicados no ponto inicial do trecho em analise (condição de contorno)

As funções que foram obtidas são chamadas de relações fundamentais da estática.

Para utilizar essas relações na construção dos diagramas de esforços internos é necessário saber identificar os chamados pontos notáveis que são os pontos que definem os trechos de análise ao longo de um elemento estrutural e também estabelecer uma convenção de sinais para os esforços internos

10.5 Pontos notáveis

Os chamados pontos notáveis são aqueles que definem trechos de análise ao longo de um elemento estrutural. São eles

A) Ponto inicial e final de uma barra

B) Ponto de aplicação de uma carga concentrada ou de um momento fletor externos.

C) Ponto de início e termino de carregamento distribuído

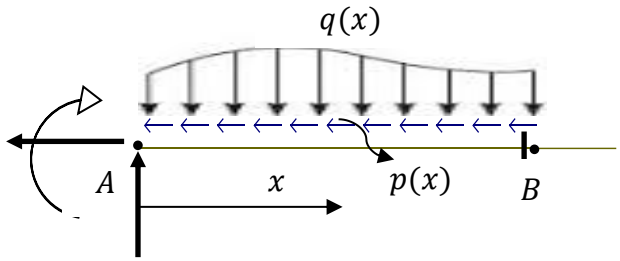
D) descontinuidade geométrica (mudança de direção da barra)

10. 6 Convenção de sinais

Para a aplicação das relações fundamentais entre os esforços internos vamos adotar a convecção de sinais explicada abaixo

A) Para uma análise de um trecho AB qualquer pela ESQUERDA a figura abaixo mostra o sentido positivo para as forças e momentos externos atuantes no ponto inicial (ponto A) do trecho a ser analisado

Fig. 381 – Detalhe do trecho de uma viga analisado pela esquerda (de A para B**)**



fonte: autor

Trecho AB pela ESQUERDA

$A \leq x \leq B$

$$\boldsymbol{V_{AB}} = \int -\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'}$$

$$\boldsymbol{M_{AB}} = \int \boldsymbol{V_{AB}}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'}$$

$$\boldsymbol{N_{AB}} = \int \boldsymbol{p(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'}$$

onde

$\boldsymbol{V_{AB}}\rightarrow$ é a função do cortante no trecho AB

$\boldsymbol{M_{AB}} \rightarrow$ é a função do momento no trecho AB

$\boldsymbol{N_{AB}} \rightarrow$ é a função do esforço normal interno no trecho AB

$\boldsymbol{q(x)}\rightarrow$ é o carregamento transversal distribuído que atua no trecho AB. Pela esquerda $\boldsymbol{q(x)}$ para baixo é negativo.

$\boldsymbol{p(x)} \rightarrow$ é o carregamento axial distribuído que atua no trecho AB. P(x) é positivo se for de tração e negativo se for de compressão seja pela esquerda ou pela direita

$\sum \boldsymbol{V'}\rightarrow$ é a soma das cargas externas que produzem cortante no ponto inicial de extremidade do trecho em análise, se existirem. Nos pontos iniciais de trechos internos o $\sum \boldsymbol{V'}$ é o cortante do trecho anterior somado com o cortante produzido por cargas externas aplicadas no ponto inicial do trecho interno, se existirem.

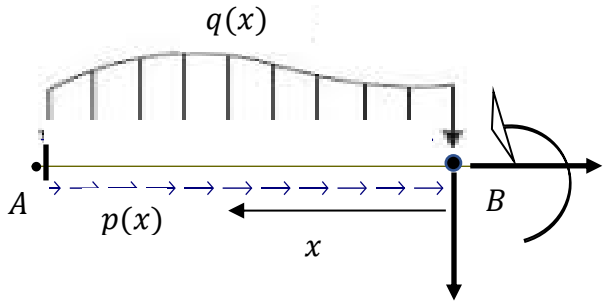
Analisando pela esquerda as cargas externas transversais ao eixo da barra aplicadas no ponto inicial de cada trecho, externo ou interno, serão positivas quando o sentido for para cima e negativas quando o sentido for para baixo

$\sum \boldsymbol{M'} \rightarrow$ é o momento externo, se existir, no ponto inicial de um trecho de extremidade ou o momento interno do trecho anterior aplicado no ponto inicial do trecho interno seguinte ou ainda o momento do trecho anterior somado com um momento externo aplicado no início do trecho interno a ser analisado com aplicados. Analisando pela esquerda momentos externos aplicados dentro do trecho, se existirem, serão positivos no sentido horário e negativos no sentido anti-horário.

$\sum N' \rightarrow$ é a soma das cargas axiais, externas e internas do trecho anterior, aplicadas no ponto inicial do trecho em análise. São positivas as que forem de tração e negativas as de compressão seja pela esquerda ou pela direita

B) Para uma análise de um trecho AB qualquer pela DIREITA a figura abaixo mostra o sentido positivo para as forças e momentos externos atuantes no ponto inicial do trecho (ponto B)

Fig. 382 - Detalhe do trecho de uma viga analisado pela esquerda (de A para B)



Fonte: autor

Trecho BA pela DIREITA

$B \leq x \leq A$

$$\boldsymbol{V_{BA}} = \int \boldsymbol{q(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'}$$

$$\boldsymbol{M_{BA}} = \int -\boldsymbol{V_{BA}}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'}$$

$$\boldsymbol{N_{BA}} = \int \boldsymbol{p(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'}$$

onde

$\boldsymbol{V_{BA}}\rightarrow$ é o valor do cortante em um ponto x qualquer do trecho BA

$\boldsymbol{M_{BA}}\rightarrow$é o valor do momento em um ponto x qualquer do trecho BA

$\boldsymbol{N_{BA}}\rightarrow$ é o valor do esforço normal interno em um ponto x qualquer do trecho BA

$\boldsymbol{q(x)}\rightarrow$ é o carregamento transversal distribuído que atua no trecho BA. Pela esquerda $\boldsymbol{q(x)}$ para baixo é negativo e pela direita é positivo.

$\boldsymbol{p(x)}\rightarrow$ é o carregamento axial distribuído que atua no trecho BA. P(x) é positivo se for de tração e negativo se for de compressão.

$\sum \boldsymbol{V'}\rightarrow$ é a soma das cargas externas que produzem cortante no ponto inicial do trecho em análise. Nos pontos iniciais internos o $\sum \boldsymbol{V'}$ é o cortante do trecho anterior somado com o cortante produzido por cargas externas aplicadas no ponto, se existirem.

Analisando pela esquerda as cargas externas transversais ao eixo da barra aplicadas no ponto inicial de cada trecho serão positivas quando o sentido for para

cima e negativas quando for para baixo, pela direita são positivas cargas transversais para baixo e negativas as que apontarem para cima.

$\sum \boldsymbol{M'} \rightarrow$ é a soma dos momentos, externos e internos do trecho anterior, aplicados no ponto inicial do trecho em análise. Analisando pela direita momentos externos aplicados dentro do trecho, se existirem, serão positivos no sentido anti-horário e negativos aqueles no sentido horário.

$\sum \boldsymbol{N'} \rightarrow$ é a soma das cargas axiais, externas e internas do trecho anterior, aplicadas no ponto inicial do trecho em análise. São positivas as que forem de tração e negativas as de compressão seja pela esquerda ou pela direita

• Podemos iniciar a análise de qualquer elemento pela esquerda ou pela direita indiferentemente

Observação: para um trecho qualquer o ponto da extremidade final não pertence ao trecho, ou seja, um trecho AB qualquer vai do ponto A até o ponto imediatamente antes do ponto B, assim eventuais cargas ou momentos concentrados aplicadas no ponto B (extremidade final do trecho AB) não entram nas equações dos esforços internos no trecho AB (as cargas aplicadas no ponto B, final do trecho AB, pertencem ao trecho BC)

10.7 Diagramas de esforços internos

As funções dos esforços solicitantes internos, obtidas no item 10.4 e mostradas no item anterior, fornecem os esforços internos em qualquer posição X ao longo do comprimento L de um trecho ou de um elemento estrutural nos permitindo construir os chamados diagramas de esforços internos que são as representações gráficas da variação dos referidos esforços ao longo de um elemento

10.8 Interpretando o diagrama do esforço cortante

É importante saber interpretar o diagrama do cortante, pois através dele podemos obter muitas informações sobre as cargas e esforços que atuam no elemento estrutural analisado

A) Relação entre o esforço cortante e o carregamento sobre a estrutura

• *Trecho onde o cortante é uma reta horizontal (valor constante)* → indica ausência de cargas no trecho

• *Trecho onde o cortante é uma reta inclinada* → indica a existência de um carregamento uniformemente distribuído no trecho. Mudança na inclinação da reta do cortante indica mudança no valor do carregamento distribuído.

• *Salto no diagrama do cortante (descontinuidade)* → indica presença de carga concentrada no ponto onde ocorre o salto do cortante

B) Relação entre o cortante e o momento fletor

Vimos que o cortante é a derivada do momento e como vamos trabalhar somente com funções contínuas em intervalos fechados, então os candidatos a ponto de momento máximo ($\boldsymbol{M_{máx}}$), em módulo, são:

• *As extremidades dos trechos (extremos dos intervalos)*

• *Pontos onde existem "bicos" ou saltos no diagrama do cortante e pontos onde o cortante se anula interceptando o eixo da viga (números críticos da função do cortante)*

• *Nos trechos ao longo do qual o cortante é nulo, coincidindo com o eixo da viga, o momento é constante (trecho onde a derivada é nula a primitiva é constante)*

• *Sendo o momento a integral do cortante, então podemos obter o momento em um ponto qualquer como a soma das áreas sob o diagrama do cortante até o ponto considerado.*

10.9 Diagramas dos esforços internos para vigas exclusivamente sob cargas concentradas

Nesse item vamos aprender a construir os diagramas dos esforços internos para vigas exclusivamente sob cargas concentradas

Roteiro para construção dos diagramas de esforços internos para vigas em geral.

A) Construa o DCL final da viga

B) Marque os pontos notáveis no DCL final. Escolha convenientemente se a análise iniciará pela esquerda ou pela direita e defina os trechos de análise fazendo cortes na viga (uma linha transversal ao eixo da viga imediatamente antes de cada ponto notável com exceção do ponto inicial de extremidade)

C) Aplique as relações da estática (item 10.6) para obter a função de cada esforço interno em cada trecho

Observação:

• O esforço interno num ponto no início de um trecho é a soma do esforço nos trechos anteriores somada às forças ou momentos externos aplicados no ponto

• Forças ou momentos aplicados no ponto final de um trecho em análise não entram nos cálculos dos esforços internos do trecho e sim nos cálculos do trecho seguinte

• Nas vigas o diagrama do cortante e do esforço normal positivos são desenhados acima do eixo e os negativos abaixo do eixo da viga.

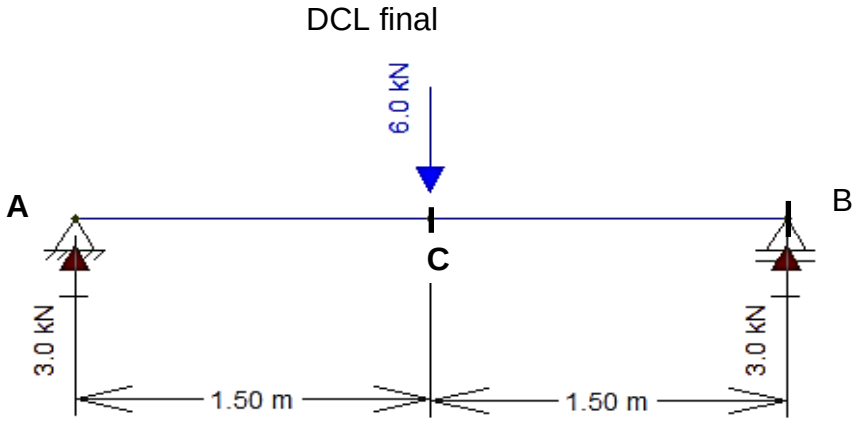
• O momento fletor é sempre desenhado do lado das fibras tracionadas e, nas vigas, se o momento é positivo as fibras tracionadas são as inferiores, logo o diagrama de momento positivo deve ser desenhado abaixo do eixo, porém se o momento for negativo as fibras tracionadas são as superiores, e o momento deve ser desenhado acima do eixo da viga

F) Sendo o momento a integral do cortante, então podemos obter o momento em um ponto qualquer como a soma das áreas do diagrama do esforço cortante até o ponto considerado (Método das Áreas)

As reações e os diagramas foram obtidos usando o FTOOL e diferenças mínimas entre os valores fornecidos pelas expressões e os valores fornecidos pelo programa são devidas a eventuais arredondamentos

1°) Construa os diagramas dos esforços internos para a viga abaixo

Fig. 34 – Exemplo 1



Fonte: autor

RESP

Vamos resolver esse primeiro exemplo detalhadamente para que ele sirva de modelo para os demais

Os pontos notáveis são: o ponto A (início de barra), o ponto C (ponto de aplicação de carga concentrada) e o ponto B (término de barra).

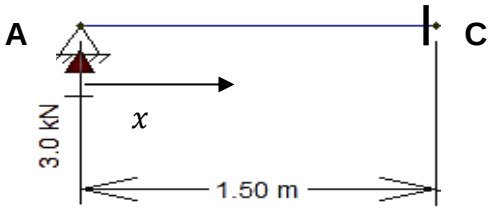
Vamos escolher analisar pela esquerda, assim os trechos de análise serão AC e CB.

• **Trecho AC pela esquerda**

Cortando a viga imediatamente antes do ponto C (final do trecho AC)

Lembre-se: Cargas aplicadas no ponto final de um trecho, nesse caso, 6 KN aplicada no ponto C, não entram no cálculo dos esforços do trecho (AC), mas sim nos cálculos do trecho seguinte, nesse caso, o trecho CB

Fig. 384 – Exemplo 1



Fonte: autor

Observe que no trecho AC temos: $q(x) = 0$

• Esforço cortante ($\boldsymbol{V_{AC}}$) no trecho AC

$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 \leq x \leq 1{,}5 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{AC}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} \;\Rightarrow\; nesse\ caso, existe\ apenas\ a\ reação\ \boldsymbol{V_A}\ aplicada\ no\ ponto\ A\ inicial, assim \sum \boldsymbol{V'} = V_A = 3KN, logo:$

$\boldsymbol{V_{AC}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int -0\, dx + 3 = 0 + 3 = \boldsymbol{3\ kN} \quad \therefore \quad \boldsymbol{V_{AC}} = \boldsymbol{3\ KN}\ (cte)$

• Momento fletor ($\boldsymbol{M_{AC}}$) no trecho AC

$\boldsymbol{M_{AC}} = \int \boldsymbol{V_{1,2}}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} \Rightarrow \quad \sum \boldsymbol{M'} = \boldsymbol{0\ KN.m}\ , pois\ nesse\ caso\ não\ existe\ nenhum\ momento\ externo\ atuando\ no\ ponto\ A\ inicial, assim\ temos:$

$$\boldsymbol{M_{AC}} = \int \boldsymbol{V_{AC}}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int 3\,dx + 0 = 3x + 0 \qquad \therefore \qquad \boldsymbol{M_{AC}} = \boldsymbol{3x}$$

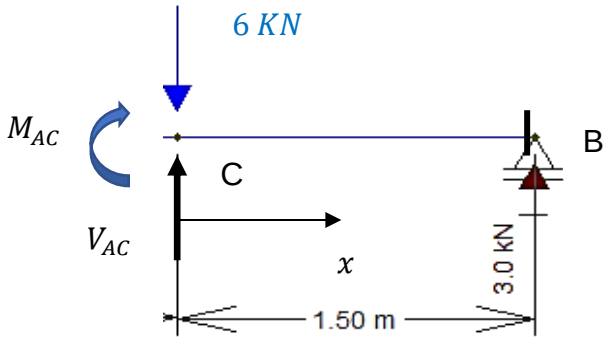
• Esforço normal no trecho AC

$\boldsymbol{N_{AC}} = \int \boldsymbol{p(x)}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N}$ $\rightarrow$ *não existe carga axial concentrada no ponto A e nem distribuída ao longo do trecho AC, logo*

$$\boldsymbol{N_{AC}} = \int 0\,dx + 0 = 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{N_{AC}} = \boldsymbol{0}$$

• **Trecho CB pela esquerda**

Fig. 385- Exemplo1



Fonte: autor

$\boldsymbol{V_{AC}}$ ***e*** $\boldsymbol{M_{AC}} \rightarrow$ ***são os esforços internos produzidos no ponto C devidos ao trecho AC anterior***

• Esforço cortante ($\boldsymbol{V_{CB}}$) no trecho CB

Observe que no trecho CB temos: $q(x) = 0$

$$\begin{pmatrix} C & B \\ 0 \le x \le 1{,}5 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{V_{CB}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'}$ $\Rightarrow$ *aqui o* $\sum \boldsymbol{V'}$ *é o cortante do trecho AC anterior calculado em* $(x = C = 1{,}5\,m)$ *somado a força cortante externa de* $6\,KN$ *aplicada no ponto C, inicio do trecho CB, assim*:

$$\boldsymbol{V_{CB}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int -0\,dx + [V_{AC}(1{,}5) + (-6)] = 0 + (3 - 6) = \boldsymbol{-3\ kN}$$

$\boldsymbol{V_{CB}} = \boldsymbol{-3KN}$ $(constante\ no\ trecho\ CB)$

• Momento fletor $(\boldsymbol{M_{CB}})$ no trecho CB

$$\boldsymbol{M_{CB}} = \int \boldsymbol{V_{CB}}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'}$$

$\rightarrow$ *nesse caso o momento no ponto C é o momento devido ao trecho AC anterior e que é igual ao momento* $\boldsymbol{M_{AC}}$ *calculado no ponto* $(C = x = 1{,}5\ m)$ *final do trecho AC e início do trecho CB, assim:*

$$\boldsymbol{M_{CB}} = \int \boldsymbol{V_{CB}}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M} = \int -3\, dx + M_{AC}(C) = -3x + (3 * 1{,}5)$$

$$= -3x + 4{,}5$$

$$\boldsymbol{M_{CB}} = \boldsymbol{-3x + 4{,}5}$$

• Esforço normal no trecho CB

$$\boldsymbol{N_{CB}} = \int \boldsymbol{p(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N} \Rightarrow\ \boldsymbol{N_{CB}} = \int 0\, dx + N_{CB}(C) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow \quad \boldsymbol{N_{CB} = 0}$$

Podemos também calcular o trecho CB mais facilmente iniciando a análise pela direita (ponto B). Sugerimos ao leitor que faça essa resolução.

• **Construindo os diagramas dos esforços interno**

A) Diagrama de esforço cortante (DEC)

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 \leq x \leq 1{,}5 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{V_{AC} = 3\ kN}$ $(constante\ no\ trech\ AC.$ Não *depende da posição* $X.$ $O\ gráfico$ é *uma reta horizontal.*

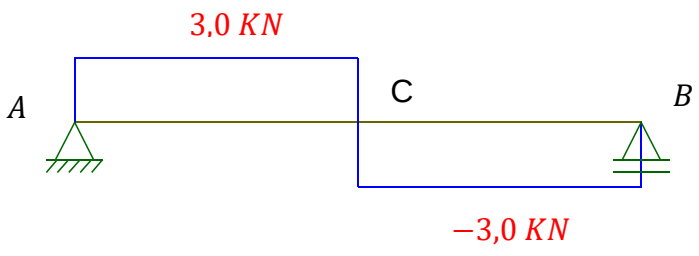
$$\begin{pmatrix} C & B \\ 0 \leq x \leq 1{,}5 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{V_{CB} = -3\ KN}$

• Lembre-se: nas vigas o cortante positivo é desenhado acima do eixo da viga e o cortante negativo abaixo do eixo

DEC

Fig. 386 – Exemplo 1



Fonte: autor

• O salto do cortante de 3 KN para -3KN, no ponto C, indica a presença de carga concentrada nesse ponto cujo valor é: $3 - (-3) = 6\ KN$

• Os candidatos a ponto de momento máximo são as extremidades A e B e o ponto C onde ocorre salto do cortante. Como os momentos nas extremidades são nulos (apoios do 1°e 2° gênero), então o momento de valor máximo $(M_{máx})$ deve ocorrer no ponto C.

• Sendo o momento a integral do cortante, então podemos obter o momento em um ponto qualquer como a soma das áreas dos cortantes até o ponto considerado, por exemplo, o valor do momento máximo é igual a área sob o diagrama do cortante do ponto A até o ponto C do trecho AC.

$M_{máx} = A_{AC} = (1{,}5 * 3) = 4{,}5\ KN.m$

O valor do momento no ponto B, é:

$M_B = A_{AC} - A_{CB} = (1{,}5 * 3) - (1{,}5 * 3) = 0\ KN.m$

($áreas\ abaixo\ do\ eixo\ A_{CB}\ entram\ como$ "negativas")

B) Diagrama do momento fletor (DMF)

$\begin{pmatrix} A & & C \\ 0 \leq x \leq 1{,}5 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{AC} = 3x}$ $(função\ do\ 1°\ grau, o\ gráfico\ é\ uma\ reta\ inclinada)$

• No ponto A, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_A = 3 * 0 = 0\ KN.m}$

• No ponto C (final do trecho AC), temos x = 1,5 m, logo

$\boldsymbol{M_C = 3 * 1{,}5 = 4{,}5\ KN.m}$

$\begin{pmatrix} C & & B \\ 0 \leq x \leq 1{,}5 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{CB} = -3x + 4{,}5}$ $(função\ do\ 1°\ grau, o\ gráfico\ é\ uma\ reta\ inclinada)$

• No ponto C (início do trecho CB) temos x = 0 m, logo

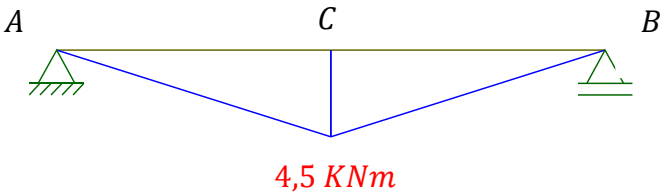
$\boldsymbol{M_C = -3 * 0 + 4{,}5 = 4{,}5\ KN.m}$

• No ponto B, temos x = 1,5 m, logo $\boldsymbol{M_B = -3 * 1{,}5 + 4{,}5 = 0\ KN.m}$

• Lembre-se: nas vigas, o diagrama de momento fletor positivo deve ser desenhado abaixo do eixo e o de momento negativo acima do eixo

DMF

Figura 387 – Exemplo 1



Fonte: autor

C) Diagrama do esforço normal (DEN)

$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 \leq x \leq 1{,}5 \end{pmatrix}$

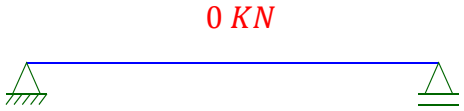
$\boldsymbol{N_{AC} = 0\ KN}$ $(o\ gráfico\ é\ uma\ reta\ horizontal\ coincidente\ com\ o\ eixo\ da\ barra\ em\ AC)$

$\begin{pmatrix} C & B \\ 0 \leq x \leq 1{,}5 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{CB} = 0\ KN}$

DEN

Figura. 388 – Exemplo 1



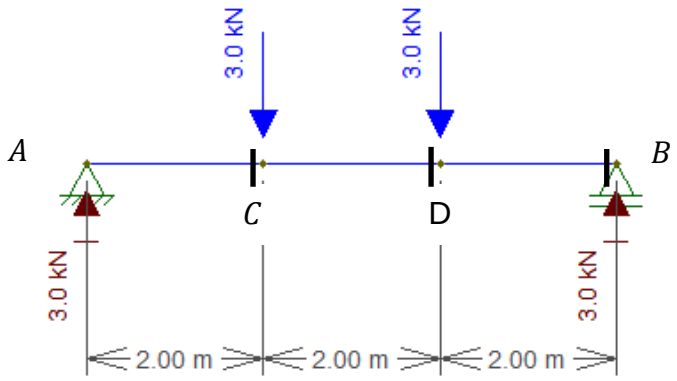
Fonte: autor

Os exercícios a seguir serão resolvidos de modo mais direto para agilizar a resolução

2°) construa os diagramas dos esforços internos para a viga abaixo

DCL final

Figura. 389- Exemplo 2



Fonte: autor

RESP

Os pontos notáveis (aqueles que definem os trechos de análise) são: o ponto A (início de barra), os pontos C e D (pontos de aplicação de cargas concentradas) e o ponto B (término de barra).

Vamos escolher analisar pela esquerda, assim os trechos a serem analisados são: AC, CD e DB indicados na figura acima

•Trecho AC pela esquerda

Observe que nesse trecho q(x) = 0

$$\begin{pmatrix} A & & C \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{AC}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int 0\,dx + V_A = 0 + 3 = 3 \quad \therefore \quad \boldsymbol{V_{AC} = 3\ kN}$$

$$\boldsymbol{M_{AC}} = \int \boldsymbol{V_{AC}}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int \boldsymbol{3}\,\boldsymbol{dx} + 0 = 3x + 0 = 3x \quad \therefore \quad \boldsymbol{M_{AC} = 3x}$$

$$\boldsymbol{N_{AC}} = \int \boldsymbol{p(x)}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} = \int 0\,dx + 0 = 0 \quad \therefore \quad \boldsymbol{N_{AC} = 0\ KN}$$

• Trecho CD pela esquerda

Observe que nesse trecho q(x) = 0

$$\begin{pmatrix} C & & D \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{CD}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int 0\,dx + [\,V_{AC}(C) + (-3)] = 0 + (3-3) = 0\ KN$$

$$\boldsymbol{V_{CD} = 0\ KN}$$

$V_{AC}(C) \rightarrow$ é o cortante do trecho AC anterior calculado em $(x = C = 2m)$ ponto final do trecho AC. Nesse caso V_{AC} é constante e igual a $3\ KN$

$$\boldsymbol{M_{CD}} = \int \boldsymbol{V_{CD}}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int 0\, dx + M_{AC}(C) = 0 + (3 * 2) = 0 + 6 = 6$$

$$\boldsymbol{M_{CD} = 6\ KN.m}$$

$$\boldsymbol{N_{CD}} = \int \boldsymbol{p(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N} = \int 0\, dx + 0 = 0 + 0 = 0 \quad \therefore \quad \boldsymbol{N_{CD} = 0}$$

- **Trecho DB pela esquerda**

Observe que nesse trecho q(x) é zero

$$\begin{pmatrix} D & & B \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{DB}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V} = \int 0\, dx + [V_{CD}(D) - 3] = 0 + (0 - 3) = -3\ KN$$

$$\boldsymbol{V_{DB} = -3\ KN}$$

$V_{CD}(D) \rightarrow$ é o cortante do trecho anterior CD calculado em $X = D$ ponto final do trecho CD. Nesse caso, V_{CD} é constante e igual a ZERO

$$\boldsymbol{M_{DB}} = \int \boldsymbol{V_{DB}}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int -3\, dx + M_{CD}(D) = -3x + (6) \quad \therefore \quad \boldsymbol{M_{DB} = -3x + 6}$$

$$\boldsymbol{N_{DB}} = \int \boldsymbol{p(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} = \int 0\, dx + 0 = 0 + 0 = 0 \quad \therefore \quad \boldsymbol{N_{DB} = 0\ KN}$$

Diagramas dos esforços internos

A) Diagrama de esforço cortante (DEC)

$$\begin{pmatrix} A & & C \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{AC} = 3\ kN}$$

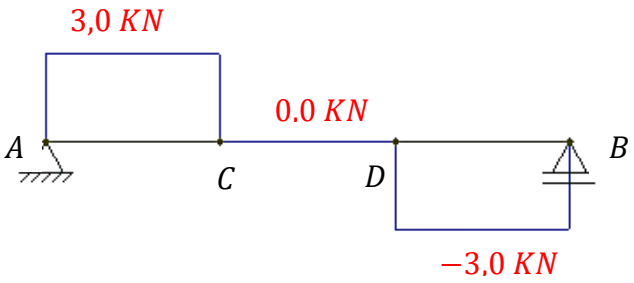
$$\begin{pmatrix} C & & D \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{CD} = 0\ KN}$$

$$\begin{pmatrix} D & & B \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{DB} = -3\ KN}$$

Fig. 390 - Ex. 2



Fonte autor

- Lembre-se: nas vigas o cortante positivo é desenhado acima do eixo e o cortante negativo abaixo do eixo da viga

• Os saltos do cortante nos pontos C e D indicam a presença de cargas concentradas nesses pontos

• Os candidatos a ponto de momento máximo são as extremidades A e B e os pontos C e D onde ocorrem saltos do cortante. Como os momentos nas extremidades são nulos (apoios do 1°e 2° gênero), então o momento de valor máximo $(M_{máx})$ deve ocorrer no ponto C ou D. Aqui na verdade o momento máximo é constante e ocorre ao longo do trecho CD onde o cortante é ZERO

• Sendo o momento a integral do cortante, então podemos obter o momento em um ponto qualquer como a soma das áreas dos cortantes até o ponto considerado.

B) Diagrama do momento fletor (DMF)

$\begin{pmatrix} A & & C \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{AC} = 3x}$

• No ponto A, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_A = 3 * 0 = 0\ KN.m}$

• No ponto C, temos x = 2 m, logo $\boldsymbol{M_C = 3 * 2 = 6\ KN.m}$

$\begin{pmatrix} C & & D \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{CD} = 6\ KN.m}\ (constante\ no\ trecho\ CD)$

$\begin{pmatrix} D & & B \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{DB} = -3x + 6}$

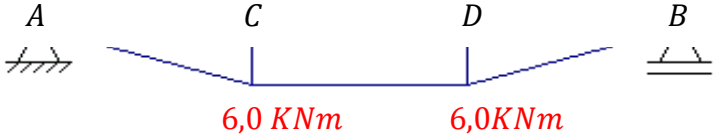
• No ponto D, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_D = 3 * 0 + 6 = 6\ KN.m}$

• No ponto B, temos x = 2 m, logo $\boldsymbol{M_B = -3 * 2 + 6 = 0\ KN.m}$

• Lembre-se: nas vigas, o diagrama de momento fletor positivo deve ser desenhado abaixo do eixo e o de momento negativo acima do eixo

DMF

Fig. 391 – Exemplo 2



Fonte: autor

C) Diagrama do esforço normal (DEN)

$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{AC} = 0\ KN}$

$\begin{pmatrix} C & D \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{CD} = 0\ KN}$

$\begin{pmatrix} D & B \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{DB} = 0\ KN}$

Fig.392 – Exemplo 2



Fonte: autor

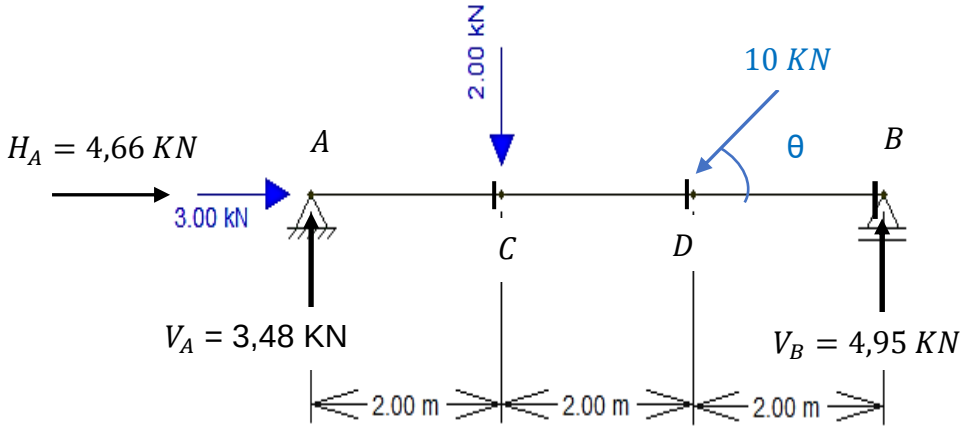
O diagrama é uma reta horizontal coincidente com o eixo da viga

3°) construa os diagramas dos esforços internos para a viga abaixo.

Dado: **θ = 40°**

DCL final

Fig. 393 – Exemplo 3



Fonte: autor

RESP

Os pontos notáveis são: o ponto A (início de barra), os pontos C e D de aplicação de cargas concentradas e o ponto B término de barra.

Vamos escolher analisar pela esquerda, assim os trechos a serem analisados são: AC, CD e DB indicados na figura acima

• **Trecho AC pela esquerda**

$\begin{pmatrix} A & & C \\ 0 \le x \le 2 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{V_{AC}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int -0\,dx + V_A = 0 + 3{,}48 = 3{,}48 \quad \therefore \quad \boldsymbol{V_{AC} = 3{,}48\ KN}$$

$$\boldsymbol{M_{AC}} = \int \boldsymbol{V_{AC}}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int 3{,}48\ dx + 0 = 3{,}48x + 0 \qquad \therefore \qquad \boldsymbol{M_{AC} = 3{,}48x}$$

$$\boldsymbol{N_{AC}} = \int \boldsymbol{p(x)}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} = \int 0\,dx + (-4{,}66 - 3) = 0 - 7{,}66 \quad \therefore \quad \boldsymbol{N_{AC} = -7{,}66KN}$$

($\boldsymbol{N_{AC}}$ *constante no trecho AC e o sinal negativo indica compressão nesse trecho*)

- **Trecho CD pela esquerda**

$\begin{pmatrix} C & & D \\ 0 \le x \le 2 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{V_{CD}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int 0\,dx + [V_{AC}(C) - 2] = 0 + (3{,}48 - 2) = 1{,}48 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{V_{CD} = 1{,}48\ KN}$$

$$\boldsymbol{M_{CD}} = \int \boldsymbol{V_{CD}}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int 1{,}48\ dx + M_{AC}(C) = 1{,}48x + (3{,}48 * 2)$$

$$\boldsymbol{M_{CD} = 1{,}48x + 6{,}96}$$

$$\boldsymbol{N_{CD}} = \int \boldsymbol{p(x)}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} \Rightarrow \boldsymbol{N_{CD}} = \int 0\,dx + N_{AC}(C) = 0 + (-3) = -3 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{N_{CD} = -3\ KN}$$

- **Trecho DB pela esquerda**

$\begin{pmatrix} D & & B \\ 0 \le x \le 2 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{V_{DB}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int 0\,dx + [V_{CD}(D) - 10\sin 40°] = 0 + (1{,}48 - 6{,}43)$$

$$\boldsymbol{V_{DB} = -4{,}95\ KN}$$

$$\boldsymbol{M_{DB}} = \int \boldsymbol{V_{DB}}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int -4{,}95\,dx + M_{CD}(D) = -4{,}95x + (1{,}48 * 2 + 6{,}96) \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{M_{DB} = -4{,}95x + 9{,}92}$$

$$\boldsymbol{N_{DB}} = \int \boldsymbol{p(x)}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N} = \int 0\,dx + [N_{CD}(D) + 10\cos 40°] = 0 + (-7{,}66 + 7{,}66)$$

$$\boldsymbol{N_{DB} = 0\ KN}$$

Diagramas dos esforços internos

A) Diagrama de esforço cortante (DEC)

$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{AC} = 3,48\ kN}$

$\begin{pmatrix} C & D \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{CB} = 1,48\ KN}$

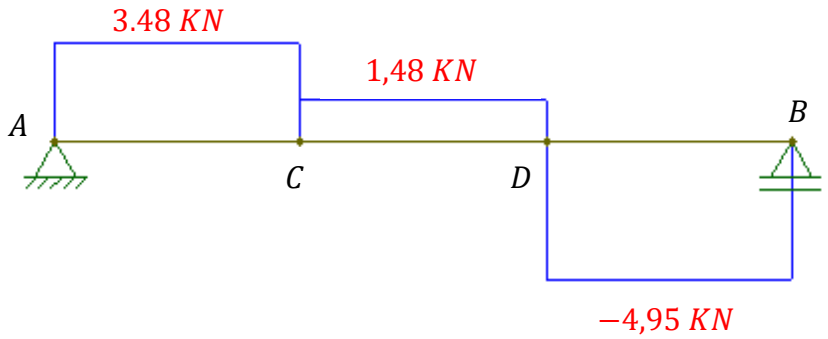
$\begin{pmatrix} D & B \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{DB} = -4,95\ KN}$

• Lembre-se: nas vigas o cortante positivo é desenhado acima do eixo e o cortante negativo abaixo do eixo da viga

DEC

Fig. 394 – Exemplo 3



Fonte: autor

• Observe que o cortante de valor máximo vale (4,95 KN) e ocorre no trecho DB

• Os saltos do cortante nos pontos C e D indicam a presença de cargas concentradas nesses pontos

• Os candidatos a ponto de momento máximo são as extremidades A e B e os pontos C e D onde ocorrem saltos do cortante. Como os momentos nas extremidades são nulos (apoios do 1°e 2° gênero), então o momento de valor máximo ($\boldsymbol{M_{máx}}$) deve ocorrer no ponto C ou D

• Sendo o momento a integral do cortante, então podemos obter o momento em um ponto qualquer como a soma das áreas dos cortantes até o ponto considerado (pela esquerda).

B) Diagrama do momento fletor (DMF)

$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{AC} = 3,48x}$

• No ponto A, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_A = 3{,}48 * 0 = 0\ KN.m}$

• No ponto C, temos x = 2 m, logo $\boldsymbol{M_C = 3{,}48 * 2 = 6{,}96\ KN.m}$

$\begin{pmatrix} C & D \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{CD} = 1{,}48x + 6{,}96}$

• No ponto C, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_C = 1{,}48 * 0 + 6{,}96 = 6{,}96\ KN.m}$

• No ponto D, temos x = 2 m, logo $\boldsymbol{M_D = 1{,}48 * 2 + 6{,}96 = 9{,}92\ KN.m}$

$\begin{pmatrix} D & B \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{DB} = -4{,}95x + 9{,}92}$

• No ponto D, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_D = -4{,}95 * 0 + 9{,}92 = 9{,}92\ KN.m}$

•No ponto B, temos x = 2 m, logo $\boldsymbol{M_B = -4{,}95 * 2 + 9{,}92 = 0\ KN.m}$

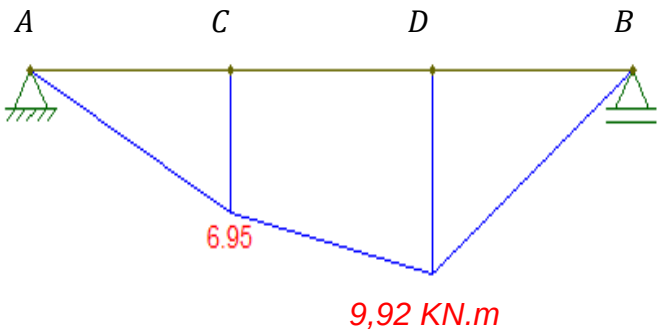
$(a\ diferença\ mínima\ de\ (0{,}02)\ no\ resultado\ deve - se\ aos\ arredondamentos)$

Portanto, o momento de valor máximo ocorre no ponto D

• Lembre-se: nas vigas, o diagrama de momento fletor positivo deve ser desenhado abaixo do eixo e o de momento negativo acima do eixo

DMF

Fig. 395 – exemplo 3



Fonte: autor

C) Diagrama do esforço normal (DEN)

$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{AC} = -3\ KN}$

$\begin{pmatrix} C & D \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{CD} = -3\ KN}$

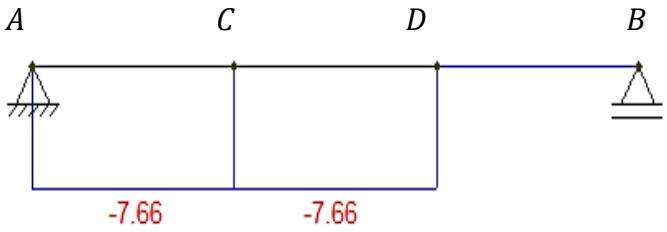
$\begin{pmatrix} D & B \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{DB} = 4,66\ KN}$

Lembre-se: nas vigas o esforço normal positivo é desenhado acima do eixo e o negativo abaixo do eixo.

DEN

Fig. 396 - Exemplo 3



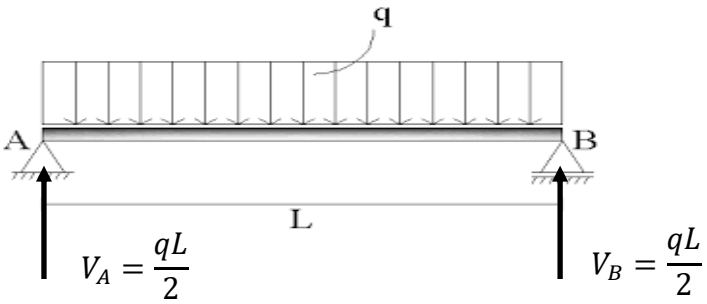
Fonte: autor

• Observe que o esforço normal máximo é de compressão e ocorre do ponto A até o ponto D ($N_{máx} = N_{AC} = N_{DB} = -7{,}66\ KN$)

10.10 Diagramas de esforços internos para vigas exclusivamente sob carregamento uniformemente distribuído

Observe o DCL final da viga na figura abaixo exclusivamente sob um carregamento (q) uniformemente distribuído ao longo do seu comprimento L

Figura. 397



Fonte: adaptado de xdocs.com.br

RESP

Os pontos notáveis são: o ponto A (início de barra) e o ponto B (término de barra). Assim o único trecho a ser analisado é o trecho AB e vamos escolher analisar pela esquerda

Esforço cortante:

$$\begin{pmatrix} A & & B \\ 0 \leq x \leq L \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{AB}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int -q\, dx + V_A = -q * x + \frac{q * L}{2} = \frac{-2qx + qL}{2} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{V_{AB}} = \frac{q(-2x + L)}{2}$$

• No ponto A, temos x = 0, logo

$$\boldsymbol{V_A} = \frac{q(-2 * 0 + L)}{2} = \frac{\boldsymbol{q * L}}{\boldsymbol{2}}$$

• Ponto onde o cortante se anula ($V_{AB} = 0$) interceptando o eixo da viga AB

$$\boldsymbol{V_A} = \frac{q(-2x + L)}{2} = 0 \quad \rightarrow quando\ (-2x + L) = 0, ou\ seja, quando\ x = \frac{L}{2}$$

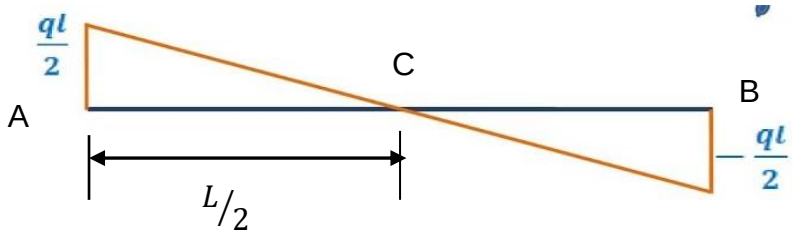
• No ponto B, temos x = L, logo

$$\boldsymbol{V_B} = \frac{q(-2 * L + L)}{2} = \frac{\boldsymbol{-q * L}}{\boldsymbol{2}}$$

DEC

• Lembre-se: nas vigas o cortante positivo é desenhado acima do eixo e o cortante negativo abaixo do eixo da viga

Figura. 398 DEC (viga exclusivamente sob carreg. Uniformemente distribuído)



Fonte: adaptado de youtube.com

•Momento fletor:

$$\begin{pmatrix} A & & B \\ 0 \leq x \leq L \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M_{AB}} = \int \boldsymbol{V_{AB}}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int \frac{q(-2x + L)}{2}\, dx + M_A = \frac{q}{2} \int (-2x + L)\, dx + 0 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{M_{AB}} = \frac{q}{2}\left(-\frac{2x^2}{2} + Lx\right) = \frac{q}{2}(-x^2 + Lx) \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{M_{AB}} = \frac{\boldsymbol{qx(L-x)}}{\boldsymbol{2}}$$

• No ponto A temos $x = 0$, logo:

$$\boldsymbol{M_A} = \frac{q * 0(L-0)}{2} = \boldsymbol{0}$$

• No ponto B, temos x = L, logo:

$$\boldsymbol{M_B} = \frac{q * L(L-L)}{2} = \boldsymbol{0}$$

Sabendo que o cortante é a derivada do momento vamos aplicar o Método do Intervalo Fechado (MIF) para encontrar o valor do momento máximo ($\boldsymbol{M_{máx}}$), logo:

$\boldsymbol{V_{AB}} = \boldsymbol{M'_{AB}} = \frac{q(-2x+L)}{2} = \frac{q(L-2x)}{2}$, *a derivada existe para todo x pertencente ao intervalo* $]AB[$, *logo os únicos números críticos ocorrem nos pontos onde a derivada* (*cortante* V_{AB}) é $ZERO$, *assim temos*:

$$\boldsymbol{V_{AB}} = \frac{q(L-2x)}{2} = 0, \qquad quando \;\; (L-2x) = 0 \;\Rightarrow\; -2x = -L \;\Rightarrow \boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{2}}$$

Testando a função $\boldsymbol{M_{AB}}$ nos extremos **A** e **B** do intervalo e no número crítico $\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{2}}$, temos:

$\boldsymbol{M_{AB}} = \frac{\boldsymbol{qx(L-x)}}{\boldsymbol{2}}$, $\boldsymbol{logo}$:

• Para o Ponto A→ x = 0 m

$$\boldsymbol{M_{AB}}(\boldsymbol{0}) = \frac{q * 0(L-0)}{2} = \boldsymbol{0}$$

• Para o Ponto C, no meio da viga, temos → x = L/2 m

$$\boldsymbol{M_{AB}}\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{q * \frac{L}{2}(L - \frac{L}{2})}{2} = \frac{\frac{qL}{2} * \frac{L}{2}}{2} = \frac{\frac{q * L^2}{4}}{2} = \frac{qL^2}{4} * \frac{1}{2} = \frac{\boldsymbol{qL^2}}{\boldsymbol{8}}$$

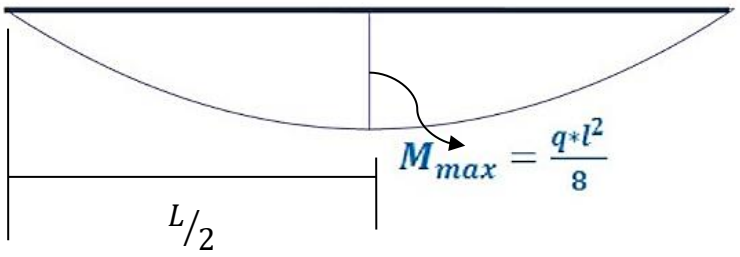
Para o Ponto **B→ x = L m,** temos**:**

$$\boldsymbol{M_{AB}}(L) = \frac{qLx - qx^2}{2} = \frac{qL * L - q * L^2}{2} = \frac{qL^2 - qL^2}{2} = \boldsymbol{0}$$

DMF

• Lembre-se: nas vigas, o diagrama de momento fletor positivo deve ser desenhado abaixo do eixo e o de momento negativo acima do eixo

Fig. 299- DMF (viga exclusivamente sob carreg. Uniformemente distribuído**)**



Fonte: adaptado de youtube.com

Analisando os resultados observamos que para uma viga simplesmente apoiada sujeita exclusivamente a um carregamento uniforme distribuído ao longo de seu comprimento, temos:

A) o cortante de valor máximo ($V_{máx}$) ocorre nos apoios sendo que no meio do vão onde o diagrama, uma reta inclinada, intercepta o eixo da viga o cortante é zero **(ver fig. 400)**

$$\boldsymbol{V_{máx} = V_A = \frac{q * L}{2} \quad ou \quad V_{máx} = V_B = -\frac{q * L}{2}}$$

B) O diagrama do momento é uma parábola com a concavidade para cima, sendo que o momento nos apoios é nulo e o momento de valor máximo ($\boldsymbol{M_{máx}}$) ocorre no meio do vão e vale:

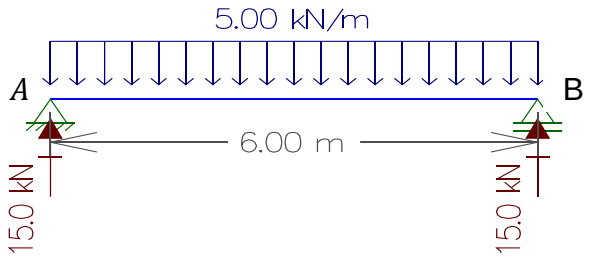
$$\boldsymbol{M_{máx} = \frac{qL^2}{8} \quad em \quad x = \frac{L}{2}}$$

C) O esforço normal é nulo, pois não existem cargas axiais externas atuando na viga

Exemplos

1°) construa os diagramas dos esforços internos para a viga abaixo

Figura 400- Exemplo 1



Fonte:internet(guiadaengenharia.com)

RESP

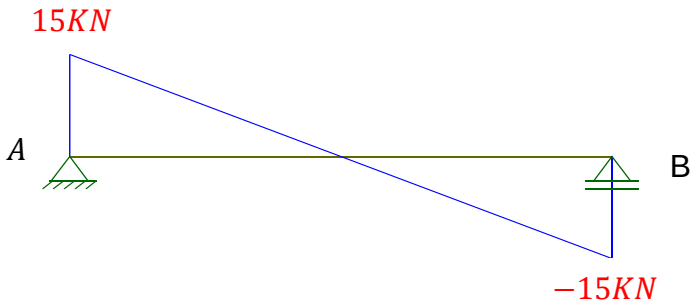
Para esse caso particular sabemos que:

A) Os cortantes de valores máximos ($\boldsymbol{V_A}$) e ($\boldsymbol{V_B}$) são as reações de apoios e calculadas pelas expressões abaixo. Para construir o diagrama de esforço cortante traçamos um segmento de reta vertical para cima pelo apoio A representando o cortante V_A e um segmento para baixo pelo apoio B representando o cortante V_B em seguida traçamos uma reta inclinada ligando o cortante V_A ao cortante V_B e interceptando o eixo da viga no meio do vão

• $\boldsymbol{V_A = \frac{qL}{2} = \frac{5 * 6}{2} = 15\ KN}$ $\quad e \quad$ $\boldsymbol{V_B = -V_A = -15\ KN}$

DEC

Figura 401 Exemplo 1



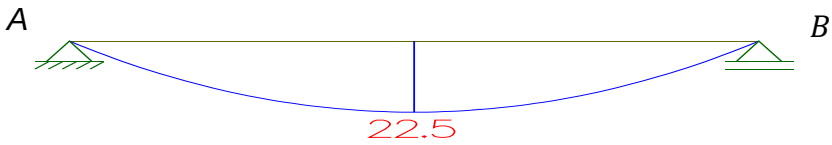
Fonte: autor

DMF (KN.m)

B) Os momentos nos apoios são nulos, o diagrama é uma parábola voltada para cima e o momento de valor máximo ($\boldsymbol{M_{máx}}$) ocorre no meio da viga e vale:

$$\boldsymbol{M_{máx} = \frac{qL^2}{8} = \frac{5 * 6^2}{8} = 22,50KN.m} \quad (no\ meio\ da\ viga)$$

Figura 402 - Exemplo 1



Fonte: autor

C) O esforço normal é nulo, pois não existem cargas axiais externas atuando na viga

$\boldsymbol{N_{AB} = 0\ KN}$

DEN (KN)

Figura 403 – Exemplo 1



Fonte: autor

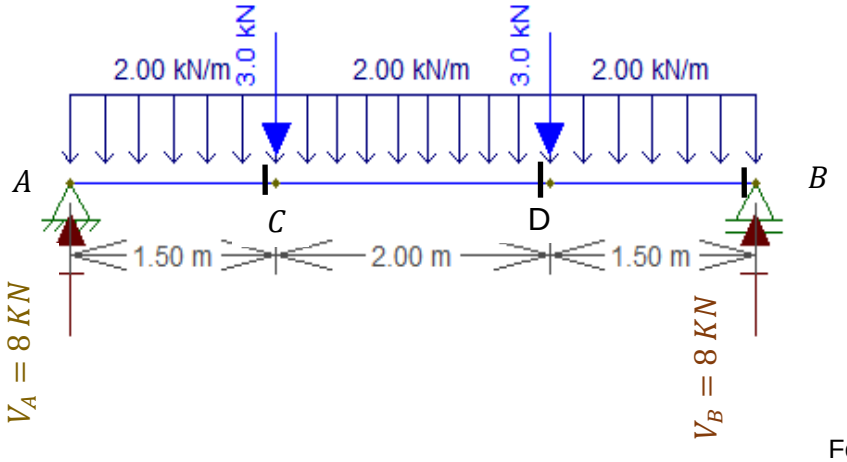
10.11 Diagramas de esforços internos para vigas sob carregamento

Acompanhe a resolução dos exemplos a seguir

1°) construa os diagramas dos esforços internos para a viga abaixo

DCL final

Fig. 404 – Exemplo1



Fonte: autor

RESP

Os pontos notáveis são: o ponto A (início de barra), os pontos C e D (pontos de aplicação de cargas concentradas) e o ponto B (término de barra). Assim analisando pela esquerda os trechos a serem analisados são AC, CD e DB indicados na figura anterior, logo

•Trecho AC pela esquerda

$$\begin{pmatrix} A & & C \\ 0 \leq x \leq 1{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{AC}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\ \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int -2\ dx + V_A = -2x + 8 \quad \therefore \quad \boldsymbol{V_{AC}} = \boldsymbol{-2x + 8}$$

$$\boldsymbol{M_{AC}} = \int \boldsymbol{V_{AC}}\ \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int (-2x + 8)\ dx + 0 = \frac{-2x^2}{2} + 8x + 0 = -x^2 + 8x \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{M_{AC}} = \boldsymbol{-x^2 + 8x}$$

$$\boldsymbol{N_{AC}} = \int \boldsymbol{p(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{N_{AC}} = \boldsymbol{0\ KN}\ (\textit{não existem cargas axiais aplicadas})$$

•Trecho CD pela esquerda

$$\begin{pmatrix} C & & D \\ 0 \le x \le 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{CD}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int -2\, dx + [V_{AC}(C) - 3] = -2x + \ [(-2 * 1{,}5 + 8) - 3]$$

$$\boldsymbol{V_{CD}} = \boldsymbol{-2x + 2}$$

$$\boldsymbol{M_{CD}} = \int \boldsymbol{V_{CD}}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int (-2x + 2)\ dx + M_{AC}(C) \;\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{M_{CD}} = \frac{-2x^2}{2} + 2x + [(-1{,}5^2 + 8 * 1{,}5)] \;\Rightarrow\; \boldsymbol{M_{CD}} = \boldsymbol{-x^2 + 2x + 9{,}75}$$

$$\boldsymbol{N_{CD}} = \int \boldsymbol{p(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{N_{CD}} = \boldsymbol{0\ KN}\ (\textit{não existem cargas axiais aplicadas})$$

•Trecho DB pela esquerda

$$\begin{pmatrix} D & & B \\ 0 \le x \le 1{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{DB}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int -2dx + [V_{CD}(D) - 3] = -2x + [(-2 * 2 + 2) - 3]$$

$$\boldsymbol{V_{DB}} = \boldsymbol{-2x - 5}$$

$$\boldsymbol{M_{DB}} = \int \boldsymbol{V_{DB}}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int (\boldsymbol{-2x - 5})\, dx + M_{CD}(D) \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{M_{DB}} = \frac{-2x^2}{2} - 5x + [(-2^2 + 2 * 2 + 9{,}75)] \;\Rightarrow\; \boldsymbol{M_{DB}} = \boldsymbol{-x^2 - 5x + 9{,}75}$$

$$\boldsymbol{N_{DB}} = \int \boldsymbol{p(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{N_{DB}} = \boldsymbol{0\ KN}\ (\textit{não existem cargas axiais aplicadas})$$

Diagramas dos esforços internos

A) Diagrama de esforço cortante (DEC)

$$\begin{pmatrix} A & & C \\ 0 \le x \le 1{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{AC}} = \boldsymbol{-2x + 8}$$

• No ponto A, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{V_A} = -2 * 0 + 8 \ = \boldsymbol{8\ KN}$

• No ponto C, temos x = 1,5 m, logo $\boldsymbol{V_C} = -2 * 1{,}5 + 8 = \boldsymbol{5\ KN.m}$

$$\begin{pmatrix} C & & D \\ 0 \le x \le 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{CD}} = \boldsymbol{-2x + 2}$$

• No ponto C, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{V_C = -2 * 0 + 2 = 2\ KN}$

• No ponto D, temos x = 2 m, logo $\boldsymbol{V_D = -2 * 2 + 2 = -2\ KN}$

$\begin{pmatrix} D & B \\ 0 \leq x \leq 1{,}5 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{DB} = -2x - 5}$

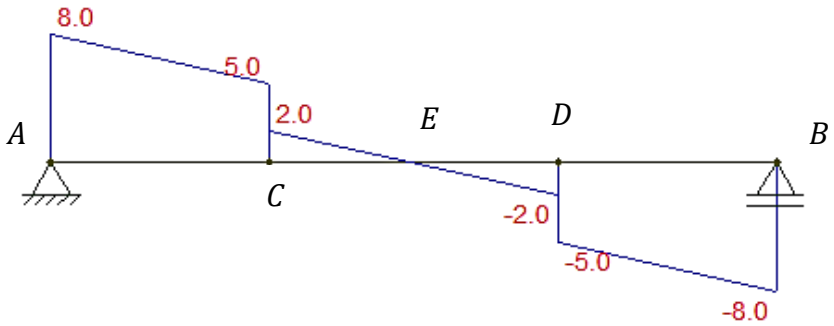
• No ponto D, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{V_D = -2 * 0 - 5 = -5\ KN}$

• No ponto B, temos x = 1,5 m, logo $\boldsymbol{V_B = -2 * 1{,}5 - 5 = -8\ KN}$

• Lembre-se: nas vigas o cortante positivo é desenhado acima do eixo e o cortante negativo abaixo do eixo da viga

DEC (KN)

Fig. 405 - Exemplo 1



Fonte: autor

• Observe que cortante máximo ocorreu sobre os apoios

• Os saltos no DEC, no ponto C de 5 KN para 2 KN e no ponto D de -2 KN para -5 KN, indicam a presença de cargas concentradas nesses pontos

• Os candidatos a ponto de momento máximo são as extremidades A e B, os pontos C e D onde ocorrem saltos no cortante e o ponto E onde $(V_{CD} = 0)$ e intercepta o eixo da viga. Como os momentos nas extremidades são nulos (apoios do 1°e 2° gênero), então o momento de valor máximo $(\boldsymbol{M_{máx}})$ pode ocorrer no ponto C, E ou D. Observe que os pontos C, E e D pertencem ao trecho CD, logo podemos encontrar o $\boldsymbol{M_{máx}}$ substituindo as ordenadas desses pontos na função $\boldsymbol{M_{CD}}$

• Sendo o momento a integral do cortante, então podemos obter o momento em um ponto qualquer como a soma das áreas dos cortantes até o ponto considerado.

B) Diagrama do momento fletor (DMF)

$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 \leq x \leq 1{,}5 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{AC} = -x^2 + 8x}$

• No ponto A, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_A} = -0^2 + 8 * 0 \ = \boldsymbol{0\ KN.m}$

• No ponto C, temos x = 1,5 m, logo $\boldsymbol{M_C} = -1{,}5^2 + 8 * 1{,}5 = \boldsymbol{9{,}75\ KN.m}$

$\begin{pmatrix} C & & D \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{CD} = -x^2 + 2x + 9{,}75}$

• No ponto C, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_{CD}}(C) = -0^2 + 2 * 0 + 9{,}75 = \boldsymbol{9{,}75\ KN.m}$

• No ponto E onde V_{CD} é ZERO temos (x = 1m→ meio do trecho CD), logo:

$\boldsymbol{M_{CD}}(E) = -1^2 + 2 * 1 + 9{,}75 = \boldsymbol{10{,}75\ KN.m}$

• No ponto D, temos x = 1,5 m, logo

$\boldsymbol{M_{CD}}(D) = -2^2 + 2 * 2 + 9{,}75 = \boldsymbol{9{,}75 KN.m}$

Portanto, o momento de valor máximo ocorre no ponto E

$\begin{pmatrix} D & & B \\ 0 \leq x \leq 1{,}5 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{DB} = -x^2 - 5x + 9{,}75}$

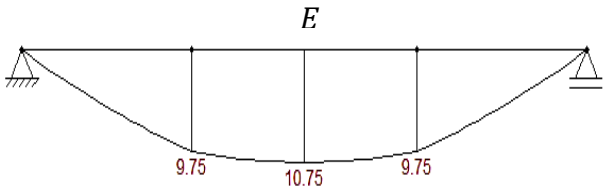
• No ponto D, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_D} = -0^2 + 5 * 0 + 9{,}75 = \boldsymbol{9{,}75\ KN.m}$

• No ponto B, temos x = 1,5 m, logo $\boldsymbol{M_B} = -1{,}5^2 - 5 * 1{,}5 + 9{,}75 = \boldsymbol{0\ KN.m}$

• Lembre-se: nas vigas, o diagrama de momento fletor positivo deve ser desenhado abaixo do eixo e o de momento negativo acima do eixo

DMF (kN.m)

Fig. 406 – Exemplo1



Fonte: autor

C) Diagrama do esforço normal DEN (KN)

$\boldsymbol{N_{AC} = N_{CD} = N_{DB} = 0\ KN}$

Fig. 407 – Exemplo 1

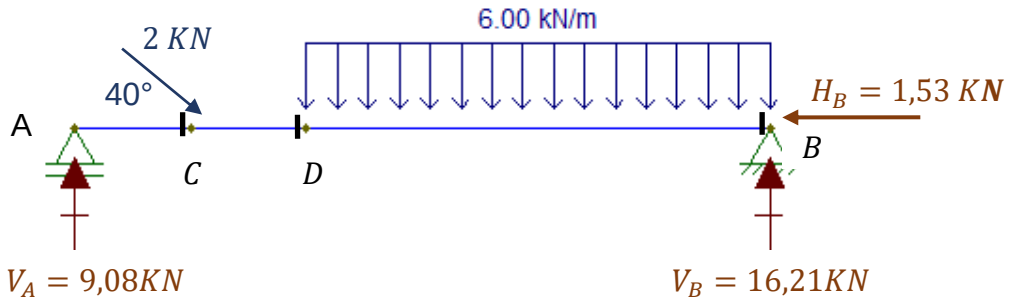


Fonte: autor

2°) construa os diagramas dos esforços internos para a viga abaixo

DCL final

Fig. 408 – Exemplo 2



Fonte: autor

RESP

Os pontos notáveis são: o ponto A (início de barra), o ponto C (ponto de aplicação de carga concentrada), o ponto D (início de carregamento distribuído e o ponto B (término de barra).

Vamos escolher analisar pela esquerda, assim os trechos a serem analisados são AC, CD e DB indicados na figura acima

•Trecho AC pela esquerda

$$\begin{pmatrix} A & & C \\ 0 \le x \le 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{AC}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int -0\,dx + V_A = 0 + 9{,}08 \Rightarrow \qquad \boldsymbol{V_{AC} = 9{,}08\ KN}$$

$$\boldsymbol{M_{AC}} = \int \boldsymbol{V_{AC}}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int 9{,}08\,dx + 0 = 9{,}08x \Rightarrow \qquad \boldsymbol{M_{AC} = 9{,}08x}$$

$$\boldsymbol{N_{AC}} = \int \boldsymbol{p(x)}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} \Rightarrow \qquad \boldsymbol{N_{AC} = 0\ KN}$$

•Trecho CD pela esquerda

$$\begin{pmatrix} C & & D \\ 0 \le x \le 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{CD}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int -0\,dx + [V_{AC}(C) - 2\sin 40°\,] = 0 + \ (9{,}08 - 1.29)$$

$$\boldsymbol{V_{CD} = 7{,}79\ KN}$$

$$\boldsymbol{M_{CD}} = \int \boldsymbol{V_{CD}}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int 7{,}79\,dx + M_{AC}(C) = 7{,}79x + (9{,}08 * 1) \ \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{M_{CD} = 7,79x + 9,08}$$

$$\boldsymbol{N_{CD}} = \int \boldsymbol{p(x)\, dx} + \sum \boldsymbol{N'} = \int 0\, dx + (-2\cos 40°) = 0 - 1{,}53 \;\; \therefore \;\; \boldsymbol{N_{CD} = -1,53\ KN}$$

(note que a componente horizontal $2\cos 40°$ da carga concentrada aplicada no ponto C é de compressão, por isso, entrou como negativa na equação de N_{CD})

•Trecho DB pela esquerda

$$\begin{pmatrix} D & & B \\ 0 \leq x \leq 4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{DB}} = \int \boldsymbol{-q(x)\, dx} + \sum \boldsymbol{V'} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{V_{DB}} = \int -6\, dx + V_{CD}(D) = -6x + 7{,}79 \;\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{V_{DB} = -6x + 7,79}$$

$$\boldsymbol{M_{DB}} = \int \boldsymbol{V_{DB}\, dx} + \sum \boldsymbol{M} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{M_{DB}} = \int (\boldsymbol{-6x + 7,79})\, dx + M_{CD}(D) \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{M_{DB}} = \frac{-6x^2}{2} + 7{,}79x + (7{,}79 * 1 + 9{,}08) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{M_{DB} = -3x^2 + 7,79x + 16,87}$$

$$\boldsymbol{N_{DB}} = \int \boldsymbol{-p(x)\, dx} + \sum \boldsymbol{N} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{N_{DB}} = \int 0\, dx + N_{CD}(D) = 0 + (-1{,}53)$$

$$\boldsymbol{N_{DB} = -1,53\ KN}$$

Diagramas de esforços internos

A) Diagrama de esforço cortante (DEC)

$$\begin{pmatrix} A & & C \\ 0 \leq x \leq 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{AC} = 9,08\ KN}$$

$$\begin{pmatrix} C & & D \\ 0 \leq x \leq 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{CD} = 7,79\ KN}$$

$$\begin{pmatrix} D & & B \\ 0 \leq x \leq 4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{DB} = -6x + 7,79}$$

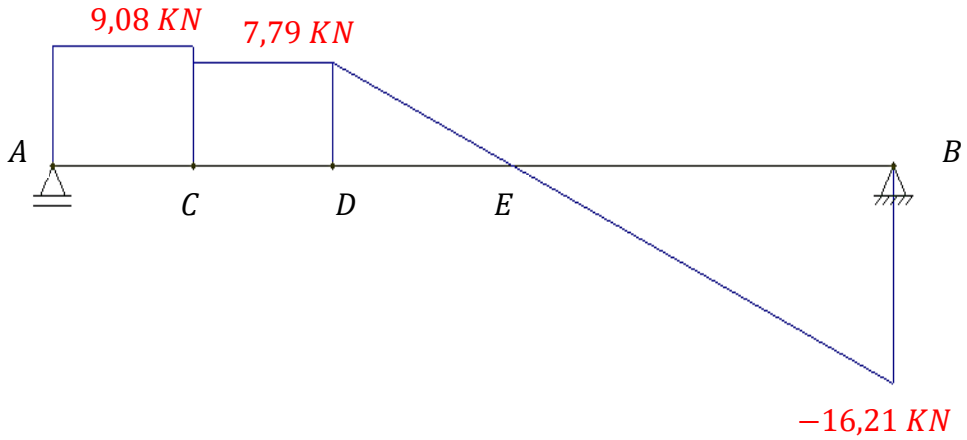
• No ponto D, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{V_D = -6 * 0 + 7{,}79 = 7,79\ KN}$

• No ponto B, temos x = 4 m, logo $\boldsymbol{V_B = -6 * 4 + 7{,}79 = -16,21\ KN}$

• Lembre-se: nas vigas o cortante positivo é desenhado acima do eixo e o cortante negativo abaixo do eixo da viga

DEC

Fig. 409- exemplo 2



Fonte: autor

• Observe que cortante de valor máximo ocorreu no apoio B

• O salto do cortante no ponto C indica a presença de carga concentrada nesse ponto e a reta inclinada no trecho DB indica um carregamento unif. distribuído nesse trecho

• Os candidatos a ponto de momento máximo são as extremidades A e B, o ponto C (salto), o ponto D (bico) e o ponto E onde $(V_{DB} = 0)$. Como os momentos nas extremidades são nulos (apoios do 1°e 2° gênero), então o momento de valor máximo $(\boldsymbol{M_{máx}})$ pode ocorrer no ponto C, D ou E.

• Sendo o momento a integral do cortante, então podemos obter o momento em um ponto qualquer como a soma das áreas dos cortantes até o ponto considerado (pela esquerda).

B) Diagrama do momento fletor (DMF)

$$\begin{pmatrix} A & & C \\ 0 \leq x \leq 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M_{AC} = 9,08x}$$

• No ponto A, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_A} = 9{,}08 * 0 = \boldsymbol{0\ KN.m}$

• No ponto C, temos x = 1 m, logo $\boldsymbol{M_C} = 9{,}08 * 1 = \boldsymbol{9,08\ KN.m}$

$$\begin{pmatrix} C & & D \\ 0 \leq x \leq 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M_{CD} = 7,79x + 9,08}$$

• No ponto C, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_C} = 7{,}79 * 0 + 9{,}08 = \mathbf{9{,}08\ KN.m}$

• No ponto D, temos x = 1,5 m, logo $\boldsymbol{M_D} = 7{,}79 * 1 + 9{,}08 = \mathbf{16{,}87\ KN.m}$

$\begin{pmatrix} D & & B \\ 0 \leq x \leq 4 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{DB} = -3x^2 + 7{,}79x + 16{,}87}$

• No ponto D, temos x = 0 m, logo

$\boldsymbol{M_D} = -3 * 0^2 + 7{,}79 * 0 + 16{,}87 = \mathbf{16{,}87\ KN.m}$

• No ponto E do trecho DB, onde o cortante V_{DB} é ZERO (x = 1,3 m), temos:

$\boldsymbol{M_E} = -3 * (1{,}3)^2 + 7{,}79 * 1{,}3 + 16{,}87 = \mathbf{21{,}93\ KN.m}$

• No ponto B, temos x = 4 m, logo $\boldsymbol{M_B} = -3 * 4^2 + 7{,}79 * 4 + 16{,}87 = \mathbf{0\ KN.m}$

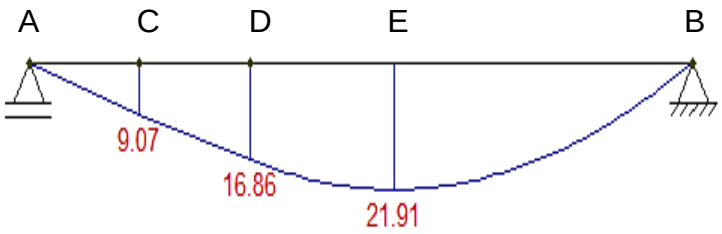
Portanto, o momento de valor máximo ocorre no ponto E.

• Lembre-se: nas vigas, o diagrama de momento fletor positivo deve ser desenhado abaixo do eixo e o de momento negativo acima do eixo

• Nos trechos AC e CD o diagrama do momento é formado por dois segmentos de reta, pois as funções $M_{AC}\ e\ M_{CD}$ são do primeiro grau. Do ponto D até B o diagrama é uma parábola.

DMF (KN.m)

Fig. 410 – Exemplo 2



Fonte; autor

C) Diagrama do esforço normal (DEN)

$\begin{pmatrix} A & & C \\ 0 \leq x \leq 1 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{AC} = 0\quad KN}$

$\begin{pmatrix} C & & D \\ 0 \leq x \leq 1 \end{pmatrix}$

$$N_{CD} = -1,53\ KN$$

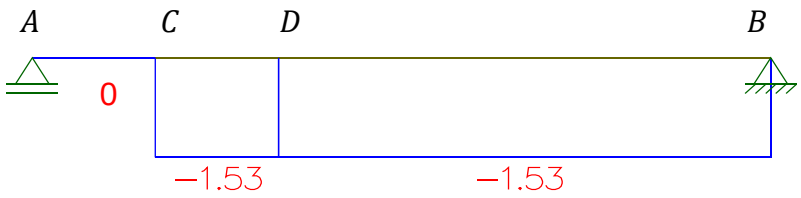
$$\begin{pmatrix} D & & B \\ 0 \leq x \leq 4 & & \end{pmatrix}$$

$$N_{DB} = -1,53\ KN$$

Lembre-se: nas vigas o esforço normal positivo é desenhado acima do eixo e o negativo abaixo do eixo.

DEC (KN)

Fig. 411 – Exemplo 2

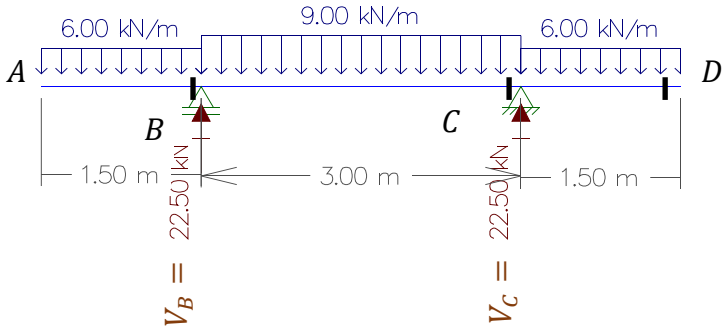


Fonte: autor

3°) construa os diagramas dos esforços internos para a viga abaixo

DCL final

Fig. 412 – Exemplo 3



Fonte: autor

RESP

Iniciando a análise pela esquerda observa-se que os pontos notáveis são: o ponto A (início de barra), o ponto B (fim de carregamento de distribuído), o ponto C (fim de carregamento distribuído) e o ponto D (término de barra), assim os trechos a serem analisados são AB, BC e CD indicados na figura acima

•Trecho AB pela esquerda

$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 \le x \le 1{,}5 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{AB} = \int -q(x)\, dx + \sum V' \Rightarrow V_{AB} = \int -6\, dx + 0 = -6x \Rightarrow V_{AB} = -6x}$

$\boldsymbol{M_{AB} = \int V_{AB}\, dx + \sum M' = \int -6x\, dx + 0 = \frac{-6x^2}{2} \Rightarrow M_{AB} = -3x^2}$

$\boldsymbol{N_{AB} = \int p(x)\, dx + \sum N' \Rightarrow N_{AB} = 0\ KN}$

•Trecho BC pela esquerda

$\begin{pmatrix} B & C \\ 0 \le x \le 3 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{BC} = \int -q(x)\, dx + \sum V' = \int -9\, dx + [V_{AB}(B) + V_B] \Rightarrow -9x + [(-6 * 1{,}5) + 22{,}5]}$

$\boldsymbol{V_{BC} = -9x + 13{,}5}$

$\boldsymbol{M_{BC} = \int V_{BC}\, dx + \sum M' = \int (-9x + 13{,}5)\, dx + M_{AB}(B)}$

$\boldsymbol{M_{BC} = \frac{-9x^2}{2} + 13{,}5x + (-3 * 1{,}5^2) \Rightarrow M_{BC} = -4{,}5x^2 + 13{,}5x - 6{,}75}$

$\boldsymbol{N_{BC} = \int p(x)\, dx + \sum N' \Rightarrow N_{BC} = 0\ KN}$

•Trecho CD pela esquerda

$\begin{pmatrix} C & D \\ 0 \le x \le 1{,}5 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{CD} = \int -q(x)\, dx + \sum V' = \int -6\, dx + [V_{BC}(C) + V_C] \Rightarrow}$

$\boldsymbol{V_{CD} = -6x + [(-9 * 3 + 13{,}5) + 22{,}5] \Rightarrow V_{CD} = -6x + 9}$

$\boldsymbol{M_{CD} = \int V_{CD}\, dx + \sum M \Rightarrow M_{CD} = \int (-6x + 9)\, dx + M_{BC}(C) \Rightarrow}$

$\boldsymbol{M_{CD} = \frac{-6x^2}{2} + 9x + (-4{,}5 * 3^2 + 13{,}5 * 3 - 6{,}75) \Rightarrow M_{CD} = -3x^2 + 9x - 6{,}75}$

$\boldsymbol{N_{CD} = \int -p(x)\, dx + \sum N \Rightarrow N_{CD} = 0\ KN}$ $(não\ existe\ carga\ axial\ concentrada\ e\ nem\ distribuída)$

Diagramas de esforços internos

A) Diagrama de esforço cortante (DEC)

$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 \le x \le 1{,}5 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{AB} = -6x}$

• No ponto A, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{V_A = -6 * 0 = 0\ KN}$

• No ponto B, temos x = 1,5 m, logo $\boldsymbol{V_B = -6 * 1{,}5 = -9\ KN}$

$\begin{pmatrix} B & C \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{BC} = -9x + 13{,}5}$

• No ponto B, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{V_B = -9 * 0 + 13{,}5 = 13{,}5\ KN}$

• No ponto C, temos x = 3 m, logo $\boldsymbol{V_C = -9 * 3 + 13{,}5 = -13{,}5\ KN}$

$\begin{pmatrix} C & D \\ 0 \leq x \leq 1{,}5 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{CD} = -6x + 9}$

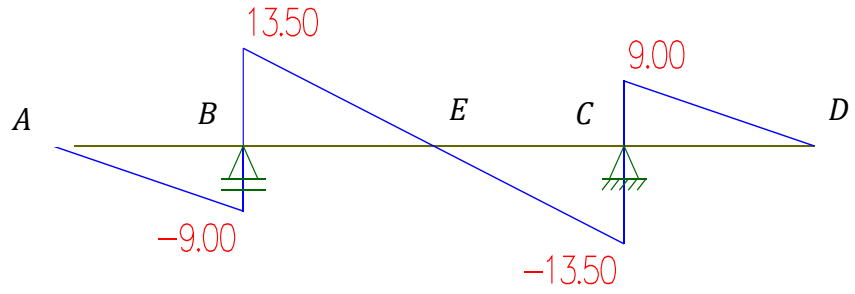
• No ponto C, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{V_C = -6 * 0 + 9 = 9\ KN}$

• No ponto C, temos x = 3 m, logo $\boldsymbol{V_C = -6 * 3 + 9 = -9\ KN}$

• Lembre-se: nas vigas o cortante positivo é desenhado acima do eixo e o cortante negativo abaixo do eixo da viga

DEC (KN)

Fig. 413 – Exemplo 3



Fonte: autor

• Observe que o cortante de valor máximo ocorre nos apoios B e C

• Os candidatos a ponto de momento máximo são as extremidades A e D, os pontos B e C onde ocorrem saltos do cortante e o ponto E onde o cortante $(V_{BC} = 0)$ e intercepta o eixo da viga. Como os momentos em extremidades livres são nulos (A e D), então o momento de valor máximo $(\boldsymbol{M_{máx}})$ pode ocorrer no ponto B, E ou C do trecho BC

• Sendo o momento a integral do cortante, então podemos obter o momento em um ponto qualquer como a soma das áreas dos cortantes até o ponto considerado (pela esquerda).

B) Diagrama do momento fletor (DMF)

$\begin{pmatrix} A & & B \\ 0 \leq x \leq 1{,}5 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{M_{AB} = -3x^2}$$

• No ponto A, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_{AB} = -3 * 0^2 = 0\ KN.m}$

• No ponto B, temos x = 1,5 m, logo $\boldsymbol{M_{AB} = -3 * 1{,}5^2 = -6{,}75\ KN.m}$

$\begin{pmatrix} B & & C \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{M_{BC} = -4{,}5x^2 + 13{,}5x - 6{,}75}$$

• No ponto B, temos x = 0 m, logo

$\boldsymbol{M_{BC} = -4{,}5 * 0^2 + 13{,}5 * 0 - 6{,}75 = -6{,}75\ KN.m}$

• No ponto E onde o cortante V_{BC} é ZERO (x = 1,5 m), temos:

$\boldsymbol{M_E = -4{,}5 * 1{,}5^2 + 13{,}5 * 1{,}5 - 6{,}75 = 3{,}38\ KN.m}$

• No ponto C, temos x = 3 m, logo

$\boldsymbol{M_{BC} = -4{,}5 * 3^2 + 13{,}5 * 3 - 6{,}75 = -6{,}75\ KN.m}$

Portanto, o momento de valor máximo é negativo e $(M_{máx})$ e ocorre nos pontos B e C (o fato de ser negativo indica que as fibras tracionadas são as superiores da viga)

$\begin{pmatrix} C & & D \\ 0 \leq x \leq 1{,}5 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{M_{CD} = -3x^2 + 9x - 6{,}75}$$

• No ponto C, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_C = -3 * 0^2 + 9 * 0 - 6{,}75 = -6{,}75\ KN.m}$

• No ponto D, temos x = 1,5 m, logo

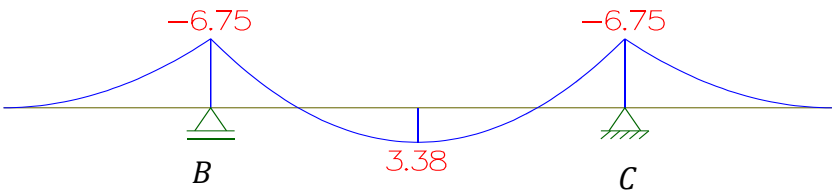
$\boldsymbol{M_D = -3 * 1{,}5^2 + 9 * 1{,}5 - 6{,}75 = 0\ KN.m}$

Portanto, o momento de valor máximo ocorre nos pontos B e C (apoios) sendo negativo (-6,75), isso significa que as fibras mais tracionadas são as fibras da face superior da viga junto aos apoios. Os resultados podem ser visualizados no diagrama abaixo.

• Lembre-se: nas vigas, o momento fletor positivo deve ser desenhado abaixo do eixo e o negativo acima do eixo

DMF (KN.m)

Fig. 414 – Exemplo 3



Fonte: autor

C) Diagrama do esforço normal (DEN)

Não existe carga axial concentrada e nem distribuída atuando, logo

$$N_{AC} = N_{CD} = N_{DB} = 0\ KN$$

DEN (KN)

Fig. 415 – Exemplo 3

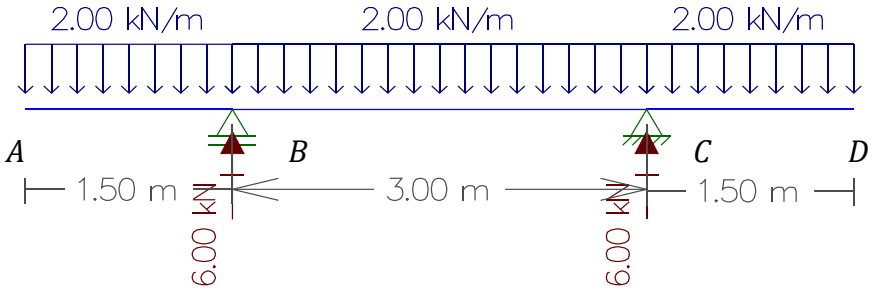


Fonte: Autor

4°) construa os diagramas dos esforços internos para a viga biapoiada com balanços mostrada abaixo

DCL final

Fig. 416 – Exemplo 4



Fonte: autor

RESP

Iniciando a análise pela esquerda observa-se que os pontos notáveis são: o ponto A (início de barra), os pontos B e C (pontos de aplicação de cargas concentradas) e o ponto D (término de barra), assim trechos a serem analisados são: AB, BC e CD.

•Trecho AB pela esquerda

$\begin{pmatrix} A & & B \\ 0 \le x \le 1{,}5 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{AB}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} \Rightarrow \boldsymbol{V_{AB}} = \int -2\, dx + 0 = -2x \Rightarrow \boldsymbol{V_{AB}} = \boldsymbol{-2x}$

$\boldsymbol{M_{AB}} = \int \boldsymbol{V_{AB}}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} \Rightarrow \boldsymbol{M_{AB}} = \int -2x\, dx + 0 = \frac{-2x^2}{2} \Rightarrow \boldsymbol{M_{AB}} = \boldsymbol{-x^2}$

$\boldsymbol{N_{AB}} = \int \boldsymbol{p(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} \Rightarrow \boldsymbol{N_{AB}} = \boldsymbol{0\ KN}$ ($\textit{não existe carga axial concentrada e nem distribuída no trecho } AB$)

•Trecho BC pela esquerda

$\begin{pmatrix} B & & C \\ 0 \le x \le 3 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{BC}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} \Rightarrow \boldsymbol{V_{BC}} = \int -2\, dx + [V_{AB}(B) + V_B] \Rightarrow$

$\boldsymbol{V_{BC}} = -2x + [(-2 * 1{,}5) + 6] \Rightarrow \boldsymbol{V_{BC}} = \boldsymbol{-2x + 3}$

$\boldsymbol{M_{BC}} = \int \boldsymbol{V_{BC}}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} \Rightarrow \boldsymbol{M_{BC}} = \int (-2x + 3)\, dx + M_{AB}(B) \Rightarrow$

$\boldsymbol{M_{BC}} = \frac{-2x^2}{2} + 3x + (-1{,}5^2) \Rightarrow \boldsymbol{M_{BC}} = \boldsymbol{-x^2 + 3x - 2{,}25}$

$\boldsymbol{N_{BC}} = \int \boldsymbol{p(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} \Rightarrow \boldsymbol{N_{BC}} = \boldsymbol{0\ KN}$

($\textit{não existe carga axial concentrada e nem distribuída no trecho } BC$)

•Trecho CD pela esquerda

$\begin{pmatrix} C & & D \\ 0 \le x \le 1{,}5 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{CD}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} \Rightarrow \boldsymbol{V_{CD}} = \int -2\, dx + [V_{BC}(C) + V_C] \Rightarrow$

$\boldsymbol{V_{CD}} = -2x + [(-2 * 3 + 3) + 6] \Rightarrow \boldsymbol{V_{CD}} = \boldsymbol{-2x + 3}$

$\boldsymbol{M_{CD}} = \int \boldsymbol{V_{CD}}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} \Rightarrow \boldsymbol{M_{CD}} = \int (-2x + 3)\, dx + M_{BC}(C) \Rightarrow$

$\boldsymbol{M_{CD}} = \frac{-2x^2}{2} + 3x + (-3^2 + 3 * 3 - 2{,}25) \Rightarrow \boldsymbol{M_{CD}} = \boldsymbol{-x^2 + 3x - 2{,}25}$

$\boldsymbol{N_{CD}} = \int \boldsymbol{p(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} \Rightarrow \boldsymbol{N_{CD}} = \boldsymbol{0\ KN}$ ($\textit{não existe carga axial concentrada}$

$e\ nem\ distribuída\ no\ trecho\ CD)$

Diagramas de esforços internos

A) Diagrama de esforço cortante (DEC)

$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 \leq x \leq 1{,}5 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{AB} = -2x}$

• No ponto A, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{V_A = -2 * 0 = 0\ KN}$

• No ponto B, temos x = 1,5 m, logo $\boldsymbol{V_B = -2 * 1{,}5 = -3\ KN}$

$\begin{pmatrix} B & C \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{BC} = -2x + 3}$

• No ponto B, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{V_B = -2 * 0 + 3 = 3\ KN}$

• No ponto C, temos x = 3 m, logo $\boldsymbol{V_C = -2 * 3 + 3 = -3\ KN}$

$\begin{pmatrix} C & D \\ 0 \leq x \leq 1{,}5 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{CD} = -2x + 3}$

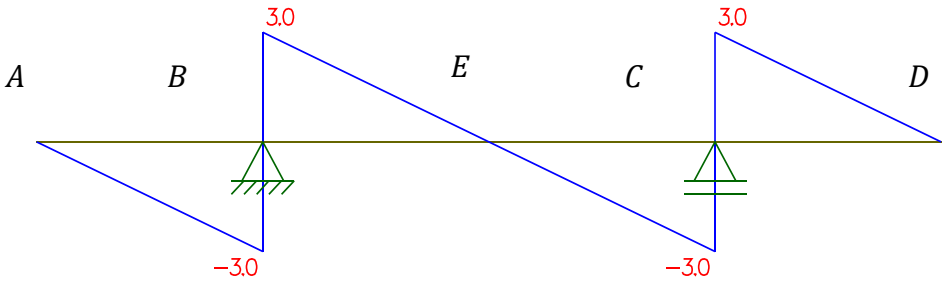
• No ponto C, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{V_C = -2 * 0 + 3 = 3\ KN}$

• No ponto D, temos x =1,5 m, logo $\boldsymbol{V_D = -2 * 1{,}5 + 3 = 0\ KN}$

• Lembre-se: nas vigas o cortante positivo é desenhado acima do eixo da e o cortante negativo abaixo do eixo da viga

DEC (KN)

Fig. 417 – Exemplo 4



Fonte: autor

• Observe que o cortante máximo ocorre nos apoios B e C

• Os candidatos a ponto de momento máximo são as extremidades A e D, os pontos B e C onde ocorrem saltos do cortante e o ponto E onde $(V_{BC} = 0)$ e intercepta

o eixo da viga. Como os momentos nas extremidades livres (A e D) são nulos, então o momento de valor máximo ($\boldsymbol{M_{máx}}$) pode ocorrer no ponto B, E ou C do treco BC

• Sendo o momento a integral do cortante, então podemos obter o momento em um ponto qualquer como a soma das áreas dos cortantes até o ponto considerado (pela esquerda).

B) Diagrama do momento fletor (DMF)

$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 \leq x \leq 1{,}5 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{AB} = -x^2}$

• No ponto A, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_A = -0^2 = 0\ KN.m}$

• No ponto B, temos x = 1,5 m, logo $\boldsymbol{M_B = -1{,}5^2 = -2{,}25\ KN.m}$

$\begin{pmatrix} B & C \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{BC} = -x^2 + 3x - 2{,}25}$

• No ponto B, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_B = -0^2 + 3 * 0 - 2{,}25 = -2{,}25\ KN.m}$

• No ponto E onde o cortante V_{BC} é ZERO (x = 1,5 m), temos:

$\boldsymbol{M_E = -1{,}5^2 + 3 * 1{,}5 - 2{,}25 = 0\ KN.m}$

• No ponto C, temos x = 3 m, logo $\boldsymbol{M_C = -3^2 + 3 * 3 - 2{,}25 = -2{,}25\ KN.m}$

$\begin{pmatrix} C & D \\ 0 \leq x \leq 1{,}5 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{CD} = -x^2 + 3x - 2{,}25}$

• No ponto C, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_C = -0^2 + 3 * 0 - 2{,}25 = -2{,}25\ KN.m}$

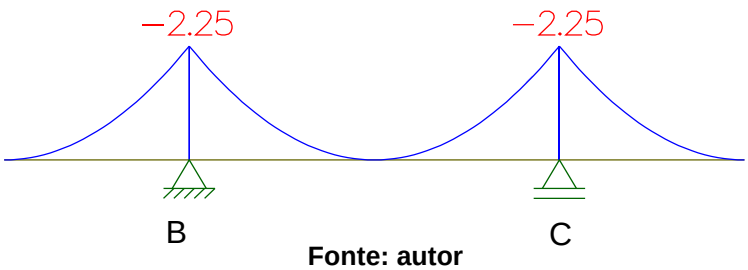
• No ponto D, temos x = 1,5 m, logo $\boldsymbol{M_D = -1{,}5^2 + 3 * 1{,}5 - 2{,}25 = 0\ KN.m}$

• Portanto, o momento de valor ocorre nos pontos B e C (apoios) sendo negativo (-2,25), isso significa que as fibras tracionadas são as da face superior da viga junto aos apoios.

• Lembre-se: nas vigas, o diagrama de momento fletor positivo deve ser desenhado abaixo do eixo e o de momento negativo acima do eixo

DMF (KN.m)

Fig. 418 - Exemplo 4



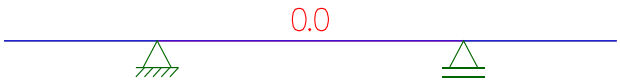
Fonte: autor

C) Diagrama do esforço normal (DEN)

$$N_{AB} = N_{BC} = N_{CD} = 0\ KN$$

DEN (KN)

Fig. 419 – Exemplo 4

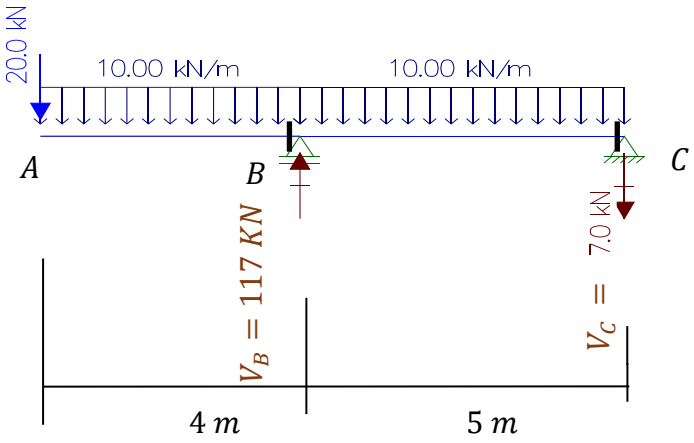


Fonte: autor

5°) construa os diagramas dos esforços internos para a viga rotulada abaixo

DCL final

Fig. 420 – Exemplo 5



Fonte: autor

RESP

Iniciando a análise pela esquerda observa-se que os pontos notáveis são: o ponto A (início de barra), o ponto B (ponto de aplicação de carga concentrada) e o

ponto C (término de barra), assim os trechos a serem analisados são AB e BC indicados na figura acima

•Trecho AB pela esquerda

$\begin{pmatrix} A & & B \\ 0 \leq x \leq 4 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{V_{AB}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{V_{AB}} = \int -10\, dx - 20 = -10x - 20 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{V_{AB} = -10x - 20}$$

$$\boldsymbol{M_{AB}} = \int \boldsymbol{V_{AB}}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int (-10x - 20)\, dx + 0 = \frac{-10x^2}{2} - 20x \;\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{M_{AB} = -5x^2 - 20x}$$

$$\boldsymbol{N_{AB}} = \int -\boldsymbol{p(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{N_{AB} = 0\ KN}$$

•Trecho BC pela esquerda

$\begin{pmatrix} B & & C \\ 0 \leq x \leq 5 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{V_{BC}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int -10\, dx + [V_{AB}(B) + V_B]$$

$$\boldsymbol{V_{BC}} = -10x + [(-10 * 4 - 20) + 117] \;\Rightarrow\; \boldsymbol{V_{BC} = -10x + 57}$$

$$\boldsymbol{M_{BC}} = \int \boldsymbol{V_{BC}}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int (-10x + 57)\, dx + M_{AB}(B) \;\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{M_{BC}} = \frac{-10x^2}{2} + 57x + (-5 * 4^2 - 20 * 4) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{M_{BC} = -5x^2 + 57x - 160}$$

$$\boldsymbol{N_{BC}} = \int -\boldsymbol{p(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{N_{BC} = 0\ KN}$$

Diagramas de esforços internos

A) Diagrama de esforço cortante (DEC)

$\begin{pmatrix} A & & B \\ 0 \leq x \leq 4 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{V_{AB} = -10x - 20}$$

• No ponto A, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{V_A = -10 * 0 - 20 = -20\ KN}$

• No ponto B, temos x = 4 m, logo $\boldsymbol{V_B = -10 * 4 - 20 = -60\ KN}$

$\begin{pmatrix} B & & C \\ 0 \leq x \leq 5 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{V_{BC} = -10x + 57}$$

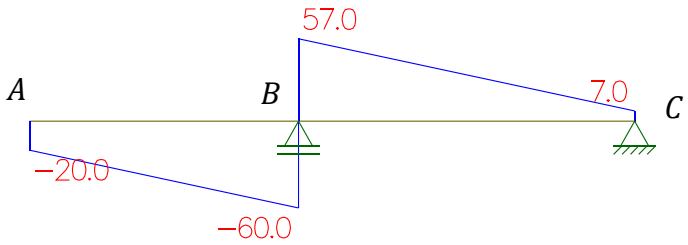
• No ponto B, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{V_B = -10 * 0 + 57 = 57\ KN}$

• No ponto C, temos x = 5 m, logo $\boldsymbol{V_C = -10 * 5 + 57 = 7\ KN}$

• Lembre-se: nas vigas o cortante positivo é desenhado acima do eixo e o cortante negativo abaixo do eixo da viga

DEC (KN)

Fig. 421 – Exemplo 5



Fonte: autor

• Observe que o cortante de valor máximo (60 KN) ocorre sobre o apoio B

• Os candidatos a ponto de momento máximo são as extremidades A e C e o ponto B onde ocorre salto do cortante. Como nesse caso os momentos nas extremidades são nulos, então o momento de valor máximo ($\boldsymbol{M_{máx}}$) deve ocorrer sobre o apoio B.

• Sendo o momento a integral do cortante, então podemos obter o momento em um ponto qualquer como a soma das áreas dos cortantes até o ponto considerado (pela esquerda).

B) Diagrama de momento fletor (DMF)

$\begin{pmatrix} A & & B \\ 0 \leq x \leq 4 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{AB} = -5x^2 - 20x}$

• No ponto A, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{V_A = -5 * 0^2 - 20 * 0 = 0\ KN.m}$

• No ponto B, temos x = 4 m, logo $\boldsymbol{V_B = -5 * 4^2 - 20 * 4 = -160\ KN.m}$

$\begin{pmatrix} B & & C \\ 0 \leq x \leq 5 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{BC} = -5x^2 + 57x - 160}$

• No ponto B, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{V_B = -5 * 0^2 + 57 * 0 - 160 = -160\ KN.m}$

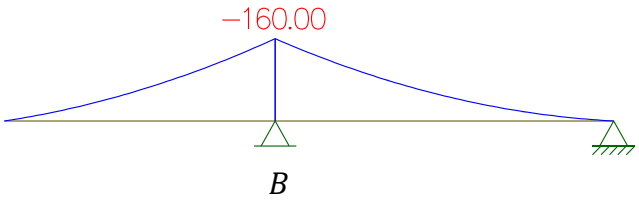
• No ponto C, temos x = 5 m, logo $\boldsymbol{V_C = -5 * 5^2 + 57 * 5 - 160 = 0\ KN.m}$

Portanto, o momento de valor máximo ocorre sobre o apoio B

• Lembre-se: nas vigas, o diagrama de momento fletor positivo deve ser desenhado abaixo do eixo e o de momento negativo acima do eixo

DMF (KN.m)

Fig. 422 – Exemplo 5



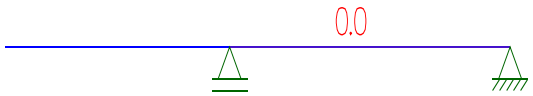
Fonte: autor

C) Diagrama do esforço normal (DEN)

$$\boldsymbol{N_{AB} = N_{BC} = 0\ KN}$$

DEN (KN)

Fig. 423 – Exemplo 5

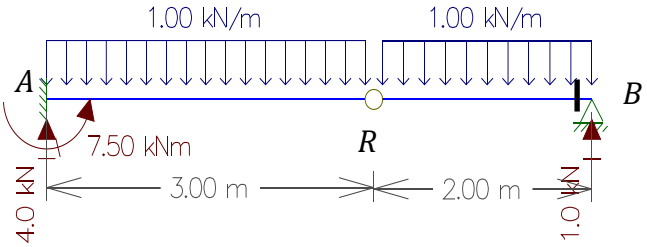


Fonte: autor

6°) construa os diagramas dos esforços internos para a viga rotulada abaixo

DCL final

Fig. 424 – Exemplo 6



Fonte: autor

Iniciando a análise pela esquerda observa-se que os pontos notáveis são o ponto A (início de barra) e o ponto B (término de barra). Rótulas internas não são pontos notáveis, assim o único trecho a ser analisado é o trecho AB

•Trecho AB pela esquerda

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 \leq x \leq 5 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{AB}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int -1\,dx + V_A = -x + 4 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{V_{AB}} = \boldsymbol{-x + 4}$$

$$\boldsymbol{M_{AB}} = \int \boldsymbol{V_{AB}}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int (-x + 4)\,dx + M_A = \frac{-x^2}{2} + 4x + (-7{,}5) \Rightarrow$$

(o momento de 7,5 KN.m aplicado no apoio A no sentido antihorário traciona as fibras superiores, assim pela nossa convenção de sinais, entrou como negativo na equação acima)

$$\boldsymbol{M_{AB}} = \boldsymbol{-0{,}5x^2 + 4x - 7{,}5}$$

$$\boldsymbol{N_{AB}} = \int \boldsymbol{p(x)}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{N_{AB}} = \boldsymbol{0\ KN}$$

Diagramas de esforços internos

A) Diagrama de esforço cortante (DEC)

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 \le x \le 5 & \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{AB}} = \boldsymbol{-x + 4}$$

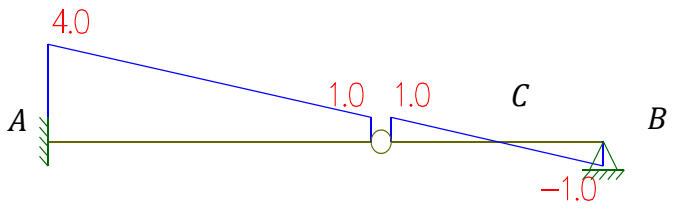
• No ponto A, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{V_A} = -0 + 4 = \boldsymbol{4\ KN}$

• No ponto B, temos x = 5 m, logo $\boldsymbol{V_B} = -5 + 4 = \boldsymbol{-1\ KN}$

• Lembre-se: nas vigas o cortante positivo é desenhado acima do eixo e o cortante negativo abaixo do eixo da viga

DEC (KN)

Fig. 425 – Exemplo 6



Fonte: autor

• Observe que o cortante máximo ocorre sobre o apoio A

• Os candidatos a ponto de momento máximo são as extremidades A e B e o ponto C onde $(V_{AB} = 0)$ e intercepta o eixo da viga. Como os momentos na extremidade B é nulo (apoio do 2° gênero), então o momento de valor máximo $(\boldsymbol{M_{máx}})$ ou ocorre no engaste A ou no ponto C onde o cortante é nulo.

• Sendo o momento a integral do cortante, então podemos obter o momento em um ponto qualquer como a soma das áreas dos cortantes até o ponto considerado

B) Diagrama de momento fletor (DMF)

$$\begin{pmatrix} A & & B \\ 0 \leq x \leq 5 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M_{AB} = -0,5x^2 + 4x - 7,5}$$

• No ponto A, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_A = -0,5 * 0^2 + 4 * 0 - 7,5 = -7,5\ KN.m}$

• Momento na rótula R, x = 3 m (já sabemos que o momento na rótula é zero, porém vamos calcular para confirmar o resultado)

$$\boldsymbol{M_R = -0,5 * 3^2 + 4 * 3 - 7,5 = 0\ KN.m}$$

• No ponto C onde o cortante V_{AB} é zero (x = 4 m), temos:

$$\boldsymbol{M_C = -0,5 * 4^2 + 4 * 4 - 7,5 = 0,5\ KN.m}$$

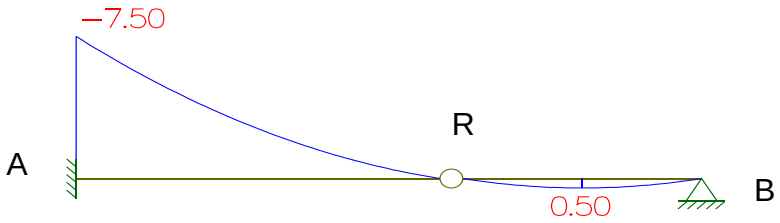
• No ponto B, temos x = 5 m, logo $\boldsymbol{V_B = -0,5 * 5^2 + 4 * 5 - 7,5 = 0\ KN.m}$

Portanto, o momento de valor máximo ocorre no engaste A.

• Lembre-se: nas vigas, o diagrama de momento fletor positivo deve ser desenhado abaixo do eixo e o de momento negativo acima do eixo

DMF (KN.m)

Fig. 426 – Exemplo 6

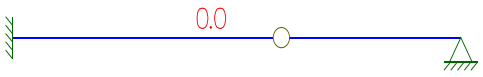


Fonte: autor

C) Diagrama do esforço normal

DEN (KN)

Fig. 427 – Exemplo 6



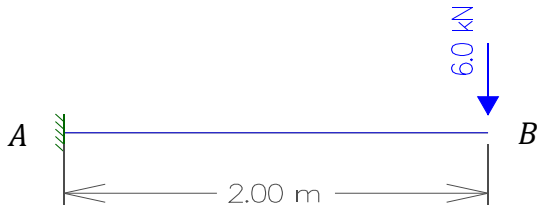
Fonte: autor

10.12 Diagramas de esforços internos para vigas em balanço

Para as vigas em balanço quando iniciamos a análise pela extremidade livre não é necessário calcular as reações e nem fazer o DCL final da estrutura para construir os diagramas de esforços internos

1°) construa os diagramas dos esforços internos para a viga em balanço abaixo

Fig. 428 – Exemplo 1



Fonte: autor

RESP

Iniciando a análise pela direita (extremidade livre) observa-se que os pontos notáveis são o ponto B (início de barra) e o ponto A (término de barra), assim o único trecho a ser analisado é o trecho BA

•Trecho BA pela direita

$\begin{pmatrix} B & & A \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{BA} = \int q(x)\, dx + \sum V' \Rightarrow V_{BA} = \int 0\, dx + 6 = 6 \Rightarrow \quad V_{BA} = 6KN}$ $(analisando$

$pela\ direita\ cargas\ verticais\ para\ baixo\ são\ positivas, por\ isso, a\ carga\ de\ 6\ KN$ $entrou\ como\ positiva\ na\ equação\ acima)$

$\boldsymbol{M_{BA} = \int -V_{BA}\, dx + \sum M' = \int -6\, dx + 0 = 6x \Rightarrow \quad M_{BA} = -6x}$

$\boldsymbol{N_{AB} = \int p(x)\, dx + \sum N' \Rightarrow \quad N_{BA} = 0\ KN}$

Diagramas de esforços internos

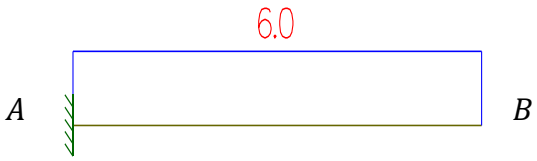
A) Diagrama de esforço cortante (DEC)

$\begin{pmatrix} B & & A \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{BA} = 6KN}$

DEC (KN)

Fig. 429 – Exemplo 1



Fonte: autor

• Observe que o esforço cortante não varia ao longo da viga indicando ausência de carregamento distribuído

• Observe que o diagrama de cortante não apresenta salto e nem se anula no interior do trecho AB, assim os candidatos a ponto de momento de valor máximo são as extremidades A e B. Como na extremidade livre (ponto B) o momento é zero, então o momento de valor máximo $\boldsymbol{M_{máx}}$ ocorrer no engaste e isso é verdadeiro para qualquer viga em balanço

• Sendo o momento a integral do cortante, então podemos obter o momento em um ponto qualquer como a soma das áreas dos cortantes até o ponto considerado (pela esquerda).

B) Diagrama de momento fletor (DMF)

$$\begin{pmatrix} B & & A \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M_{BA} = -6x}$$

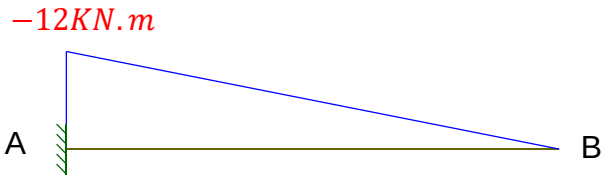
• No ponto B, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_B = -6 * 0 = 0\ KN.m}$

• No ponto A, temos x = 2 m, logo $\boldsymbol{M_A = -6 * 2 = -12\ KN.m}$

Portanto, o momento de valor máximo ocorre na extremidade A (engaste)

DMF

Fig. 430 – Exemplo 1



e: autor

C) Diagrama do esforço normal (DEN)

Não existe carga axial concentrada e nem distribuída atuando, logo

$$N_{BA} = 0\ KN$$

DEN (KN)

Fig. 431 – Exemplo 1

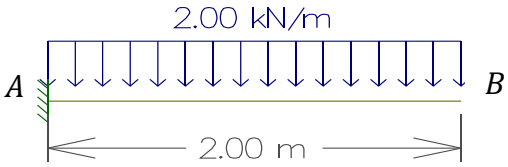


Fonte: autor

2°) construa os diagramas dos esforços internos para a viga em balanço abaixo

DCL final

Fig. 432 - Exemplo 2



Fonte: autor

RESP

Iniciando a análise pela direita, temos

•Trecho BA pela direita

$$\begin{pmatrix} B & & A \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$$

$$V_{BA} = \int q(x)\,dx + \sum V' \Rightarrow V_{BA} = \int 2\,dx + 0 = 2x \Rightarrow V_{BA} = 2x$$

$$M_{BA} = \int -V_{BA}\,dx + \sum M' \Rightarrow M_{BA} = \int -2x\,dx + 0 = \frac{-2x^2}{2} \Rightarrow M_{BA} = -x^2$$

$$N_{BA} = \int p(x)\,dx + \sum N' \Rightarrow N_{BA} = 0\ KN$$

Diagramas de esforços internos

A) Diagrama de esforço cortante (DEC)

$$\begin{pmatrix} B & & A \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$$

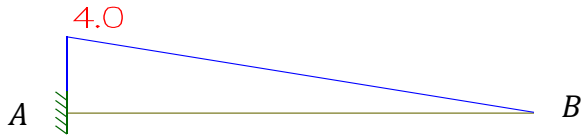
$$V_{BA} = 2x$$

• No ponto B, temos x = 0 m, logo $V_B = 2 * 0 = 0\ KN$

• No ponto A, temos x = 2 m, logo $V_A = 2 * 2 = 4\ KN$

DEC (KN)

Fig. 432 – Exemplo 2



Fonte: autor

• Observe que o cortante máximo ocorre no engaste e o diagrama é uma reta inclinada indicando carregamento uniformemente distribuído

• Aprendemos no exercício anterior que numa viga em balaço o momento de valor máximo $\boldsymbol{M_{máx}}$ ocorre no engaste que, nesse caso, é o apoio A

• Sendo o momento a integral do cortante, então podemos obter o momento em um ponto qualquer como a soma das áreas dos cortantes até o ponto considerado (pela esquerda).

B) Diagrama de momento fletor (DMF)

$$\begin{pmatrix} B & A \\ 0 \leq x \leq 2 & \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M_{BA} = -x^2}$$

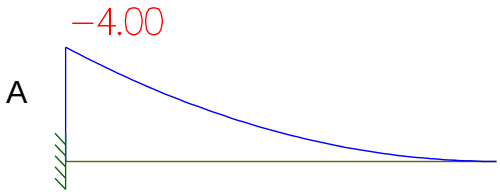
• No ponto B, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_B = -0^2 = 0\ KN.m}$

• No ponto A, temos x = 2 m, logo $\boldsymbol{M_A = -2^2 = -4\ KN.m}$

Portanto, o momento de valor máximo ocorre na extremidade A (engaste A)

DMF (KN.m)

Fig. 433 – Exemplo 2



Fonte: autor

C) Diagrama do esforço normal (DEN)

$$\boldsymbol{N_{BA} = 0\ KN}$$

DEN (KN)

Fig. 434 – Exemplo 2



Fonte: autor

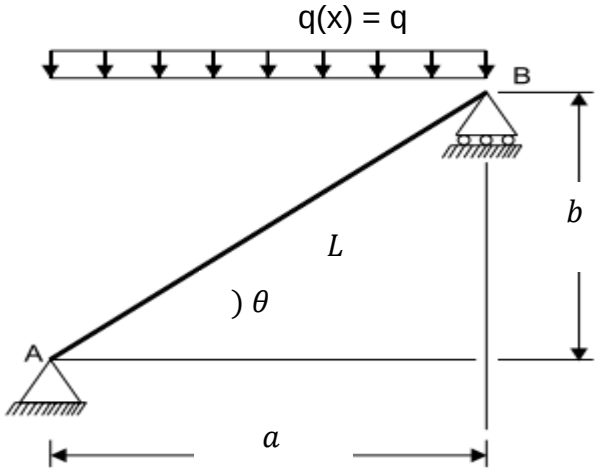
10.13 Diagramas de esforços internos para vigas inclinadas

Um modo prático para analisar os esforços solicitantes internos em vigas inclinadas consiste em usar uma viga horizontal equivalente, tal que, os esforços internos na viga equivalente são iguais aos da viga inclinada como explicaremos a seguir

A) Viga equivalente para uma viga inclinada sujeita a um carregamento q vertical uniformemente distribuído na horizontal

Considere a viga AB abaixo e observe que o carregamento vertical de intensidade (**q**) se distribui ao longo do comprimento horizontal (**a**) e não ao longo do comprimento inclinado **L** da viga AB como mostra a figura abaixo

Figura.435



Adaptado de (Júnior, Eloy) 1999

A viga equivalente para os esforços internos é a viga AB desenhada na horizontal com as seguintes características:

• Comprimento **(L)** da viga horizontal equivalente

$$\boldsymbol{\theta^{\circ} = \tan^{-1}(\frac{b}{a})} \qquad \boldsymbol{e} \qquad \boldsymbol{L = \sqrt{a^2 + b^2}} \quad \boldsymbol{ou} \quad \boldsymbol{L = \frac{a}{\cos\theta}}$$

• Carregamento uniformemente distribuído sobre a viga horizontal equivalente

$$\boldsymbol{q'(x) = qcos^2\theta} \qquad \boldsymbol{ou} \qquad \boldsymbol{q'(x) = q * (\frac{a}{L})^2}$$

• Carregamento axial distribuído ao longo da viga equivalente

$$\boldsymbol{p(x) = q \sin\theta \cos\theta} \quad \boldsymbol{ou} \quad \boldsymbol{P(x) = \frac{q.b.a}{L^2}}$$

Após obtermos o carregamento para a viga horizontal equivalente calculamos as suas reações de apoios

• Reações verticais $(\boldsymbol{R_V})$ e horizontal $(\boldsymbol{R_H})$ nos apoios da viga horizontal equivalente

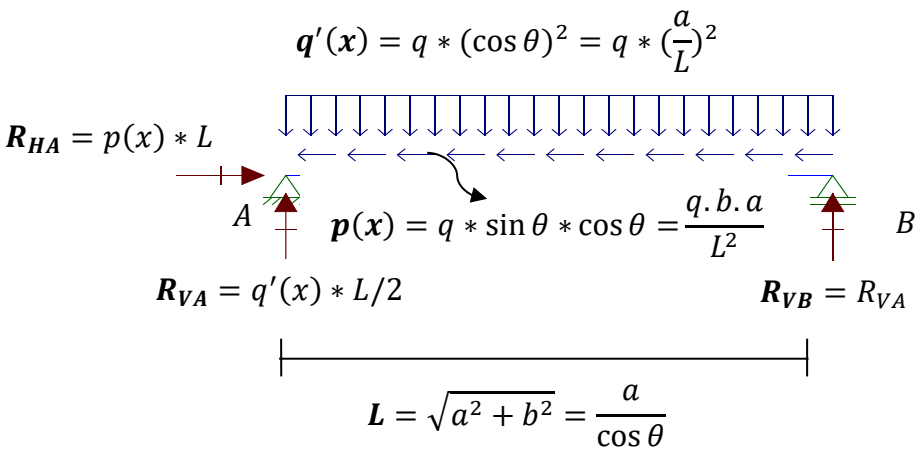
$$\boldsymbol{R_{VA} = R_{VB} = q'(x) * L/2}$$

$$\boldsymbol{R_H = p(x) * L/2}$$

Após calcularmos as reações nos apoios da viga horizontal equivalente desenhamos o seu DCL final, como mostra a figura abaixo, e a partir dele obtemos os esforços internos que atuam na viga inclinada

DCL final para uma viga horizontal equivalente

Fig. 436



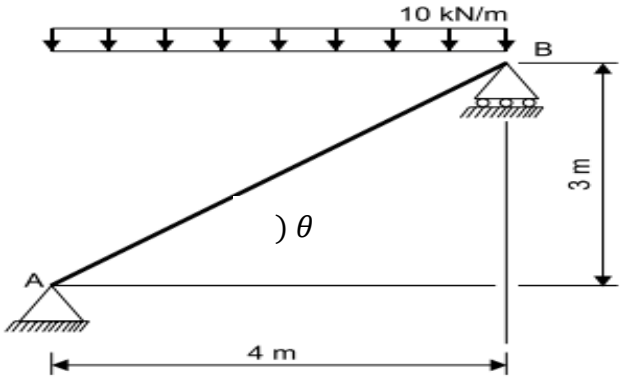
Fonte: autor

Exemplo

1°) Construa os diagramas dos esforços internos para a viga inclinada abaixo

DCL final

Fig. 437 – Exemplo 1



Fonte: Qconcursos.com

RESP

• Comprimento **(L)** da viga horizontal equivalente

$$\boldsymbol{L = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5\ m;} \qquad \boldsymbol{\theta = \tan^{-1}(\frac{b}{a}) = \tan^{-1}(\frac{3}{4}) = 36,87°}$$

• Carregamento uniformemente distribuído sobre a viga horizontal equivalente

$$\boldsymbol{\theta = \tan^{-1}(\frac{b}{a}) = \tan^{-1}(\frac{3}{4}) = 36,87°}$$

$$\boldsymbol{q'(x) = q cos^2 \theta = 10(cos 36{,}87°)^2 = 6,40\ KN/m \quad ou}$$

$$\boldsymbol{q'(x) = q * (\frac{a}{L})^2 = 10 * (\frac{4}{5})^2 = 6,40\ KN/m}$$

• Carregamento axial distribuído ao longo da viga horizontal equivalente

• $\boldsymbol{p(x) = q \sin\theta \cos\theta = 10 \sin 36{,}87° \cos 36{,}87° = 4,80\ KN/m \quad ou}$

• $\boldsymbol{p(x) = \frac{q.b.a}{L^2} = \frac{10 * 3 * 4}{5^2} = 4,8\ KN/m}$

• Reações de apoios na viga horizontal equivalente

$$\boldsymbol{R_{VA} = R_{VB} = q'(x) * L/2 = 6{,}4 * 5/2 = 16\ KN}$$

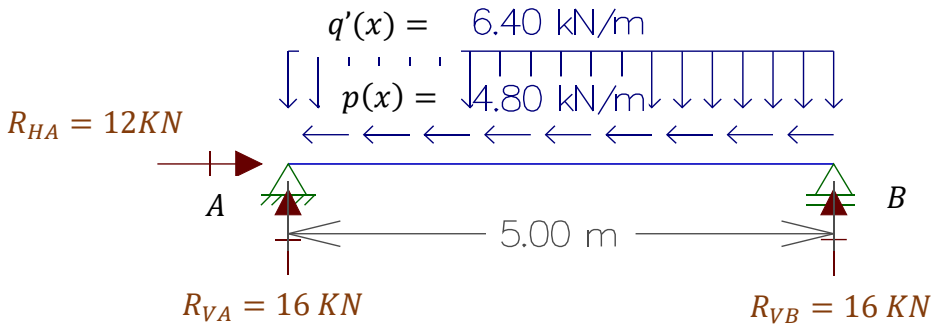
•$\boldsymbol{R_{HA} = p(x) * L/2 = 4{,}8 * 5/2 = 12\ KN}$

Após o cálculo das reações construímos o DCL final da viga horizontal equivalente

DCL final da viga horizontal equivalente

As forças solicitantes mostradas no DCL final abaixo são as componentes do carreg. uniformemente distribuído e das reações de apoios na viga inclinada e que atuam na direção perpendicular e paralela ao eixo dela)

Fig.438- Exemplo 1



Fonte: autor

B) Esforços internos seus respectivos diagramas para a viga inclinada AB usando a viga horizontal equivalente

Observe que agora temos uma viga biapoiada exclusivamente sob um carregamento uniformemente distribuído, os diagramas de esforços internos podem ser obtidos de modo direto como explicado no item 10.10

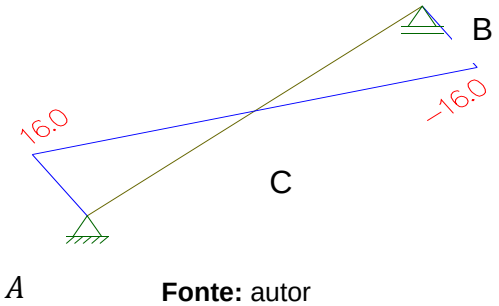
DEC para a viga inclinada (KN)

• Os cortantes de valores máximos são as reações de apoios da viga horizontal equivalente $(\boldsymbol{R_{VA}})$ e $(\boldsymbol{R_{VB}})$

• Para construir o diagrama de esforço cortante desenhamos um segmento de reta para cima perpendicular ao eixo da viga passando pelo apoio A e representando o cortante $V_A = R_{VA}$. Analogamente desenhamos um segmento para baixo pelo apoio B representando o cortante $V_B = R_{VB}$ e em seguida traçamos uma reta inclinada ligando o cortante V_A ao cortante V_B e interceptando o eixo da viga no meio do vão (ponto C)

DEC (KN)

Fig. 439 – Exemplo 1



Fonte: autor

• Observe que o cortante máximo ocorre nos pontos A e B junto aos apoios

• Os candidatos a ponto de momento máximo são as extremidades A e B e o ponto C, meio do vão, onde o cortante V_{AB} é zero e intercepta o eixo da viga. Como os momentos nos apoios são nulos o momento de valor máximo ($\boldsymbol{M_{máx}}$) deve ocorrer no ponto C

• Sendo o momento a integral do cortante, então podemos obter o momento em um ponto qualquer como a soma das áreas dos cortantes até o ponto considerado (pela esquerda).

DMF para a viga inclinada (KN)

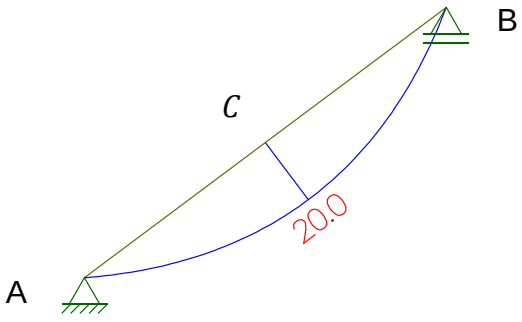
O momento de valor máximo ($\boldsymbol{M_{máx}}$) ocorre no meio do vão e vale:

$$\boldsymbol{M_C = M_{máx} = \frac{q' * L^2}{8} = \frac{6,4 * 5^2}{8} = 20\ KN.m \qquad em \qquad x = C = \frac{L}{2}}$$

• O diagrama do momento é uma parábola com a concavidade para cima, sendo que o momento nos apoios é nulo e o momento de valor máximo ($\boldsymbol{M_{máx}}$) ocorre no meio do vão (ponto C):

DMF (KN.m)

Fig. 440 – Exemplo 1



Fonte: autor

DEN para a viga inclinada (KN)

Usando a equação para o esforço norma interno, temos

$$\begin{pmatrix} A & & B \\ 0 \leq x \leq 5 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{N_{AB} = 4,8x - 12}$

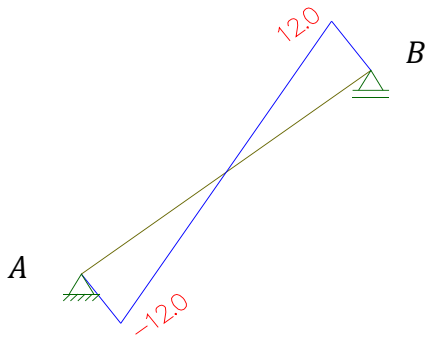
• No ponto A, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{N_A = 4{,}8 * 0 - 12 = -12\ KN}$

• No ponto B, temos x = 5 m, logo $\boldsymbol{N_B = 4{,}8 * 5 - 12 = 12\ KN}$

Lembre-se: nas vigas o esforço normal positivo é desenhado acima do eixo e o negativo abaixo do eixo.

DEN (KN)

Fig. 441 – Exemplo 1



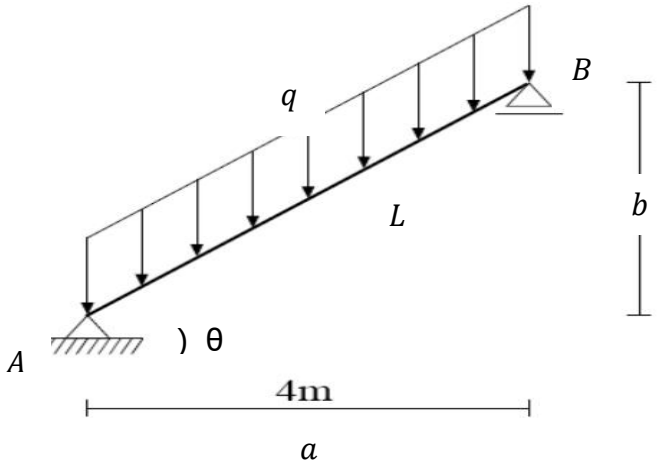
Fonte: autor

• Observe que o esforço normal N_{AB} se anula no meio do vão sendo que no trecho AC o esforço normal é negativo, assim a viga está comprimida em AC enquanto no trecho CB o esforço normal é positivo, assim a viga está tracionada no trecho CB.

B) Esforços solicitantes internos devidos ao peso próprio em vigas inclinadas.

Considere a viga inclinada submetida exclusivamente ao peso próprio mostrada na figura abaixo

Fig. 442



Adaptado de (Júnior, Eloy) 1999

Nesse caso, também podemos aplicar o conceito de viga equivalente para obter os esforços internos e construir os respectivos diagramas, mas as equações diferem daquelas do caso anterior. Nesse caso, temos

• Comprimento **(L)** da viga horizontal equivalente

$$\boldsymbol{\theta^{\circ} = \tan^{-1}(\frac{b}{a})} \quad \boldsymbol{e} \quad \boldsymbol{L = \sqrt{a^2 + b^2}} \quad \boldsymbol{ou} \quad \boldsymbol{L = \frac{a}{\cos\theta}}$$

• Carregamento uniformemente distribuído sobre a viga horizontal equivalente

$$\boldsymbol{q'(x) = q\cos\theta} \qquad \boldsymbol{ou} \qquad \boldsymbol{q'(x) = \frac{q * a}{L}}$$

• Carregamento axial distribuído ao longo da viga horizontal equivalente

$$\boldsymbol{p(x) = q * \sin\theta} \qquad \boldsymbol{ou} \qquad \boldsymbol{P(x) = \frac{q*b}{L}}$$

• Reações verticais $(\boldsymbol{R_V})$ e horizontal $(\boldsymbol{R_H})$ nos apoios da viga horizontal equivalente

$$\boldsymbol{R_{VA} = R_{VB} = q'(x) * L/2}$$

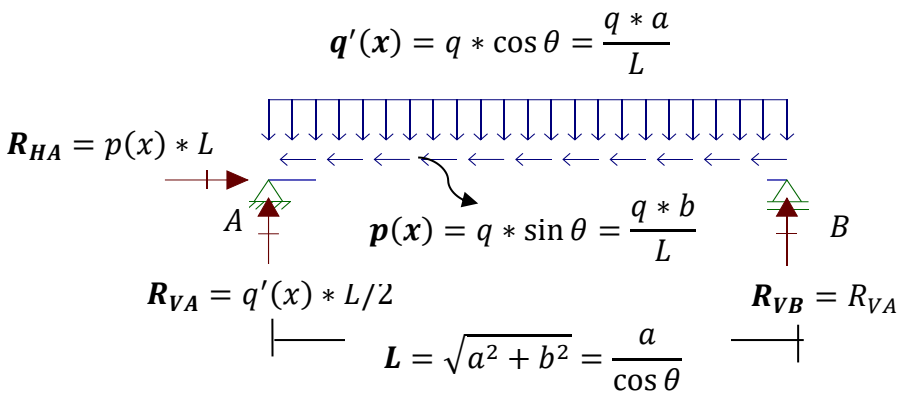
$$\boldsymbol{R_H = p(x) * L/2}$$

Após o cálculo das reações construímos o DCL final da viga horizontal equivalente

DCL final da viga horizontal equivalente

As forças mostradas no DCL final abaixo são as componentes do carreg. uniformemente distribuído e das reações de apoios na viga inclinada e que atuam na direção perpendicular e paralela ao eixo dela)

Fig. 443



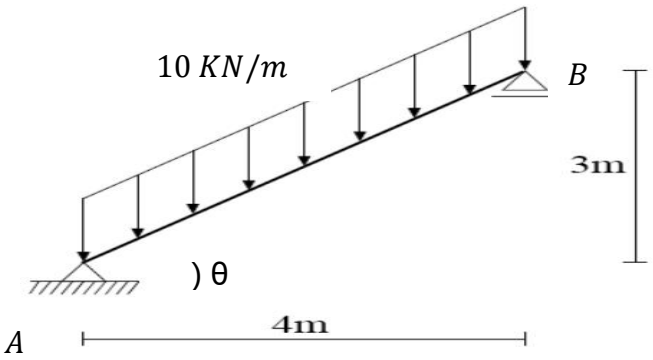
Fonte: autor

Exemplo

1°) Construa os diagramas dos esforços internos para a viga inclinada abaixo

DCL final

Fig. 444- Exemplo 1



Adaptado de (Júnior, Eloy) 1999

RESP

• Comprimento **(L)** da viga horizontal equivalente

$\boldsymbol{L = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5\ m;}$

•Carregamento uniformemente distribuído sobre a viga horizontal equivalente

$\boldsymbol{\theta = \tan^{-1}(\frac{b}{a}) = \tan^{-1}(\frac{3}{4}) = 36,87°}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{q'(x) = q\cos\theta = 10\cos 36,87° = 8\,\frac{KN}{m}}$ $\boldsymbol{ou}$

$\boldsymbol{q'(x) = \frac{q*a}{L} = \frac{10*4}{5} = 8\ KN/m}$

• Carregamento axial distribuído ao longo da viga horizontal equivalente

• $\boldsymbol{p(x) = q \sin\theta} = 10 \sin 36{,}87° = \boldsymbol{6\,\frac{KN}{m}}$ $\quad$ ***ou*** $\quad$ $\boldsymbol{p(x) = \frac{q * b}{L} = \frac{10 * 3}{5}}$

$\boldsymbol{= 6\ KN/m}$

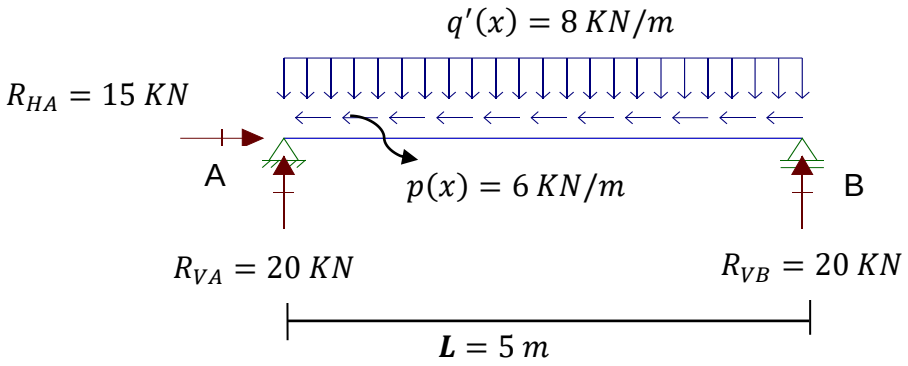
• Reações verticais $(\boldsymbol{R_V})$ e horizontal $(\boldsymbol{R_H})$ nos apoios da viga horizontal equivalente

• $\boldsymbol{R_{VA} = R_{VB} = q'(x) * L/2} = 8 * 5/2 = \boldsymbol{20\ KN}$

• $\boldsymbol{R_{HA} = p(x) * L/2} = 6 * 5/2 = \boldsymbol{15\ KN}$

DCL final da viga horizontal equivalente

Fig. 445 – Exemplo1



Fonte: autor

• *Esforços internos seus respectivos diagramas para a viga inclinada AB usando a viga horizontal equivalente*

Observe que agora temos uma viga biapoiada exclusivamente sob um carregamento uniformemente distribuído, os diagramas de esforços internos podem ser obtidos de modo direto como explicado no item 10.10

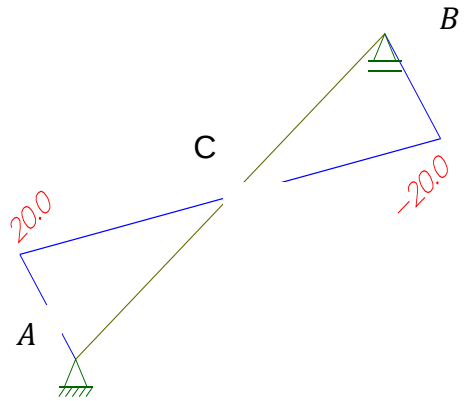
DEC para a viga inclinada (KN)

• Os cortantes de valores máximos são as reações de apoios da viga horizontal equivalente $(\boldsymbol{R_{VA}})$ e $(\boldsymbol{R_{VB}})$

• Para construir o diagrama de esforço cortante desenhamos um segmento de reta para cima perpendicular ao eixo da viga passando pelo apoio A e representando o cortante $V_A = R_{VB}$. Analogamente desenhamos um segmento para baixo pelo apoio B representando o cortante V_B e em seguida traçamos uma reta inclinada ligando o cortante V_A ao cortante V_B e interceptando o eixo da viga no meio do vão (ponto C)

DEC (KN)

fig. 446 – Exemplo 1



Fonte: autor

• Observe que o cortante máximo ocorre nos pontos A e B (apoios)

• Os candidatos a ponto de momento máximo são as extremidades A e B e o ponto C onde o cortante V_{AB} é zero e intercepta o eixo da viga. Como os momentos nas extremidades são nulos (apoios do 1°e 2° gênero), então o momento de valor máximo ($M_{máx}$) deve ocorrer no ponto C.

• Sendo o momento a integral do cortante, então podemos obter o momento em um ponto qualquer como a soma das áreas dos cortantes até o ponto considerado (pela esquerda).

DMF para a viga inclinada (KN)

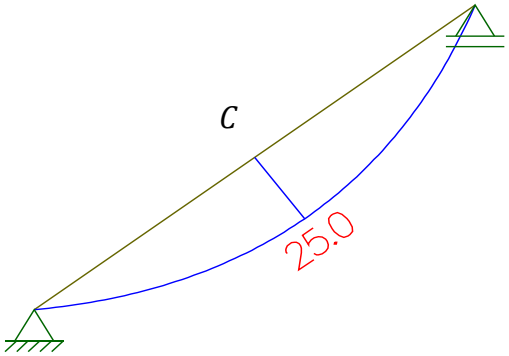
O momento de valor máximo ($\boldsymbol{M_{máx}}$) ocorre no meio do vão e vale:

$$\boldsymbol{M_C = M_{máx} = \frac{q' * L^2}{8} = \frac{8 * 5^2}{8} = 25\ KN.m \qquad em \qquad x = C = \frac{L}{2}}$$

• O diagrama do momento é uma parábola com a concavidade para cima, sendo que o momento nos apoios é nulo e o momento de valor máximo ($\boldsymbol{M_{máx}}$) ocorre no meio do vão (ponto C):

DMF (KN.m)

Fig. 447 – Exemplo 1



Fonte: autor

DEN para a viga inclinada (KN)

Usando a equação para o esforço norma interno, temos

$\begin{pmatrix} A & & B \\ 0 \leq x \leq 5 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{AB} = 6x - 15}$

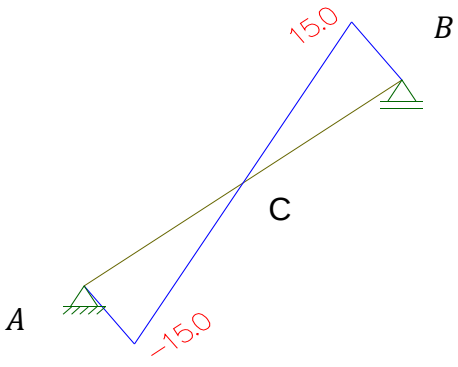
• No ponto A, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{N_A = 6 * 0 - 15 = -15\ KN}$

• No ponto B, temos x = 5 m, logo $\boldsymbol{N_B = 6 * 5 - 15 = 15\ KN}$

Lembre-se: nas vigas o esforço normal positivo é desenhado acima do eixo e o negativo abaixo do eixo.

DEN (KN)

Fig. 448 - Exemplo 2



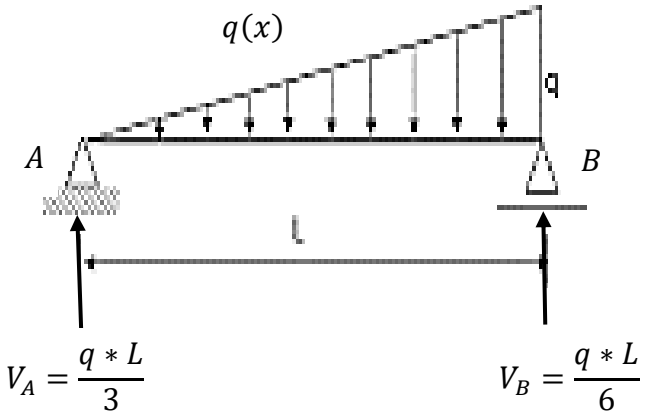
Fonte: autor

10.14 Diagramas de esforços internos para vigas

Nesse caso, o esforço cortante é definido por uma função do 2° grau, ou seja, o diagrama do cortante é uma parábola, enquanto o momento fletor é definido por uma função do 3° grau.

Considere o DCL final da viga na figura abaixo sujeita a um carregamento triangular ao longo de seu comprimento L

Fig. 449 – Viga sob carregamento triangular



Fonte: autor

• **Esforços internos:**

Primeiramente devemos encontrar a função q(x) que define o carregamento triangular, nesse caso, temos:

$$q(x) = \frac{q}{L} * x \qquad para \qquad (0 \leq x \leq L)$$

Iniciando a análise pela esquerda observa-se que os pontos notáveis são o ponto A (início do carregamento) e o ponto B (término do carregamento), assim o único trecho a ser analisado é o trecho AB

•**Trecho AB pela esquerda**

$$\begin{pmatrix} A & & B \\ 0 \leq x \leq L \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{AB}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{V_{AB}} = \int \left(-\frac{q}{L} * x\right) dx + \frac{qL}{6} = -\frac{qx^2}{2L} + \frac{qL}{6} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{V_{AB}} = -\frac{\boldsymbol{qx^2}}{\boldsymbol{2L}} + \frac{\boldsymbol{qL}}{\boldsymbol{6}} \; (esse\ resultado\ mostra\ que\ para\ esse\ caso\ o\ cortante\ é\ uma\ parábola)$$

$$\boldsymbol{M_{AB}} = \int \boldsymbol{V_{AB}}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{M_{AB}} = \int \left(-\frac{qx^2}{2L} + \frac{qL}{6}\right) dx + 0 = -\frac{qx^3}{6L} + \frac{qLx}{6}$$

$$\boldsymbol{M_{AB}} = -\frac{\boldsymbol{qx^3}}{\boldsymbol{6L}} + \frac{\boldsymbol{qLx}}{\boldsymbol{6}} \;\; (o\ momento\ é\ uma\ função\ do\ 3°\ grau)$$

$$\boldsymbol{N_{AB}} = \int \boldsymbol{p(x)}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{N_{AB} = 0\ KN}$$

Lembrando que o cortante é a derivada do momento vamos aplicar o método do intervalo fechado (MIF) para encontrar o momento de valor máximo $(\boldsymbol{M_{máx}})$

$$V_{AB} = M'_{AB} = -\frac{q.x^2}{2L} + \frac{q.L}{6}$$

A derivada (cortante) existe para todo $X \in]0; L[$, logo os únicos números críticos ocorrem quando a derivada é zero, logo

$$\boldsymbol{V_{AB} = M'_{AB}} = -\frac{qx^2}{2L} + \frac{qL}{6} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{qx^2}{2L} = \frac{qL}{6} \Rightarrow x^2 = \frac{2qL^2}{6q} \Rightarrow x^2 = \frac{L^2}{3} \Rightarrow x = \frac{L}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{x = \frac{L\sqrt{3}}{3} = 0,5773 * L}\ (partindo\ do\ vértice\ de\ carga\ zero\ essa\ é\ a\ coordenada\ x\ do\ ponto\ onde\ o\ cortante\ se\ anula\ \text{e}\ intercepta\ o\ eixo\ da\ viga)$$

Para encontrar o momento de valor máximo $(M_{máx})$ vamos testar a função do momento (M_{AB}) nos extremos A e B do intervalo e no número crítico $\boldsymbol{x = \frac{L\sqrt{3}}{3}}$ obtido acima

• Na extremidade A temos x = 0 m, logo

$$\boldsymbol{M_{AB}(0)} = -\frac{qx^3}{6L} + \frac{qLx}{6} = -\frac{q * 0^3}{6L} + \frac{qL * 0}{6} = \boldsymbol{0\ KN/m}$$

• No número crítico $\boldsymbol{x = \frac{L\sqrt{3}}{3}}$, temos:

$$\boldsymbol{M_{AB}}\left(\frac{L\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{qx^3}{6L} + \frac{qLx}{6} = -\frac{q}{6L}\left(\frac{L\sqrt{3}}{3}\right)^3 + \frac{qL}{6}\left(\frac{L\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{qL^3 3^{\frac{3}{2}}}{162L} + \frac{qL^2\sqrt{3}}{18} \Rightarrow$$

$$-\frac{qL^2 3^{\frac{3}{2}}}{162} + \frac{qL^2\sqrt{3}}{18} = \frac{-qL^2\sqrt{3^3}}{162} + \frac{qL^2\sqrt{3}}{18} = \frac{-qL^2 3\sqrt{3}}{162} + \frac{qL^2\sqrt{3}}{18} = \frac{-3qL^2\sqrt{3} + 9qL^2\sqrt{3}}{162} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{M_{AB}}\left(\frac{L\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{6qL^2\sqrt{3}}{162} = \boldsymbol{0,06415qL^2}$$

• Na extremidade B temos x = L, logo

$$\boldsymbol{M_{AB}(L)} = -\frac{qx^3}{6L} + \frac{qLx}{6} = -\frac{q * L^3}{6L} + \frac{qL * L}{6} = -\frac{qL^2}{6} + \frac{qL^2}{6} = \boldsymbol{0\ KN/m}$$

Os resultados mostram que para x medido a partir do apoio de carga zero, temos que

• O cortante se anula com a parábola interceptando o eixo da viga no ponto $\boldsymbol{x = 0,5773.L}$

• O momento nos apoios é zero e o máximo ocorre no ponto $(x = 0{,}5773.L)$ e vale:

$\boldsymbol{M_{máx} = 0,06415qL^2}$ $(q \text{ é o } valor\ da\ carga\ máxima\ do\ carregamento\ triangular)$

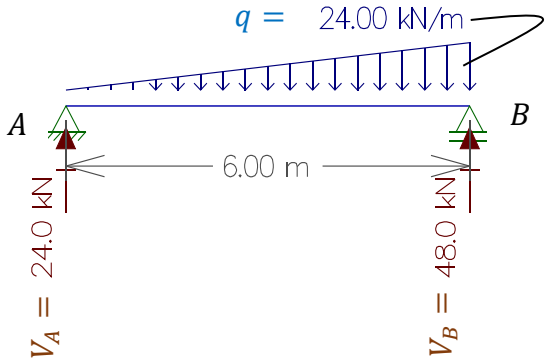
Observação: nesse caso, apesar do momento ser dado por uma função do 3° grau o diagrama é parecido com uma parábola

Exemplos

1°) Construa os diagramas dos esforços internos para a viga abaixo

DCL final

Fig. 450- Exemplo 1



Fonte: notas de aula

RESP

Iniciando a análise pela esquerda observa-se que os pontos notáveis são o ponto A (início de barra) e o ponto B (término de barra), assim o único trecho a ser analisado é o trecho AB

Nesse caso, o primeiro passo é encontrar a função **q(x)** que define o carregamento

$$q(x) = \frac{q}{L} * x = \frac{24}{6}x = 4x \quad \therefore \quad \boldsymbol{q(x) = 4x}$$

•Trecho AB pela esquerda

$$\begin{pmatrix} A & & B \\ 0 \le x \le 6 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{AB}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\ \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int -4x\ dx + V_A = \frac{-4x^2}{2} + 24 \ \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_{AB} = -2x^2 + 24}$$

$$\boldsymbol{M_{AB}} = \int \boldsymbol{V_{AB}}\ \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int (-2x^2 + 24)\ dx + M_A = \frac{-2x^3}{3} + 24x \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{M_{AB}} = \frac{-2x^3}{3} + 24x$$

$$\boldsymbol{N_{AB}} = \int \boldsymbol{p(x)}\ \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} \ \Rightarrow \qquad \boldsymbol{N_{AB} = 0\ KN}$$

Diagramas dos esforços internos

A) Diagrama de esforço cortante (DEC)

$$\begin{pmatrix} A & & B \\ 0 \le x \le 6 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{AB} = -2x^2 + 24}$$

• No apoio A, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{V_{AB} = -2 * 0^2 + 24 = 24\ KN}$

• A intersecção da parábola do cortante com o eixo da viga, partindo do apoio de carga zero, ocorre no ponto onde $V_{AB} = 0$, logo

$-2x^2 + 24 = 0 \Rightarrow -2(x^2 - 12) = 0\ \ quando\ \ (x^2 - 12) = 0\ \Rightarrow x = \sqrt{12} = \boldsymbol{3,46\ m}$

• No ponto B, temos x = 6 m, logo $\boldsymbol{V_{AB} = -2 * 6^2 + 24 = -48\ KN}$

Roteiro para construção do DEC

• Desenhe o eixo da viga AB, uma linha vertical para cima no apoio A e uma vertical para baixo pelo apoio B as quais representam os cortantes nesses apoios

• Desenhe uma linha tracejada ligando as extremidades das verticais que foram traçadas nos apoios (cortantes nos apoios A e B)

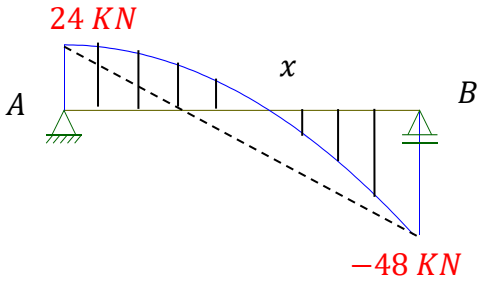
• Marque o ponto $\boldsymbol{x}$ sobre o eixo da viga AB (ponto onde ocorre a intersecção da parábola do cortante com o eixo da viga)

• Desenhe uma parábola com a concavidade voltada para a linha tracejada passando pelo ponto x ligando os valores do cortante nos apoios A e B

• Feche o diagrama traçando linhas verticais do eixo da viga até a parábola

DEC

Fig. 451 – Exemplo 1



Fonte: autor

• Observe que o cortante máximo ocorre junto ao apoio sob a carga q máxima

• Os candidatos a ponto de momento de valor máximo são as extremidades A e B e o ponto X onde o cortante V_{AB} é zero e intercepta o eixo da viga. Como os momentos nas extremidades são nulos (apoios do 1°e 2° gênero), então o momento de valor máximo ($\boldsymbol{M_{máx}}$) deve ocorrer no ponto $\boldsymbol{x}$ onde $V_{AB} = 0$

B) Diagrama de momento fletor (DMF)

$$\begin{pmatrix} A & & B \\ 0 \leq x \leq 6 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M_{AB}} = \frac{-2x^3}{3} + 24x$$

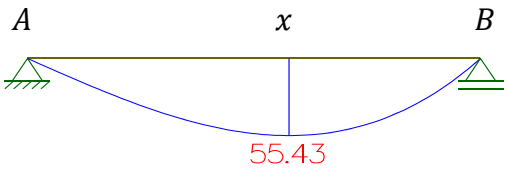
• Nos apoios o momento é zero.

• O momento máximo ocorre no ponto (**x = 3,46 m**), onde o cortante é ZERO, assim:

$$\boldsymbol{M_{máx}} = \frac{-2 * 3{,}46^3}{3} + 24 * 3{,}46 = \boldsymbol{55{,}43\ KN.m}$$

DMF (KN.m)

Fig.452– Exemplo1



Fonte: Autor

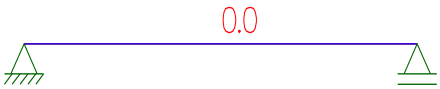
o diagrama do momento é semelhante a uma parábola de concavidade para cima

C) Diagrama do esforço normal (DEN)

$$\boldsymbol{N_{BA}} = \boldsymbol{0\ KN}$$

DEN (KN)

Fig. 453 – Exemplo 1



Fonte: autor

Podemos também resolver esse exemplo de modo prático usando as fórmulas obtidas anteriormente, observe

DEN

• Desenhe o eixo da viga AB, uma linha vertical para cima no apoio A e uma vertical para baixo pelo apoio B as quais representam os cortantes nesses apoios cujos valores são os das respectivas reações de apoios

• Desenhe uma linha reta tracejada ligando as extremidades das verticais que foram traçadas pelos apoios A e B

• Calcule e marque, sobre o eixo da viga, o ponto $(\boldsymbol{x} = 0{,}5773.\, L)$ partindo do apoio de carga zero

$\boldsymbol{x} = 0{,}5773.\, L = 0{,}5773 * 6 = \mathbf{3{,}46}\ \boldsymbol{m}$ (ponto onde ocorre a intersecção da parábola do cortante com o eixo da viga)

• Desenhe uma parábola com a concavidade voltada para a linha tracejada passando pelo ponto x e ligando os valores do cortante nos apoios A e B

• Feche o diagrama traçando linhas verticais do eixo da viga até a parábola

DMF

• Nos apoios o momento é zero.

• O momento máximo ocorre no ponto (**x = 3,46 m**), onde o cortante é ZERO,

$\boldsymbol{M_x = M_{máx}} = 0{,}06415 qL^2 = 0{,}06415 * 24 * 6^2 = \mathbf{55{,}43}\ \boldsymbol{KN.m}$

DEN

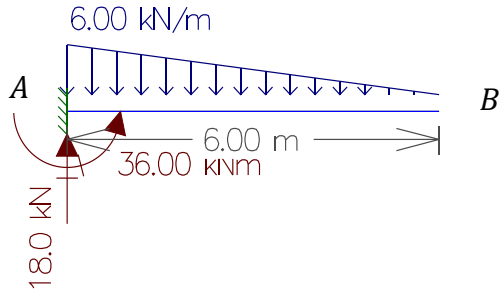
• Desenhe o eixo da viga sem as cargas

Sugerimos ao leitor que faça a resolução desse exercício pelo método prático

2°) Construa o diagrama de esforços internos pra a viga em balanço representada abaixo

DCL final

Fig. 454 – Exemplo 2



Fonte: autor

RESP:

Iniciando a análise pela esquerda observa-se que os pontos notáveis são o ponto A (início de barra) e o ponto B (término de barra).

O primeiro passo é encontrar a função q(x) que define o carregamento

Observe que nesse caso a função é decrescente, por isso, o coeficiente angular $(\frac{q}{L})$ é negativo

$$q(x) = -\frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{L}} * \boldsymbol{x} + \boldsymbol{q} = -\frac{6}{6} * x + 6 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{q(x) = -x + 6} \quad para \quad (0 \leq x \leq 6)$$

•Trecho AB pela esquerda

$$\begin{pmatrix} A & & B \\ 0 \leq x \leq 6 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{AB}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int -(-x + 6)\, dx + 18 = \frac{x^2}{2} - 6x + 18 \;\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{V_{AB} = 0,5x^2 - 6x + 18}$$

$$\boldsymbol{M_{AB}} = \int \boldsymbol{V_{AB}}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int (0{,}5x^2 - 6x + 18)\, dx - 36 = \frac{0{,}5x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + 18x - 36$$

$$M_{AB} = \frac{\boldsymbol{0,5x^3}}{\boldsymbol{3}} - \boldsymbol{3x^2 + 18x - 36}$$

$$\boldsymbol{N_{AB}} = \int \boldsymbol{p(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} \;\Rightarrow \qquad \boldsymbol{N_{AB} = 0\ KN}$$

Diagramas dos esforços internos

A) Diagrama de esforço cortante (DEC)

$$\begin{pmatrix} A & & B \\ 0 \leq x \leq 6 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{AB} = 0,5x^2 - 6x + 18}$$

• No apoio A, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{V_{AB} = 0,5 * 0^2} - 6 * 0 + 18 = \boldsymbol{18\ KN}$

• No ponto B, temos x = 6 m, logo $\boldsymbol{V_{AB} = 0{,}5 * 6^2 - 6 * 6 + 18 = 0\ KN}$

Roteiro para construção do DEC

• Desenhe a viga AB e uma linha vertical para cima no engaste (cortante no engaste)

• Desenhe uma linha tracejada ligando o cortante no engaste à extremidade B da viga

• Desenhe uma linha vertical ligando o ponto médio da viga à linha tracejada

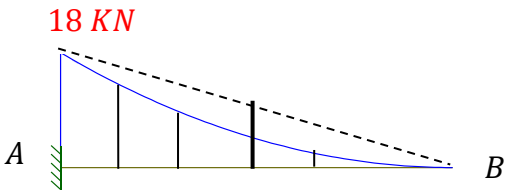
• Marque o ponto médio da linha vertical (ponto de intersecção da parábola com a linha vertical)

• Desenhe a parábola com a concavidade voltada para a linha tracejada (para cima) passando pelo ponto médio da linha vertical e ligando o cortante do ponto A à extremidade B da viga

• Feche o diagrama desenhando linhas verticais ligando o eixo da viga à parábola.

DEC

Fig. 455- Exemplo 2



Fonte: autor

• Observe que o cortante máximo ocorre sobre engaste (apoio A)

• Observe que o cortante não apresenta saltos e nem se anula no interior do trecho AB, assim os candidatos a ponto de momento de valor máximo são as extremidades A e B. Como na extremidade livre (ponto B) o momento é nulo, então momento de valor máximo $(M_{máx})$ deve ocorrer no ponto A, ou seja, no engaste.

• Sendo o momento a integral do cortante, então podemos obter o momento em um ponto qualquer como a soma das áreas dos cortantes até o ponto considerado (pela esquerda).

DMF

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 \leq x \leq 6 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M_{AB} = \frac{0,5x^3}{3} - 3x^2 + 18x - 36}$$

• No ponto A, temos x = 0 m, logo:

$$\boldsymbol{M_A = M_{máx} = \frac{-0,5 * 0^3}{3} - 3 * 0^2 + 18 * 0 - 36 = -36\ KN.m}$$

• No ponto médio do carregamento AB temos, x = 3 m, logo:

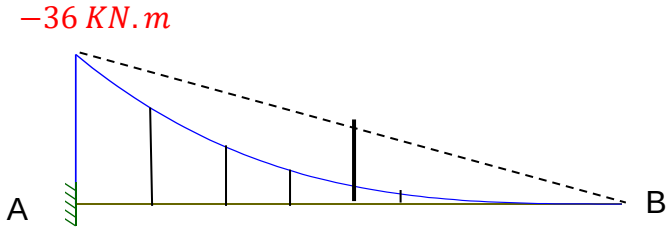
$$\boldsymbol{M_{AB} = \frac{0,5 * 3^3}{3} - 3 * 3^2 + 18 * 3 - 36 = -4,5\ KN.m}$$

• Na extremidade livre, ponto B, o momento é nulo

O DMF é construído de modo semelhante ao DEC e também se parece com uma parábola, porém intercepta a linha vertical, traçada no ponto médio da viga AB, no ponto correspondente a ¼ da sua altura.

DMF

Fig. 456 - Exemplo 2



Fonte: autor

DEN

Não existe carga axial concentrada e nem distribuída atuando, logo

$$\boldsymbol{N_{AB} = 0\ KN}$$

DEN (KN)

Fig. 457 – Exemplo 2



Fonte: autor

Sugerimos que o leitor resolva também pelo método prático

10.15 Diagramas de esforços internos para pórticos isostáticos

Na determinação dos esforços internos em pórticos frequentemente vamos usar o fato de que uma força $\vec{F}$ pode ser transferida de um ponto A para um ponto B desde que o momento produzido por ela em relação ao ponto B também seja transferido para o ponto B

Nos pórticos para definir o sinal dos esforços interno nas barras é conveniente usar um observador fictício que pode olhar para a esquerda na horizontal e que pode girar no sentido horário de modo a formar um ângulo interno sempre menor que 180°, tal que o observador nunca olha para a direita na horizontal

• O cortante numa barra será positivo quando a força que o produz apontar no mesmo sentido apontado pelo observador

• O normal é negativo quando a força axial aplicada produzir compressão (entrando na barra) e positivo quando a força axial produzir tração (saindo da barra)

• Nos diagramas o momento positivo deve ser desenhado no lado do observador e o negativo no lado oposto ao do observador

• Nos diagramas o cortante positivo deve ser desenhado do lado oposto ao do observador e o cortante negativo do mesmo lado do observador

• Nos diagramas o esforço normal positivo deve ser desenhado do lado oposto ao do observador e o normal negativo do mesmo lado do observador

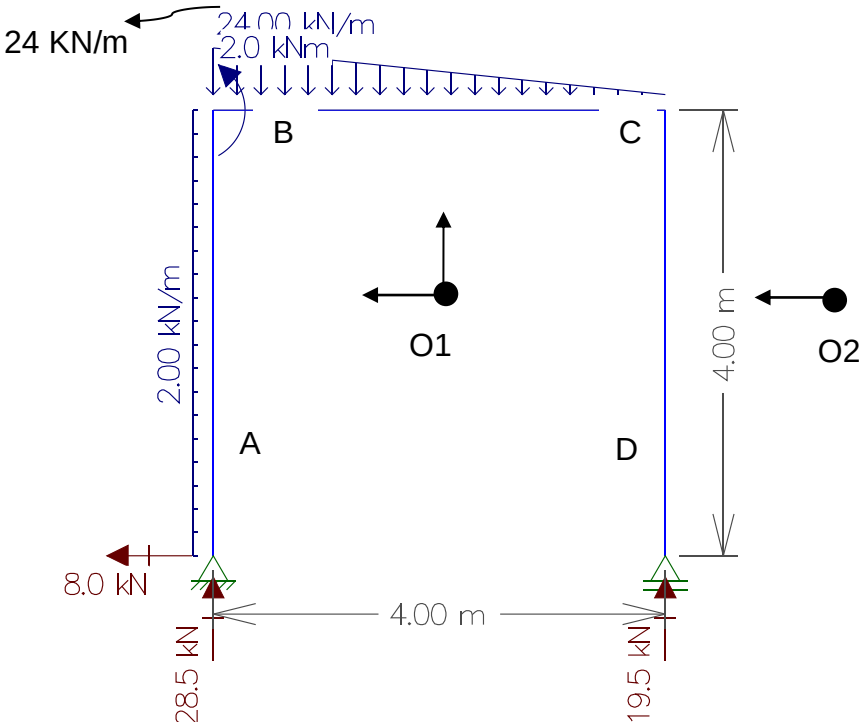
• Momentos aplicados no sentido horário em um ponto de uma barra entram como positivos na equação do momento para os esforços internos e no sentido anti horário entram como negativos

Essa é a mesma convenção usada pelo Ftool

Exemplos

1°) Construa os diagramas dos esforços internos para o pórtico abaixo

Fig. 458 – Exemplo 1



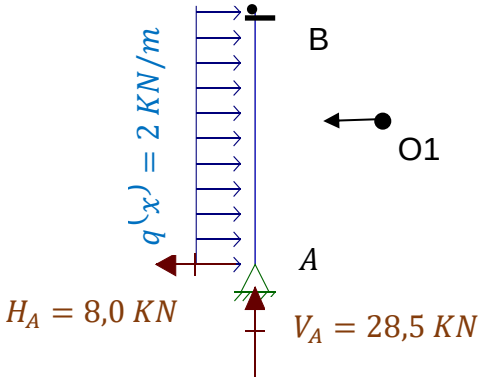
Fonte: autor

$O1 \rightarrow observador\ 1;$ $\quad O2 \rightarrow observador\ 2$

Veja que o observador O1 não gira 180° em relação a horizontal e no sentido horário para olhar a barra DC (o observador não olha para a direita)

A vista que o observador ($O1$) tem da barra vertical AB pode ser representada como mostrada na figura abaixo

Fig. 459 – Exemplo 1 (barra AB)



Fonte: autor

Assim analisando a barra AB de baixo para cima ou pela esquerda temos que:

• O cortante produzido pelo carregamento distribuído q(x) na barra AB deve entrar como negativo na equação, pois tem sentido contrário ao do observador ($O1$), enquanto que o cortante produzido pela reação H_A deve entrar como positivo, pois ela atua no mesmo sentido do observador ($O1$)

• O esforço normal produzido pela reação V_A é negativo, pois ela comprime a barra AB (entra na barra)

Analisando a barra AB pela esquerda (de baixo para cima) ´temos:

Barra AB pela esquerda (observador 1)

$$\begin{pmatrix} A & & B \\ 0 \leq x \leq 4 \end{pmatrix} m$$

$$\boldsymbol{V_{AB}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int -2\, dx + (H_A) = -2x + 8 \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_{AB}} = \boldsymbol{-2x + 8}$$

$$\boldsymbol{M_{AB}} = \int \boldsymbol{V_{AB}}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int (-2x + 8)dx + 0 = \frac{-2x^2}{2} + 8x \Rightarrow \quad \boldsymbol{M_{AB}} = \boldsymbol{-x^2 + 8x}$$

$$\boldsymbol{N_{AB}} = \int \boldsymbol{p(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} = \int 0dx + (-V_A) = 0 - 28{,}5 \Rightarrow \boldsymbol{N_{AB}} = \boldsymbol{-28{,}5\ KN}$$

Barra BC pela esquerda (observador 1)

Vamos analisar a barra BC pela esquerda. Para tanto devemos primeiramente transferir para o ponto B, início barra BC, as forças que atuam na barra AB anterior e também o momento que cada força aplicada na barra AB produz no ponto B da barra BC, assim temos

• Momento produzido pela reação H_A no ponto B

$$\boldsymbol{M_{HA}} = -(\boldsymbol{8 * 4}) = \boldsymbol{-32\ KN}\ (giro\ horário\ em\ relaçõa\ ao\ ponto\ B)$$

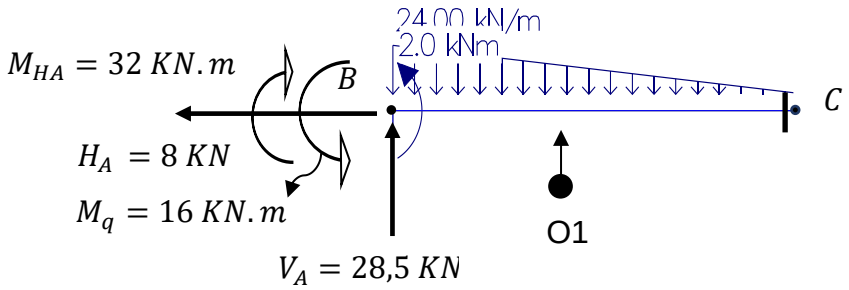
• Momento M_q produzido pelo carregamento q(x) no ponto B

$$\boldsymbol{M_q} = \boldsymbol{FR_{AB}} * \overline{\boldsymbol{X_A}} = \boldsymbol{A_{AB}} * \frac{\boldsymbol{L_{AB}}}{\boldsymbol{2}} = (4 * 2) * \frac{4}{2}$$

$$= \boldsymbol{16\ KN.m}\ (giro\ anti\ horário\ em\ relação\ ao\ ponto\ B)$$

Transferindo as forças da barra AB e os seus respectivos momentos para o ponto B, início da barra BC, ficamos com o esquema mostrado na figura abaixo

Fig.460 – Exemplo 1



Fonte: autor

O momento M_{HA} em sentido horário entra como positivo na equação do momento para esforços internos. Os demais momentos aplicados no ponto B estão no sentido anti-horário e entram como negativos na equação

$$\begin{pmatrix} B & & C \\ 0 \leq x \leq 4 \end{pmatrix} m$$

Primeiramente devemos encontrar a função q(x) do primeiro grau que define o carregamento triangular ao longo da barra BC

$$\boldsymbol{q(x) = a.x = -\frac{q}{L_{BC}}.x + 24 = -\frac{24}{4}.x - 24 \therefore\ q_{BC}(x) = -6x + 24\ \ se\ (0 \leq x \leq 4)m}$$

$$\boldsymbol{V_{BC} = \int -q(x)\,dx + \sum V' = \int -(-6x + 24)dx + V_A = \frac{6x^2}{2} - 24x + 28{,}5}$$

$$\boldsymbol{V_{BC} = 3x^2 - 24x + 28,5}$$

$$\boldsymbol{M_{BC} = \int V_{BC}\,dx + \sum M' = \int V_{BC}\,dx + \left(M_{HA} - M_q - 2\right) \Rightarrow}$$

$$\boldsymbol{M_{BC} = \int (3x^2 - 24x + 28{,}5)dx + (32 - 16 - 2) = \frac{3x^3}{3} - \frac{24x^2}{2} + 28{,}5x + (14)}$$

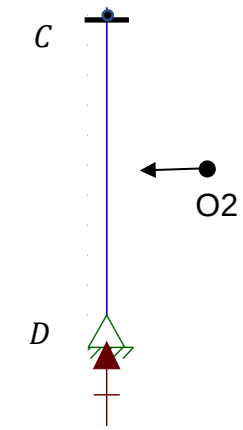
$$\boldsymbol{M_{BC} = x^3 - 12x^2 + 28,5x + 14}$$

$$\boldsymbol{N_{BC} = \int p(x)\,dx + \sum N' = \int 0dx + (-H_A) = 0 - 8\ \Rightarrow\ N_{BC} = 8\ KN}$$

Barra DC pela esquerda (observador 2)

A vista que o observador $O2$ tem da barra vertical DC está representada na figura abaixo

Fig.461 – Exemplo 1



Fonte: autor

Analisando a barra vertical DC, de baixo para cima, temos

• O cortante produzido pelo carregamento distribuído q deve entrar como positivo nas equações, pois atua no mesmo sentido do observador ($O2$) e o mesmo vale para o cortante produzido pela reação H_D

• O esforço normal produzido pela reação V_D é negativo, pois ela comprime a barra DC (entra na barra), assim temos:

$$\begin{pmatrix} D & & C \\ 0 \leq x \leq 4 \end{pmatrix} m$$

$$\boldsymbol{V_{DC}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\ \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int 0dx + 0 \ \Rightarrow\ \boldsymbol{V_{DC} = 0\ KN}$$

$$\boldsymbol{M_{DC}} = \int \boldsymbol{V_{BC}}\ \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int 0dx + 0 \ \Rightarrow\ \boldsymbol{M_{DC} = 0\ KN.m}$$

$$\boldsymbol{N_{DC}} = \int \boldsymbol{p(x)}\ \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} = \int 0dx + (-V_D) = 0 - 19{,}5 \Rightarrow\ \boldsymbol{N_{DC} = -19{,}5\ KN}$$

Diagramas dos esforços internos

A) Diagrama de esforço cortante (DEC)

$$\begin{pmatrix} A & & B \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{AB} = -2x + 8}$$

• No ponto A, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{V_A = -2 * 0 + 8 = 8\ KN}$

• No ponto B, temos x = 4 m, logo $\boldsymbol{V_B = -2 * 4 + 8 = -0\ KN}$

$\begin{pmatrix} B & & C \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{BC} = 3x^2 - 24x + 28,5}$

• No ponto B, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{V_B} = 3 * 0^2 * 0 - 24 * 0 + 28{,}5 = \boldsymbol{28,5KN}$

• No ponto C, temos x = 4 m, logo $\boldsymbol{V_C} = 3 * 4^2 - 24 * 4 + 28{,}5 = \boldsymbol{-19,5KN}$

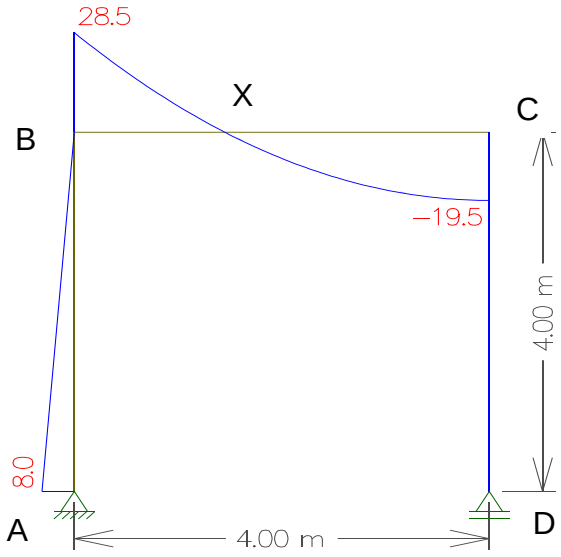
$\begin{pmatrix} D & & C \\ 0 \leq x \leq 4 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{CD} = 0\ KN}$

Lembre-se: o cortante positivo deve ser desenhado do lado oposto ao do observador e o cortante negativo do mesmo lado do observador

DEC (KN)

Fig. 462 – Exemplo 1



Fonte: autor

B) Diagrama do momento fletor (DMF)

$\begin{pmatrix} A & & B \\ 0 \leq x \leq 4 \end{pmatrix} m$

$\boldsymbol{M_{AB} = -x^2 + 8x}$

Dentro do trecho]A, B[, o cortante não se anula, portanto só necessitamos calcular os momentos nas extremidades A e B

• No ponto A, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_A} = -0^2 * 0 + 8 * 0 = \boldsymbol{0\ KN.m}$

• No ponto B, temos x = 4 m, logo $\boldsymbol{M_B} = -4^2 + 8 * 4 = \boldsymbol{16\ KN.m}$

$\begin{pmatrix} B & & C \\ 0 \leq x \leq 4 \end{pmatrix} m$

$\boldsymbol{M_{BC} = x^3 - 12x^2 + 28,5x + 14}$

• No ponto B, temos x = 0 m, logo

$$\boldsymbol{M_B} = 0^3 - 12 * 0^2 + 28,5 * 0 + 14 = \boldsymbol{14\ KN.m}$$

• O momento de valor máximo ($\boldsymbol{M_{máx}}$) ocorre no ponto x onde o cortante é zero ($V_{BC} = 0 \ \ em\ x = 1,45\ m$)

$$\boldsymbol{M_{máx,X}} = 1,45^3 - 12 * 1,45^2 + 28,5 * 1,45 + 14 = \boldsymbol{33,1\ KN.m}$$

• No ponto C, temos x = 4 m, logo

$$\boldsymbol{M_C} = 4^3 - 12 * 4^2 + 28,5 * 4 + 14 = \boldsymbol{0\ KN.m}$$

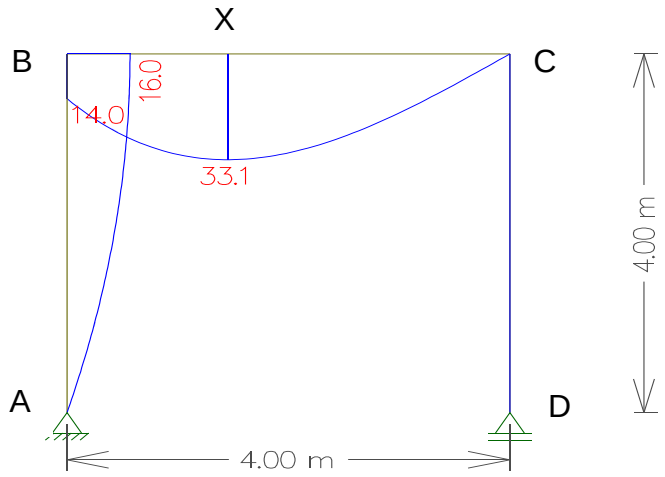
$\begin{pmatrix} D & & C \\ 0 \leq x \leq 4 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{DC} = 0\ KN.m}$

Lembre-se: o momento fletor positivo deve ser desenhado do mesmo lado do observador e o momento negativo do lado oposto ao do observador

DMF (KN.m)

Fig.463 – Exemplo 1



Fonte: autor

C) Diagrama do esforço normal (DEN)

$\begin{pmatrix} A & & B \\ 0 \leq x \leq 4 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{AB} = -28,5\ KN}$

$\begin{pmatrix} B & & C \\ 0 \leq x \leq 4 \end{pmatrix}$

$$N_{BC} = 0\ KN$$

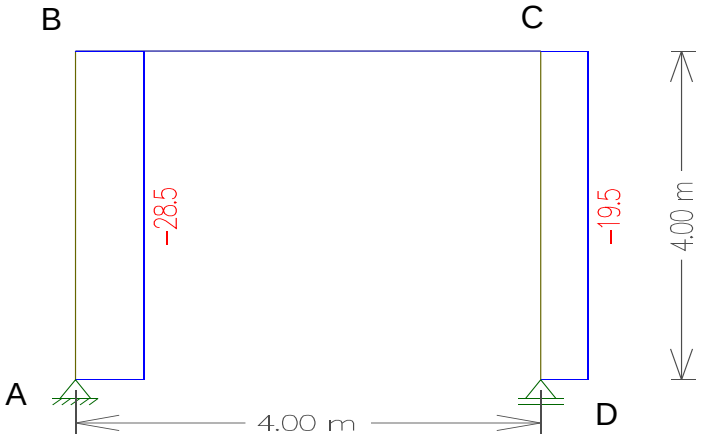
$$\begin{pmatrix} D & C \\ 0 \leq x \leq 4 & \end{pmatrix}$$

$$N_{DC} = -19,5\ KN$$

Lembre-se: o esforço normal positivo deve ser desenhado do lado oposto ao do observador e o normal negativo do mesmo lado do observador

DEN (KN)

Fig. 464 – Exemplo 1

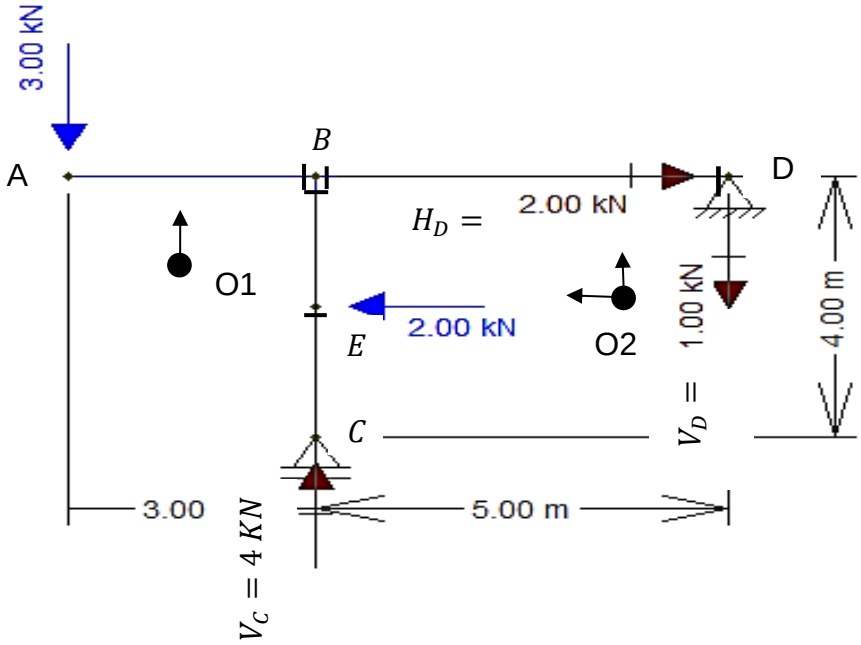


Fonte: autor

2°) Construa os diagramas dos esforços internos para a estrutura reticulada abaixo sujeita a uma carga de 3 KN em A e a uma de 2 KN no ponto E

DCL final

Fig. 465 - Exemplo 2



Fonte: notas de aula

RESP

Observe que o ponto B é extremidade comum a três barras AB, EB e BD, então a análise de cada uma dessas barras deverá ser iniciada pela extremidade oposta ao ponto B, assim não será necessário fazer transferência de forças e ou momentos entre as barras no ponto B

Barra AB pela esquerda (observador 1)

$$\begin{pmatrix} A & & B \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{AB}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\ \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int 0\ dx + (-3) = 0 - 3 \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_{AB} = -3\ KN}$$

$$\boldsymbol{M_{AB}} = \int \boldsymbol{V_{AB}}\ \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int -3\ dx + 0 = -3x \Rightarrow \qquad \boldsymbol{M_{AB} = -3x}$$

$$\boldsymbol{N_{AB}} = \int \boldsymbol{p(x)}\ \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} \Rightarrow \qquad \boldsymbol{N_{AB} = 0\ KN}$$

Barra CE pela esquerda (observador 2)

$$\begin{pmatrix} C & & E \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{CE}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int -0\,dx - 0 = 0 \;\Rightarrow \quad \boldsymbol{V_{CE} = 0}$$

$$\boldsymbol{M_{CE}} = \int \boldsymbol{V_{CE}}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int 0\,dx + 0 = 0 \Rightarrow \quad \boldsymbol{M_{CE} = 0}$$

$$\boldsymbol{N_{CE}} = \int \boldsymbol{p(x)}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} = \int 0\,dx + (-V_C) = 0 + (-4) \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{N_{CE}} = \boldsymbol{-4{,}0\ KN}\ (compressão)$$

• Barra EB pela esquerda (observador 2)

$$\begin{pmatrix} E & & B \\ 0 \le x \le 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{EB}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int -0\,dx + 2 = 0 \;\Rightarrow \quad \boldsymbol{V_{EB} = 2\ KN}$$

$$\boldsymbol{M_{EB}} = \int \boldsymbol{V_{EB}}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int 2\,dx + M_{CE}(E) = 2x + 0 \;\Rightarrow \quad \boldsymbol{M_{EB} = 2x}$$

$$\boldsymbol{N_{EB}} = \int \boldsymbol{p(x)}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} = \int 0\,dx + N_{CE}(E) = 0 + (-4\,) \Rightarrow \quad \boldsymbol{N_{EB} = -4\ KN}$$

Barra DB pela direita (observador 2)

$$\begin{pmatrix} D & & B \\ 0 \le x \le 5 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{DB}} = \int \boldsymbol{q(x)}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int 0\,dx + V_D = 0 + 1 \;\Rightarrow \quad \boldsymbol{V_{DB} = 1\ KN}$$

$$\boldsymbol{M_{DB}} = \int -\boldsymbol{V_{DB}}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int -1\,dx + 0 = -1x \;\Rightarrow \quad \boldsymbol{M_{DB} = -x}$$

$$\boldsymbol{N_{DB}} = \int \boldsymbol{p(x)}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} = \int 0\,dx + H_D = 0 + 2 \Rightarrow \quad \boldsymbol{N_{DB} = 2\ KN}$$

Diagramas dos esforços internos

A) Diagrama de esforço cortante (DEC)

$$\begin{pmatrix} A & & B \\ 0 \le x \le 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{AB} = -3\ KN}$$

$$\begin{pmatrix} C & & E \\ 0 \le x \le 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{CE} = 0\ KN}$$

$$\begin{pmatrix} E & & B \\ 0 \le x \le 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{EB} = 2\ KN}$$

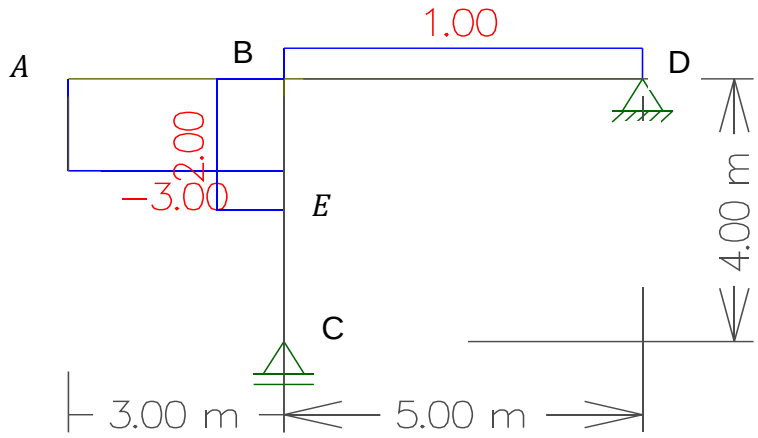
$\begin{pmatrix} D & & B \\ 0 \leq x \leq 5 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{DB} = 1\ KN}$

Lembre-se: o cortante positivo deve ser desenhado do lado oposto ao do observador e o cortante negativo do mesmo lado do observador

DEC (KN)

Fig. 466 – Exemplo 2



Fonte: notas de aula

B) Diagrama do momento fletor (DMF)

$\begin{pmatrix} A & & B \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{AB} = -3x}$

• No ponto A, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_{AB} = -3 * 0 = 0\ KN.m}$

• No ponto B, temos x = 3 m, logo $\boldsymbol{M_{AB} = -3 * 3 = -9\ KN.m}$

$\begin{pmatrix} C & & E \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{CE} = 0\ KN.m}$

$\begin{pmatrix} E & & B \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{EB} = 2x}$

• No ponto E, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_{EB} = 2 * 0 = 0\ KN.m}$

• No ponto B, temos x = 3 m, logo $\boldsymbol{M_{AB} = 2 * 2 = 4\ KN.m}$

$\begin{pmatrix} D & & B \\ 0 \leq x \leq 5 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{DB} = -x}$

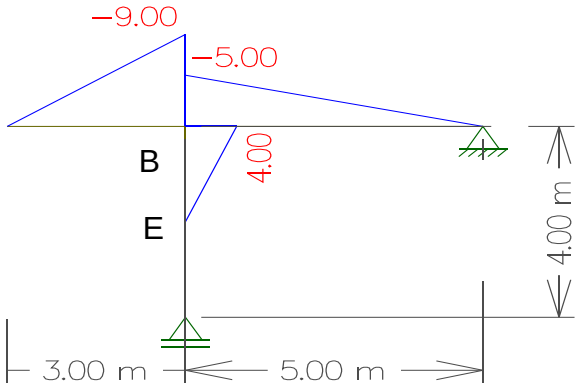
• No ponto D, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_{DB} = -1 * 0 = 0\ KN.m}$

• No ponto B, temos x = 3 m, logo $\boldsymbol{M_{AB} = -1 * 5 = -5\ KN.m}$

Lembre-se: o momento fletor positivo deve ser desenhado do mesmo lado do observador e o momento negativo do lado oposto ao do observador

DMF (KN.m)

Fig. 467 – Exemplo 2



Fonte: nota de aula

C) Diagrama do esforço normal (DEN)

$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{AB} = 0\ KN}$

$\begin{pmatrix} C & E \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{CE} = -4\ KN}$

$\begin{pmatrix} E & B \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{EB} = -4,8\ KN}$

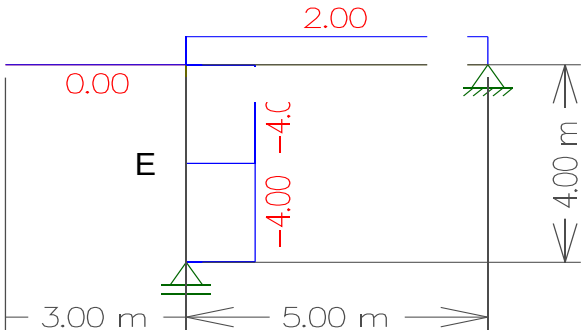
$\begin{pmatrix} D & B \\ 0 \leq x \leq 5 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{DB} = 2\ KN}$

Lembre-se: o esforço normal positivo deve ser desenhado do lado oposto ao do observador e o normal negativo do mesmo lado do observador

DEN (KN)

Fig. 468 – Exemplo 2

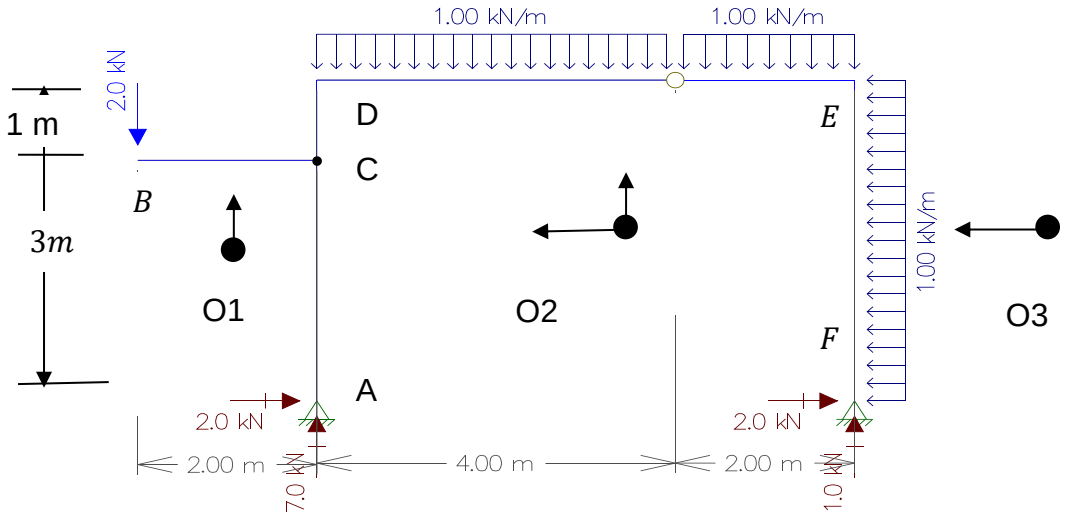


Fonte: nota de aula

3°) Construa os diagramas dos esforços internos para o pórtico tri-articulado abaixo

DCL finaL

Fig. 469 – Exemplo 3



Fonte: notas de aula

RESP

Observe que o ponto C é extremidade das barras AC, BC e CD assim devemos iniciar a análise pelas extremidades livres (pontos A e B) e em seguida transferir cada força da barra AC e BC e seu respectivo momento para o ponto C início da barra CD e só então partimos para a análise do trecho CD

Podemos também iniciar a análise do pórtico pelo apoio da direita (ponto F), mas nesse caso específico a análise pela esquerda é mais fácil

• **Barra AC (observador 2)**

$\begin{pmatrix} A & & C \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{V_{AC}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int -0\, dx + (-H_A) = 0 + (-2) \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_{AC} = -2\ KN}$$

$$\boldsymbol{M_{AC}} = \int \boldsymbol{V_{AC}}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int \boldsymbol{-2dx + 0 = -2x} \Rightarrow \quad \boldsymbol{M_{AC} = -2x}$$

$$\boldsymbol{N_{AC}} = \int \boldsymbol{p(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} = \int 0\, dx + V_1 = 0 + (-7) \Rightarrow \quad \boldsymbol{N_{AC} = -7KN}$$

- **Barra BC observador 1**

$\begin{pmatrix} B & & C \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{V_{BC}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int 0\, dx + (-2) = 0 - 2 \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_{BC} = -2\ KN}$$

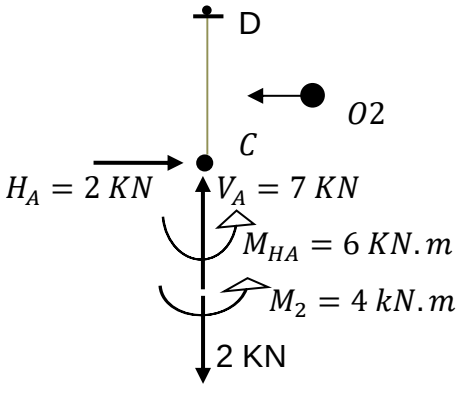
$$\boldsymbol{M_{BC}} = \int \boldsymbol{V_{BC}}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int -2\, dx + 0 = -2x \Rightarrow \quad \boldsymbol{M_{BC} = -2x}$$

$$\boldsymbol{N_{BC}} = \int \boldsymbol{p(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} \Rightarrow \quad \boldsymbol{N_{BC} = 0\ KN}$$

- **Barra CD (observador 2)**

Para analisar a barra CD devemos transferir as forças das barras AC e BC com seus respectivos momentos para o ponto C início da barra CD como mostrado na figura abaixo.

Fig. 470 – Exemplo 3 (barra CD)



M_{HA}

$\rightarrow$ é $o\ momento\ produzido\ no\ ponto\ C\ pela\ reação\ horizontal\ H_A.\ Entra\ como\ ne$

$gativo\ nos\ cálculos,$

$pois\ traciona\ as\ fibras\ do\ lado\ oposto\ ao\ do\ observador$

$M_2 \rightarrow momento\ produzido\ no\ ponto\ C\ pela\ força\ de\ 2\ kN\ aplicada\ no\ ponto\ B\ da$

$barra\ BC. Entra\ como\ negativo\ nos\ cálculos,$

$pois\ traciona\ as\ fibras\ do\ lado\ oposto$

$ao\ do\ observador$

•

$A\ reação\ vertical\ V_A\ não\ produz\ momento\ em\ relação\ ao\ ponto\ C, pois\ sua\ linha$

$de\ ação\ passa\ pelo\ referido\ ponto$

$\begin{pmatrix} C & & D \\ 0 \leq x \leq 1 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{V_{CD}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\ \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int -0\ dx + (-H_A) = 0 + (-2) \Rightarrow \qquad \boldsymbol{V_{CD} = -2\ KN}$$

$$\boldsymbol{M_{CD}} = \int \boldsymbol{V_{CD}}\ \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int -2\ dx + (-M_{HA} - M_2) = -2x + (-6 - 4)\ \Rightarrow$$

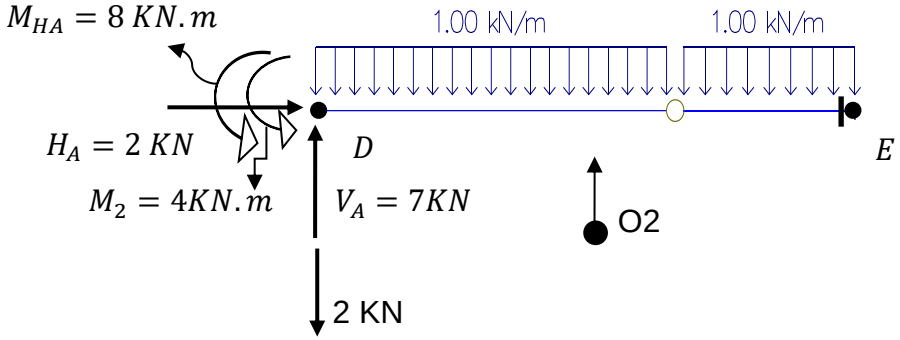
$$\boldsymbol{M_{CD} = -2x - 10}$$

$$\boldsymbol{N_{CD}} = \int \boldsymbol{p(x)}\ \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} = \int 0\ dx + (-V_A + 2) = 0 + (-7 + 2)\ \Rightarrow \quad \boldsymbol{N_{BD} = -5}$$

• Barra DE (observador 2)

Vamos analisar a barra DE pela esquerda. Primeiramente olhamos para o DCL final da estrutura e transferimos as forças atuantes nas barras AC e BC e seus respectivos momentos para o ponto D início da barra DE como mostra a figura abaixo

Fig. 471 – Exemplo 3 (Barra DE)



Fonte: autor

$\begin{pmatrix} D & & E \\ 0 \leq x \leq 6 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{V_{DE}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\ \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int -1\ dx + (V_A - 2) = -x + (7 - 2) \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_{DF}}$$

$$= \boldsymbol{-x + 5}$$

$$\boldsymbol{M_{DE}} = \int \boldsymbol{V_{DE}}\ \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int (-x + 5)\ dx + (-M_{H1} - M_2) = \frac{-x^2}{2} + 5x + (-8 - 4)$$

$$\boldsymbol{M_{DE} = -0,5x^2 + 5x - 12}$$

$$\boldsymbol{N_{DE}} = \int \boldsymbol{p(x)\,dx} + \sum \boldsymbol{N'} \Rightarrow \boldsymbol{N_{DE}} = \int 0\,dx + (-H_A) = 0 + (-2) \Rightarrow \quad \boldsymbol{N_{DE} = -2}$$

• **Barra EF observador 3**

Vamos analisar a barra FE iniciando pelo ponto F, assim não será necessário transferir forças e ou momentos entre barras no ponto E

$$\begin{pmatrix} F & E \\ 0 \le x \le 4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{FE}} = \int \boldsymbol{q(x)\,dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int 1\,dx + (-V_F) = x + (-2) \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_{FE} = x - 2}$$

$$\boldsymbol{M_{FE}} = \int \boldsymbol{V_{FE}\,dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int (x-2)\,dx + 0 = \frac{x^2}{2} - 2x + 0 \Rightarrow \quad \boldsymbol{M_{FE} = 0,5x^2 - 2x}$$

$$\boldsymbol{N_{FE}} = \int P(x)dx + \sum N' = \int 0\,dx + (-V_F) = 0 + (-1) \Rightarrow \quad \boldsymbol{N_{FE} = -1\ KN}$$

Diagramas de esforços internos

A) Diagrama de esforço cortante DEC (KN)

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 \le x \le 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{AC} = -2\ KN}$$

$$\begin{pmatrix} B & C \\ 0 \le x \le 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{CB} = -2\ KN}$$

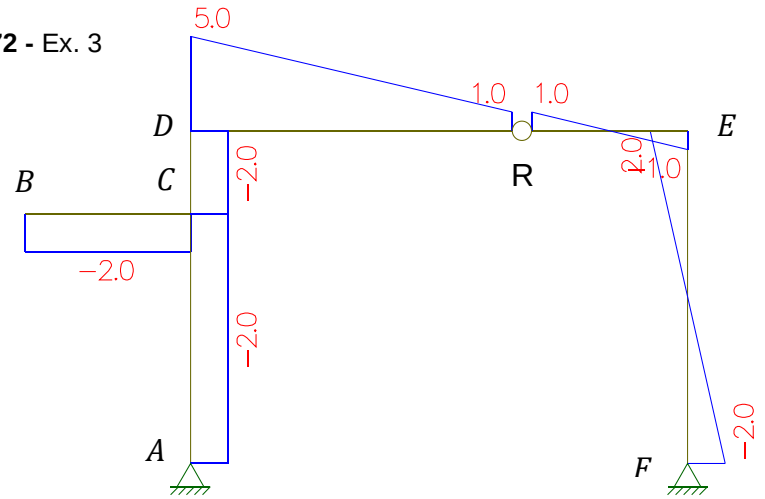
$$\begin{pmatrix} B & D \\ 0 \le x \le 1{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{BD} = -2\ KN}$$

$$\begin{pmatrix} D & E \\ 0 \le x \le 6 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{DE} = -x + 5}$$

Fig.472 - Ex. 3



Fonte: autor

• No ponto D, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{V_D = -0 + 5 = 5\ KN}$

• No ponto E, temos x = 6 m, logo $\boldsymbol{V_E = -6 + 5 = -1\ KN}$

$$\begin{pmatrix} F & E \\ 0 \le x \le 4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{FE} = x - 2}$$

Lembre-se: o cortante positivo deve ser desenhado do lado oposto ao do observador e o cortante negativo do mesmo lado do observador

B) Diagrama do momento fletor (DMF)

$\begin{pmatrix} A & & C \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{AB} = -2x}$

• No ponto A, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_A = -2 * 0 = 0\ KN.m}$

• No ponto B, temos x = 3 m, logo $\boldsymbol{M_C = -2 * 3 = -6\ KN.m}$

$\begin{pmatrix} B & & C \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{BC} = -2x}$

• No ponto B, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_B = -2 * 0 = 0\ KN.m}$

• No ponto C, temos x = 2 m, logo $\boldsymbol{M_C = -2 * 2 = -4\ KN.m}$

$\begin{pmatrix} C & & D \\ 0 \leq x \leq 1 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{CD} = -2x - 10}$

• No ponto C, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_C = -2 * 0 - 10 = -10\ KN.m}$

• No ponto D, temos x = 1 m, logo $\boldsymbol{M_D = -2 * 1 - 10 = -12\ KN.m}$

$\begin{pmatrix} D & & E \\ 0 \leq x \leq 6 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{DE} = -0,5x^2 + 5x - 12}$

• No ponto D, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_D = -0,5 * 0^2 + 5 * 0 - 12 = -12\ KN.m}$

• Na rótula (x = 4 m) o momento é zero, porém vamos calcular para confirmar o resultado

$\boldsymbol{M_R = -0,5 * 4^2 + 5 * 4 - 12 = 0\ KN.m}$

• No ponto médio do trecho RE, onde o cortante V_{DE} é zero temos x = 5 m

$\boldsymbol{M = -0,5 * 5^2 + 5 * 5 - 12 = 0,5\ kN.m}$

• No ponto E, temos x = 6 m, logo $\boldsymbol{M_F = -0,5 * 6^2 + 5 * 6 - 12 = 0\ KN.m}$

$\begin{pmatrix} F & & E \\ 0 \leq x \leq 4 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{FE} = 0,5x^2 - 2x}$

• No ponto F, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_F = 0,5 * 0^2 - 2 * 0 = 0\ KN.m}$

• No ponto, onde o cortante $\boldsymbol{V_{FE}}$ é zero temos x = 2 m, logo

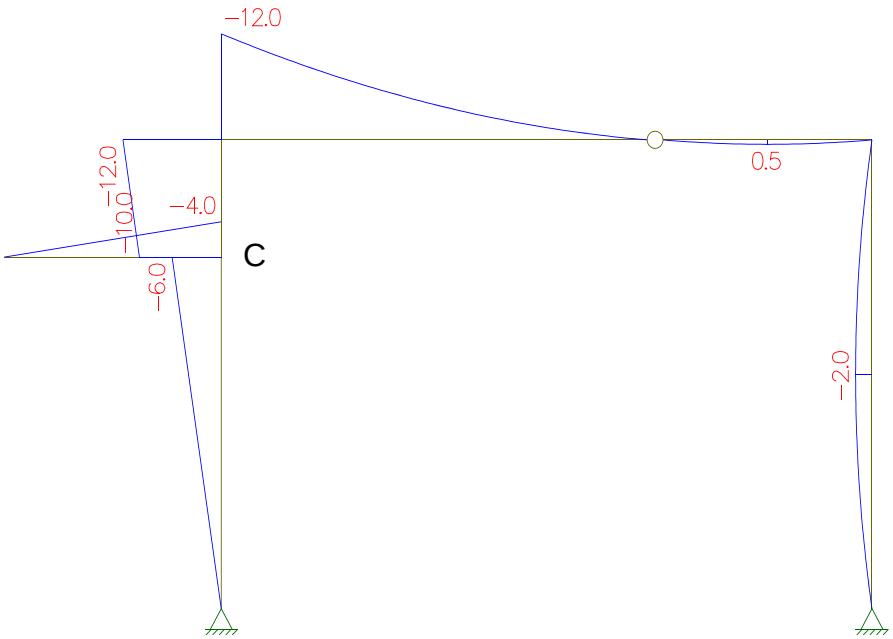
$\boldsymbol{M_{FE} = 0,5 * 2^2 - 2 * 2 = -2\ KN.m}$

• No ponto E, temos x = 6 m, logo $\boldsymbol{M_E = -0,5 * 4^2 + 2 * 4 = 0\ KN.m}$

Lembre-se: o momento positivo deve ser desenhado do mesmo lado do observador e o momento negativo do lado oposto ao do observador.

DMF $(KN.m)$

Fig. 473 – Exemplo 3



Fonte: autor

C) Diagrama do esforço normal DEN (KN)

$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{AB} = -7\ KN}$

$\begin{pmatrix} B & C \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{BC} = 0\ KN}$

$\begin{pmatrix} C & D \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$

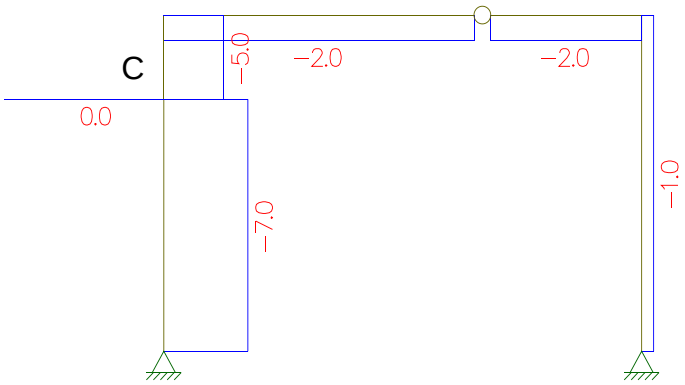
$\boldsymbol{N_{CD} = -5\ KN}$

$\begin{pmatrix} D & E \\ 0 \leq x \leq 6 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{DE} = -2\ KN}$

$\begin{pmatrix} F & E \\ 0 \leq x \leq 4 \end{pmatrix}$

Fig.474 – Ex. 3



Fonte: autor

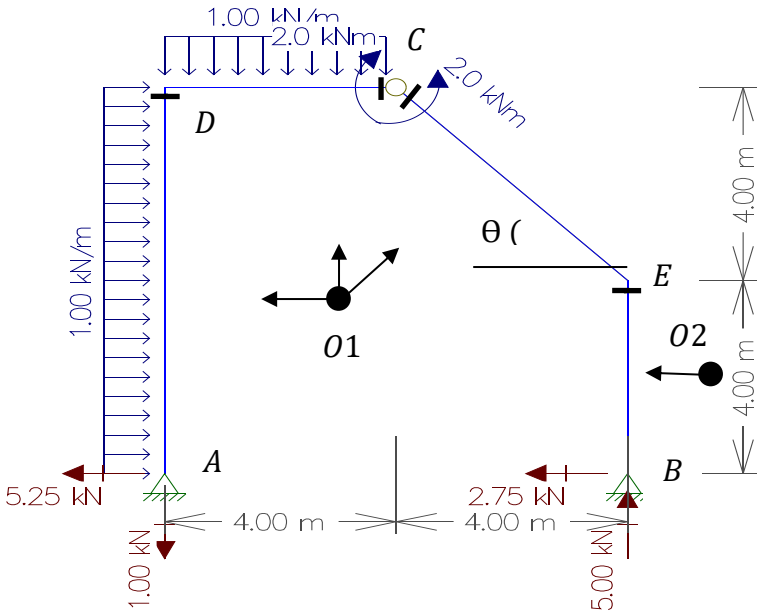
$\boldsymbol{N_{FE} = -1\ KN}$

Lembre-se: o esforço normal positivo deve ser desenhado do lado oposto ao do observador e o negativo do mesmo lado do observador

4°) Construa os diagramas dos esforços internos para o pórtico tri-articulado abaixo

DCL final

Fig. 475 – Exemplo 4



Fonte: notas de aula

Resp.

Vamos iniciar a análise pelo apoio A e seguir até a rótula C. Depois analisaremos a partir do apoio B até a rótula C. Assim evitaremos ter que transferir esforços entre as barras DC e CE na rótula. Os trechos de análise estão indicados na figura acima

• Barra AD (observador 1)

$\begin{pmatrix} A & D \\ 0 \leq x \leq 8 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{V_{AD}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int -1\,dx + H_A = -x + 5{,}25 \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_{AD} = -x + 5{,}25}$$

$$\boldsymbol{M_{AD}} = \int \boldsymbol{V_{AD}}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int (-x + 5{,}25)\,dx + 0 = \frac{-x^2}{2} + 5{,}25x \Rightarrow$$

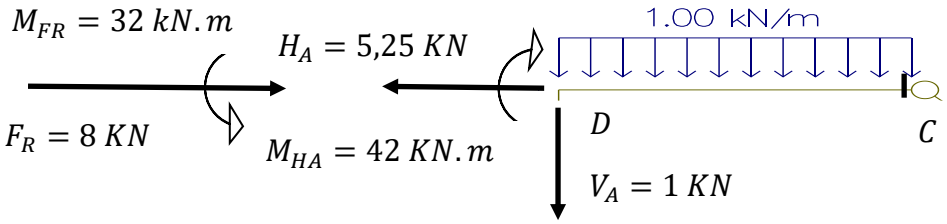
$$\boldsymbol{M_{AD} = -0{,}5x^2 + 5{,}25x}$$

$$\boldsymbol{N_{AD}} = \int \boldsymbol{p(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} = \int 0\, dx + V_A = 0 + 1 \Rightarrow \quad \boldsymbol{N_{AD} = 1\, KN}$$

• **Barra DC pela esquerda (observador 1)**

Para analisar a barra DC pela esquerda temos que transferir para o ponto D os esforços da barra vertical AD

Fig. 476 – Exemplo 4



Fonte: autor

• $M_{HA} \rightarrow momento\ da\ reação\ H_A\ no\ ponto\ D\ da\ barra\ DC$

• $F_R \rightarrow força\ resultente\ do\ cerregamento\ distribuído\ ao\ longo\ da\ barra\ AD$

•$M_{FR} \rightarrow momento, no\ ponto\ D, da\ força\ resultante\ do\ carregamento\ distribuído\ na\ barra\ AD$

Lembre-se: os esforços na extremidade final de um trecho não entram nas equações do trecho, por isso, o momento de $2\,KN.m$ aplicado na rótula C, extremidade final do trecho DC, não foi considerado.

$$\begin{pmatrix} D & & C \\ 0 \leq x \leq 4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{DC}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int -1\, dx + (-V_A) = -x + (-1) \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_{DC} = -x - 1}$$

$$\boldsymbol{M_{DC}} = \int \boldsymbol{V_{DC}}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int (-x - 1)\, dx + (M_{HA} - M_{FR}) \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{M_{DC}} = \frac{-x^2}{2} - x + (42 - 32) \Rightarrow \quad \boldsymbol{M_{DC} = -0{,}5x^2 - x + 10}$$

$$\boldsymbol{N_{DC}} = \int \boldsymbol{p(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} = \int 0\, dx + (H_A - F_R) = 0 + \Rightarrow \boldsymbol{N_{DC}} = 0 + (5{,}25 - 8) \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{N_{DC} = -2{,}75}$$

Agora vamos analisar a partir do apoio B, assim evitamos os cálculos para transferir os esforços da barra DC para a barra CE na rótula C.

• **Barra BE (observador 2)**

$$\begin{pmatrix} B & & E \\ 0 \leq x \leq 4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{BE}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int 0\,dx + H_B = 0 + 2{,}75 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{V_{BE} = 2{,}75\,KN}$$

$$\boldsymbol{M_{BE}} = \int \boldsymbol{V_{BE}}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int 2{,}75\,dx + 0 = 2{,}75x \;\Rightarrow\; \boldsymbol{M_{BE} = 2{,}75x}$$

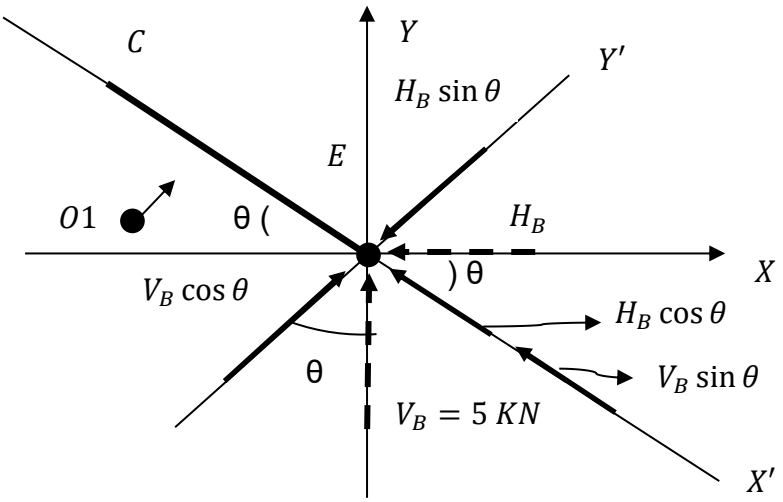
$$\boldsymbol{N_{BE}} = \int \boldsymbol{p(x)}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} = \int 0\,dx + V_B = 0 - 5 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{N_{BE} = -5}$$

• **Barra EC observador O1**

Para analisar a barra inclinada EC devemos primeiro transferir as forças da barra vertical BE para o ponto E início da barra EC e obter as componentes de cada força na direção paralela e perpendicular a barra EC

Observe a figura abaixo

Fig. 477 – Exemplo 4



Fonte: autor

onde

• $\theta = \tan^{-1}(\frac{4}{4}) = 45°$

• Comprimento (L_{EC}) da barra EC → $\boldsymbol{L_{EC}} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = \boldsymbol{5{,}66\,m}$

Vamos adotar como positivas as componentes no sentido x' e y', assim temos:

• Força cortante $\boldsymbol{V_E}$ aplicado no ponto E da barra EC

$$\boldsymbol{V_E} = V_B \cos\theta - H_B \sin\theta = 5\cos 45° - 2{,}75 \sin 45° = 3{,}54 - 1{,}94 = \boldsymbol{1{,}59\,KN}$$

$(V_E\ atua\ no\ sentido\ de\ y', pois\ resultou\ positiva)$

• Força axial $\boldsymbol{N_E}$ aplicada no ponto E da barra EC

$\boldsymbol{N_E} = -H_B \cos 45° - V_B \sin 45° = -2{,}75 \cos 45° - 5 \sin 45° = \boldsymbol{-5{,}48\ KN}$

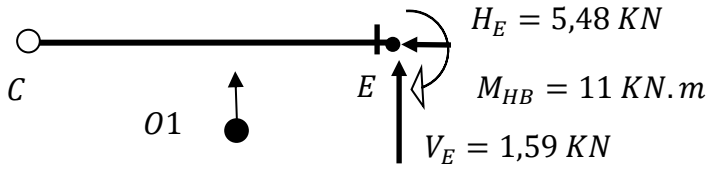
$(N_E\ atua\ no\ sentido\ contrário\ a\ x', pois\ resultou\ negativa)$

Agora giramos a barra EC no sentido anti-horário (menor ângulo) e desenhamos ela na horizontal aplicando as forças obtidas no ponto E. Não podemos esquecer de olhar o DCL final e transferir, para o ponto E, o momento que cada força aplicada na barra vertical BE produz no ponto E da barra EC. Nesse caso somente H_B produz momento no ponto E da barra EC

• $\boldsymbol{M_{HB}} = 2{,}75 * 4 = \boldsymbol{11\ KN.m}\ (sentido\ horário)$

Aplicando, na barra EC, as forças e os momentos obtidos, temos o esquema mostrado na figura abaixo

Fig. 478 – Exemplo 4



Fonte: autor

Lembre-se: os esforços na extremidade final não entram nas equações de um trecho, por isso não é necessário desenhar o momento de $2\ KN.m$ aplicado no ponto C final da barra EC

• **Barra EC pela direita**

$\begin{pmatrix} E & C \\ 0 \le x \le 5{,}66 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{V_{EC}} = \int \boldsymbol{q(x)}\ \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int 0\ dx + (-V_E) = 0 + (-1{,}59) \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_{EC} = -1{,}59}$$

$$\boldsymbol{M_{EC}} = \int -\boldsymbol{V_{EC}}\ \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int -(-1{,}59)\ dx + M_{HB} = 1{,}59x - 11 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{M_{EC} = 1{,}59x - 11}$$

$$\boldsymbol{N_{EC}} = \int \boldsymbol{p(x)}\ \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} = \int 0\ dx + (-N_E) = 0 + (-5{,}48) \ \Rightarrow\ \boldsymbol{N_{EC} = -5{,}48\ KN}$$

Diagramas de esforços internos

A) Diagrama de esforço cortante (DEC)

$\begin{pmatrix} A & D \\ 0 \le x \le 8 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{V_{AD} = -x + 5{,}25}$$

• No ponto A, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{V_A = -0 + 5{,}25 = 5{,}25\ KN}$

• No ponto D, temos x = 8 m, logo $\boldsymbol{V_D = -8 + 5{,}25 = -2{,}75\ KN}$

$\begin{pmatrix} D & C \\ 0 \leq x \leq 4 & \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{DC} = -x - 1}$

• No ponto D, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{V_D = -0 - 1 = -1\ KN}$

• No ponto C, temos x = 8 m, logo $\boldsymbol{V_C = -4 - 1 = -5\ KN}$

$\begin{pmatrix} B & E \\ 0 \leq x \leq 4 & \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{BE} = 2{,}75\ KN}$ $(constante\ no\ trecho\ BE)$

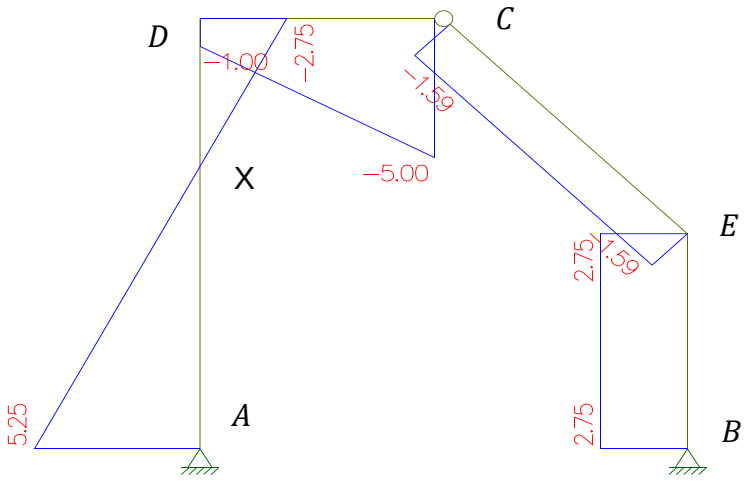
$\begin{pmatrix} E & C \\ 0 \leq x \leq 5{,}66 & \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{EC} = -1{,}59\ KN}$ $(constante\ no\ trecho\ EC)$

Lembre-se: o cortante positivo deve ser desenhado do lado oposto ao do observador e o cortante negativo do mesmo lado do observador

DEC (KN)

Fig. 479 – Exemplo 4



Fonte: autor

B) Diagrama do momento fletor (DMF)

$\begin{pmatrix} A & D \\ 0 \leq x \leq 8 & \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{AD} = -0{,}5x^2 + 5{,}25x}$

• No ponto A, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_A = -0{,}5 * 0^2 + 5{,}25 * 0 = 0\ KN.m}$

• No ponto x onde o cortante V_{AD} é zero (x = 5,25 m), temos:

$\boldsymbol{M_x = -0{,}5 * 5{,}25^2 + 5{,}25 * 5{,}25 = 13{,}78\ KN.m}$

• No ponto D, temos x = 8 m, logo $\boldsymbol{M_D = -0{,}5 * 8^2 + 5{,}25 * 8 = 10\ KN.m}$

$\begin{pmatrix} D & & C \\ 0 \leq x \leq 4 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{DC} = -0{,}5x^2 - x + 10}$

O cortante nunca é zero no trecho DC, logo o momento máximo ocorre no(s) extremos (s)

• No ponto D, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_D = -0{,}5 * 0^2 - 0 + 10 = 10\ KN.m}$

• No ponto C (rótula), temos x = 8 m, logo

$\boldsymbol{M_C = -0{,}5 * 4^2 - 4 + 10 = -2\ KN.m}$ (esse caso, o momento na rótula C não é zero, pois existe um momento externo de valor 2KN.m aplicado na rótula)

$\begin{pmatrix} B & & E \\ 0 \leq x \leq 4 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{BE} = 2{,}75x}$

• No ponto B, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_B = 2{,}75 * 0 = 0\ KN.m}$

• No ponto E, temos x = 4 m, logo $\boldsymbol{M_E = 2{,}75 * 4 = 11\ KN.m}$

$\begin{pmatrix} E & & C \\ 0 \leq x \leq 5{,}66 \end{pmatrix}$

Como o cortante nunca é zero, no trecho EC, o momento máximo ocorre no(s) extremos(s)

$\boldsymbol{M_{EC} = 1{,}59x - 11}$

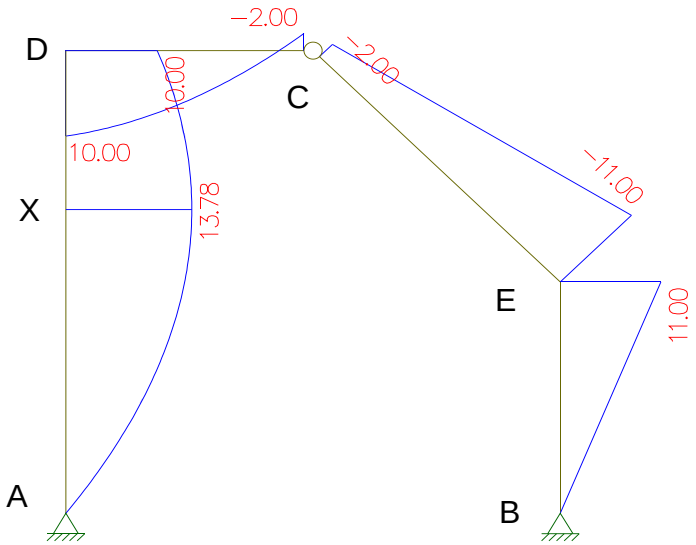
• No ponto E, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_E = 1{,}59 * 0 - 11 = 11\ KN.m}$

• No ponto C, temos x = 5,66 m, logo $\boldsymbol{M_C = 1{,}59 * 5{,}66 - 11 = -2\ KN.m}$

Lembre-se: o momento positivo deve ser desenhado do mesmo lado do observador e o momento negativo do lado oposto ao do observador

DMF ($KN.m$)

Fig. 480 – Exemplo 4



Fonte: autor

C) Diagrama de esforço normal DEN (KN)

$\begin{pmatrix} A & D \\ 0 \leq x \leq 8 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{AD} = 1\ KN}$

$\begin{pmatrix} D & C \\ 0 \leq x \leq 4 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{DC} = -2,75\ KN}$

$\begin{pmatrix} B & E \\ 0 \leq x \leq 4 \end{pmatrix}$

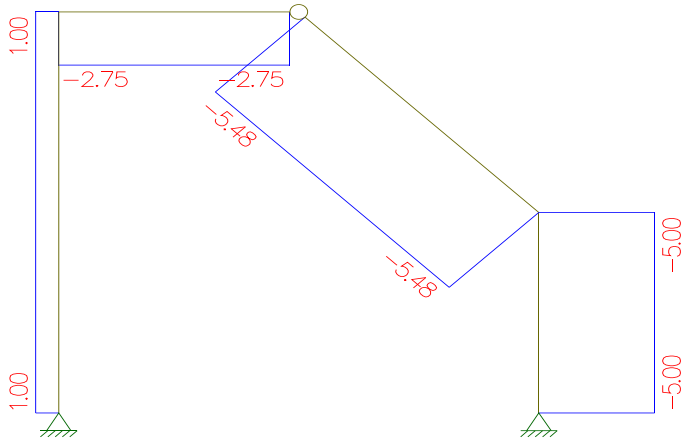
$\boldsymbol{N_{BE} = -5\ KN}$

$\begin{pmatrix} E & C \\ 0 \leq x \leq 5{,}66 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{EC} = -5,48}$

Lembre-se: o esforço normal positivo deve ser desenhado do lado oposto ao do observador e o negativo do mesmo lado do observador

Fig. 481 – Exemplo 4

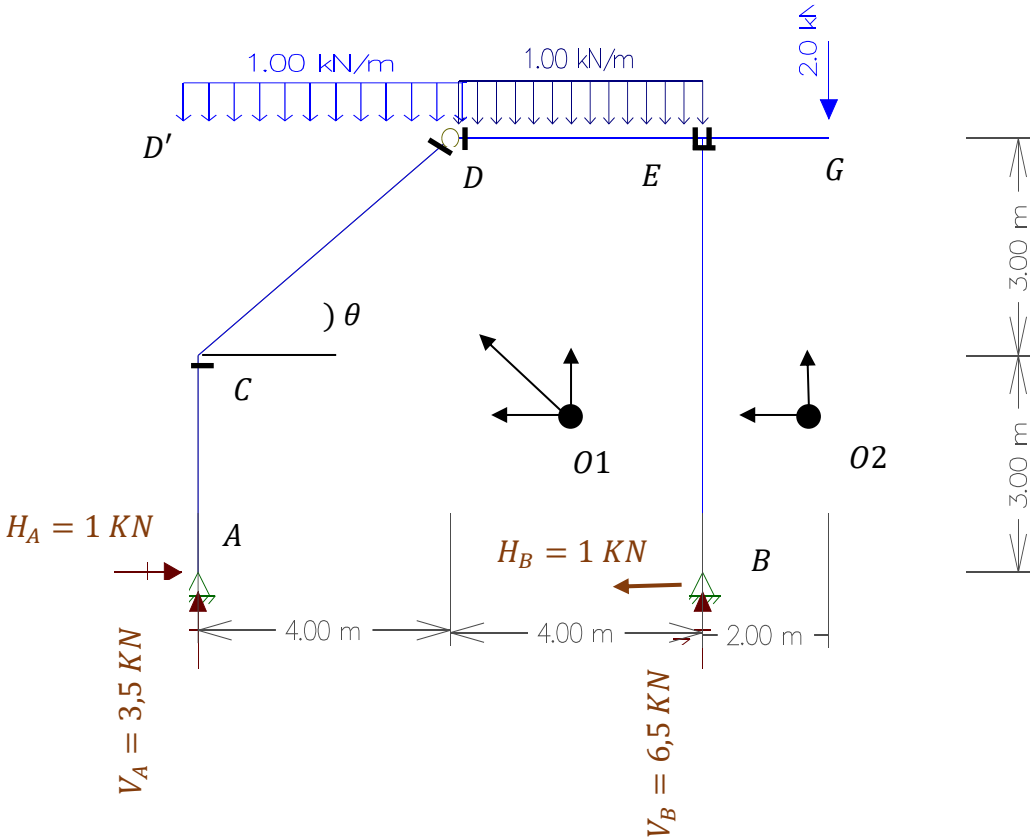


Fonte: autor

5°) Construa os diagramas dos esforços internos para o pórtico tri-articulado abaixo

DCL final

Fig. 482 – Exemplo 5



Fonte: notas de aula

Resp.

Vamos iniciar a análise pela esquerda, do ponto A até o ponto E. Depois analisaremos a barra BE e a barra GE

• Barra AC (observador 1)

$$\begin{pmatrix} A & & C \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{AC}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int 0\,dx + (-H_A) = 0 + (-1) \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_{AC} = -1\ kN}$$

$$\boldsymbol{M_{AC}} = \int \boldsymbol{V_{AC}}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int -1\,dx + 0 = -x \ \Rightarrow \quad \boldsymbol{M_{AC} = -x}$$

$$\boldsymbol{N_{AC}} = \int \boldsymbol{p(x)}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} = \int 0\,dx + (-V_A) = 0 + (-3{,}5) \Rightarrow \quad \boldsymbol{N_{AC} = -3{,}5\ KN}$$

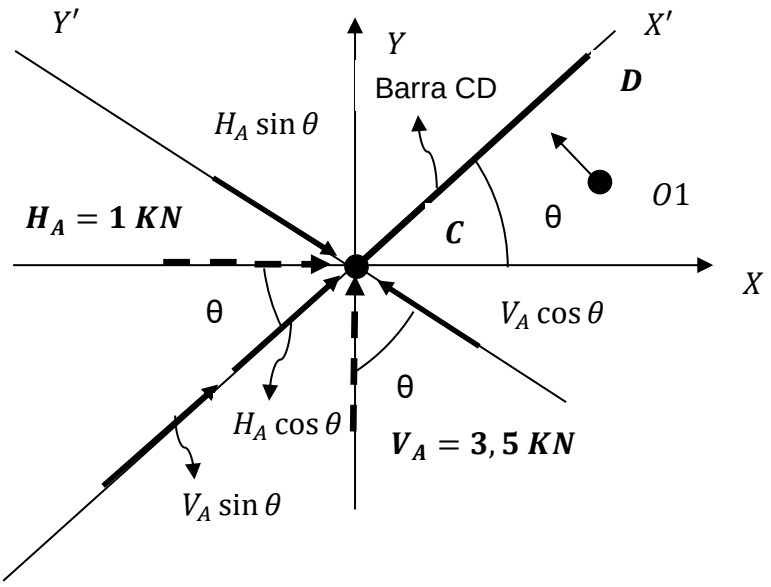
• Barra CD (observador O1)

Para o cálculo dos esforços internos na barra CD é necessário primeiro transferir para o ponto C as forças que atuam na barra AC e determinar as componentes dessas forças e as do carregamento D'D na direção perpendicular e paralela a barra inclinada CD.

Componentes das cargas concentradas (reações)

A figura abaixo mostra o esquema para a obtenção das componentes das cargas concentradas que atuam na barra CD

Fig. 482 – Exemplo 5



Fonte: autor

Assim:

$\boldsymbol{L_{CD}} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = \mathbf{5}\ \boldsymbol{m};$ $\boldsymbol{\theta} = \tan^{-1}(\frac{b}{a}) = \tan^{-1}(\frac{3}{4}) = \mathbf{36,87}°$

Vamos adotar como positivas as componentes no sentido de x' e y', assim temos:

• Força cortante V_C no ponto C da barra CD

$\boldsymbol{V_C} = \boldsymbol{V_A}\ \mathbf{cos}\ \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{H_A}\ \mathbf{sin}\ \boldsymbol{\theta} = 3{,}5 \cos 36{,}869° - 1 \sin 36{,}869° = 2, = \mathbf{2,20}\ \boldsymbol{KN}$

$(V_C\ resultou\ positiva, então\ atua\ no\ sentido\ de\ Y')$

• Força axial H_C no ponto C da barra CD

• $\boldsymbol{H_C} = \boldsymbol{V_A}\ \mathbf{cos}\ \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{H_A}\ \mathbf{sin}\ \boldsymbol{\theta} = 3{,}5 \sin 36{,}869° + 1 \cos 36{,}869° = \mathbf{2,90}\ \boldsymbol{KN}$

$(H_C\ resultou\ positiva, então\ atua\ no\ sentido\ de\ X')$

Não esqueça de observar o DCL final e transferir também o momento de cada força para o ponto C da barra CD. Nesse caso somente H_A produz momento no ponto C

• $\boldsymbol{M_{HA}} = 1 * 3 = \mathbf{3}\ \boldsymbol{KN.m}\ (sentido\ antihorário)$

Componentes na viga inclinada CD devidas ao carregamento distribuído DD'

Nesse caso, resolvemos como no exemplo 1 do item 10.13

A) Componente transversal do carregamento uniformemente distribuído DD'

$\boldsymbol{q_{CD}} = \boldsymbol{q_{DD'}} * (\mathbf{cos}\ \boldsymbol{\theta})^{\mathbf{2}} = 1(\cos 36.87°)^2 = \mathbf{0,64}\ \boldsymbol{KN/m}$ $\quad \boldsymbol{ou}$

$\boldsymbol{q_{CD}} = \boldsymbol{q_{DD'}} * \left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{L}}\right)^{\mathbf{2}} = 1 * \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \mathbf{0,64}\ \boldsymbol{KN/m}$

B) componente do carregamento DD' distribuída na direção paralela à barra CD

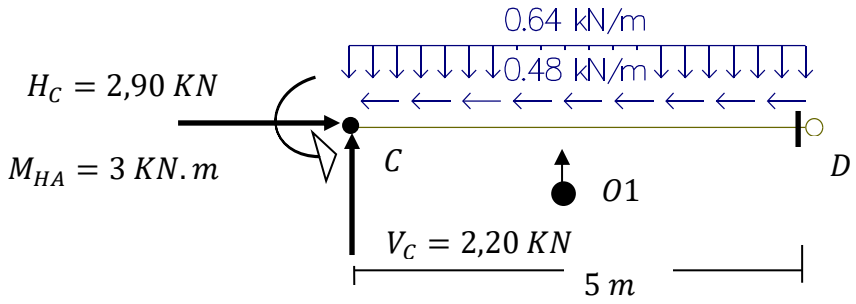
$\boldsymbol{P_{CD}} = \frac{\boldsymbol{q_{DD'}} * \mathbf{sin}\ \mathbf{2}\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{2}} = \frac{1 * \sin(2 * 36{,}87°)}{2} = \mathbf{0,48}\frac{\boldsymbol{KN}}{\boldsymbol{m}}\ (de\ D\ para\ C)\ \ ou$

$\boldsymbol{P_{CD}} = \frac{\boldsymbol{q} * \boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{L_{CD}}^{\mathbf{2}}} = \frac{1 * 4 * 3}{5^2} = \mathbf{0,48}\ \boldsymbol{KN/m}$

(Para encontrar o sentido da componente axial distribuído decomponha uma força F qualquer atuando na mesma direção e sentido do carregamento inicial e obtenha a componente na direção paralela à barra inclinada. Essa componente tem o mesmo sentido da componente distribuída axial)

Aplicando, em uma barra horizontal equivalente CD, as forças obtidas, temos

Fig. 483 – Exemplo 5



Fonte: autor

• Barra CD pela esquerda (observador O1)

$$\begin{pmatrix} C & & D \\ 0 \leq x \leq 5 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{CD}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\ \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int -0{,}64\ dx + V_C = -0{,}64x + 2{,}2 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{V_{CD} = -0{,}64x + 2{,}2}$$

$$\boldsymbol{M_{CD}} = \int \boldsymbol{V_{CD}}\ \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int (-0{,}64x + 2{,}2)\ dx + (-M_{HA}) \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{M_{CD}} = \frac{-0{,}64x^2}{2} + 2{,}2x + (-3) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{M_{CD} = -0{,}32x^2 + 2{,}2x - 3}$$

$$\boldsymbol{N_{CD}} = \int \boldsymbol{p(x)}\ \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} = \int 0{,}48\ dx + (-H_C) = 0{,}48x + (-2{,}9) \Rightarrow$$

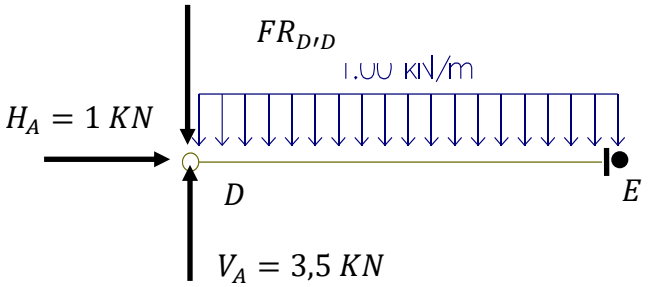
$$\boldsymbol{N_{CD} = 0{,}48x - 2{,}9}$$

• Barra DE pela esquerda (observador 1)

Primeiramente observando o DCL final da estrutura transferimos para o ponto D da barra DE todas as forças concentradas e as resultantes de carregamentos distribuídos existentes à esquerda do ponto D acompanhadas de seus respectivos momentos. Nesse caso, não há necessidade de transferir os momentos, pois o ponto D é uma rótula e já sabemos que rótula não transmite momento entre barras.

O observador 1 vê a barra DE como mostrado abaixo

Fig. 484- Exemplo 5



Fonte: autor

$$\begin{pmatrix} D & & E \\ 0 \leq x \leq 4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{DE}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\ \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int -1\ dx + (V_A - F_R) = -x + (3{,}5 - 4) \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{V_{DE} = -x - 0{,}5}$$

$$\boldsymbol{M_{DE}} = \int \boldsymbol{V_{DE}}\ \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int (-x - 0{,}5)\ dx + 0 = \frac{-x^2}{2} - 0{,}5x \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{M_{DE} = -0{,}5x^2 - 0{,}5x}$$

$$\boldsymbol{N_{DE}} = \int \boldsymbol{p(x)}\ \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} = \int 0\ dx + (-H_A) = 0 + (-1) \Rightarrow \quad \boldsymbol{N_{DE} = -1\ KN}$$

• Barra BE pela esquerda, ou seja, partindo do ponto B (observador 2)

$$\begin{pmatrix} B & & E \\ 0 \leq x \leq 6 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{BE}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\ \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int 0\ dx + H_B = 0 + 1 = 1 \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_{BE} = 1\ KN}$$

$$\boldsymbol{M_{BE}} = \int \boldsymbol{V_{BE}}\ \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int 1\ dx + 0 = x + 0 = x \Rightarrow \quad \boldsymbol{M_{BE} = x}$$

$$\boldsymbol{N_{BE}} = \int \boldsymbol{p(x)}\ \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} = \int 0\ dx + (-V_B) = 0 + (-6{,}5) \Rightarrow \quad \boldsymbol{N_{DE} = -6{,}5\ KN}$$

• Barra GE pela direita, ou seja, partindo do ponto G (observador 2)

$$\begin{pmatrix} G & & E \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{GE}} = \int \boldsymbol{q(x)}\ \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int 0\ dx + (-2) = 0 + 2 = 2 \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_{GE} = 2\ KN}$$

$$\boldsymbol{M_{GE}} = \int -\boldsymbol{V_{GE}}\ \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int -(-2)\ dx + 0 = 2x + 0 = 2x \Rightarrow \quad \boldsymbol{M_{GE} = 2x}$$

$$\boldsymbol{N_{GE}} = \int \boldsymbol{p(x)}\ \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} = \int 0\ dx + 0 = 0 + 0 \Rightarrow \quad \boldsymbol{N_{GE} = 0\ KN}$$

Diagramas de esforços internos

A) Diagrama de esforço cortante (DEC)

$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{AC} = -1\ KN}$

$\begin{pmatrix} C & D \\ 0 \leq x \leq 5 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{CD} = -0,64x + 2,2}$

• No ponto C, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{V_C = -0,64 * 0 + 2,2 = 2,2\ KN}$

• No ponto D, temos x = 5 m, logo $\boldsymbol{V_D = -0,64 * 5 + 2,2 = -1\ KN}$

$\begin{pmatrix} D & E \\ 0 \leq x \leq 4 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{DE} = -x - 0,5}$

• No ponto D, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{V_D = -0 - 0,5 = -0,5\ KN}$

• No ponto E, temos x = 4 m, logo $\boldsymbol{V_D = -4 * 5 - 0,5 = -4,5\ KN}$

$\begin{pmatrix} B & E \\ 0 \leq x \leq 6 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{BE} = 1\ KN}$

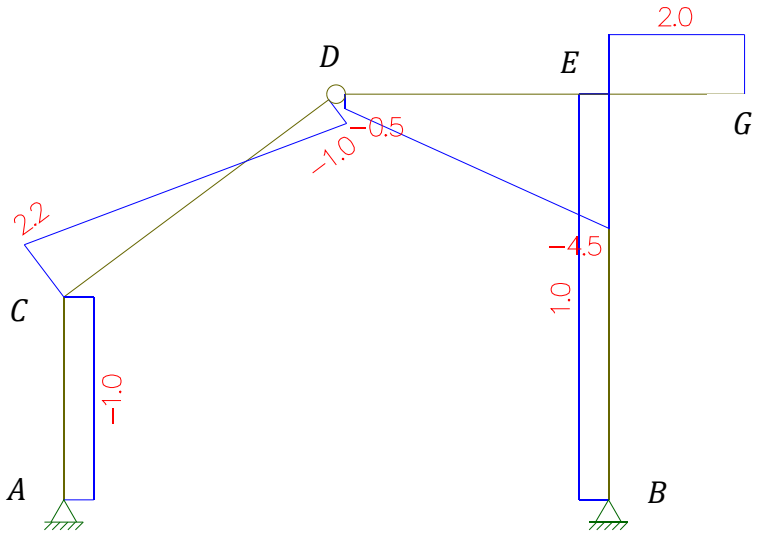
$\begin{pmatrix} G & E \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{GE} = 2\ KN}$

Lembre-se: o cortante positivo deve ser desenhado do lado oposto ao do observador e o cortante negativo do mesmo lado do observador

DEC (KN)

Fig. 485 – Exemplo 5



Fonte: autor

B) Diagrama do momento fletor (DMF)

$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{AC} = -x}$

O cortante nunca é zero no trecho DE, assim o valor máximo da função do momento deve ocorrer no(s) extremo(s) do intervalo

• No ponto A, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{V_A = -0 = -0\ KN}$

• No ponto C, temos x = 5 m, logo $\boldsymbol{V_C = -3 = -3\ KN}$

$\begin{pmatrix} C & D \\ 0 \leq x \leq 5 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{CD} = -0,32x^2 + 2,2x - 3}$

• No ponto C, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{V_C = -0,32 * 0^2 + 2,2 * 0 - 3 = -3\ KN.m}$

• No ponto onde o cortante V_{CD} é zero (x = 3,44 m)

$\boldsymbol{M_x = -0,32 * 3,44^2 + 2,2 * 3,44 - 3 = 0,78\ KN.m}$

• No ponto D, temos x = 5 m, logo $\boldsymbol{V_D = -0,32 * 5^2 + 2,2 * 5 - 3 = 0\ KN.m}$

$\begin{pmatrix} D & E \\ 0 \leq x \leq 4 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{DE} = -0,5x^2 - 0,5x}$

O cortante nunca é zero no trecho DE, assim o valor máximo da função do momento deve ocorrer no(s) extremo(s) do intervalo

• No ponto D, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_D = -0,5 * 0^2 - 0,5 * 0 = 0\ KN.m}$

• No ponto E, temos x = 4 m, logo $\boldsymbol{M_E = -0,5 * 4^2 - 0,5 * 4 = -10\ KN.m}$

$\begin{pmatrix} B & E \\ 0 \leq x \leq 6 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{BE} = x}$

O cortante nunca é zero no trecho BE, assim o valor máximo da função do momento deve ocorrer no(s) extremo(s) do intervalo

• No ponto B, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_B = 0 = 0\ KN.m}$

• No ponto E, temos x = 6 m, logo $\boldsymbol{M_E = 6 = 6\ KN.m}$

$\begin{pmatrix} G & E \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{GE} = 2x}$

O cortante nunca é zero no trecho BE, assim o valor máximo da função do momento deve ocorrer no(s) extremo(s) do intervalo

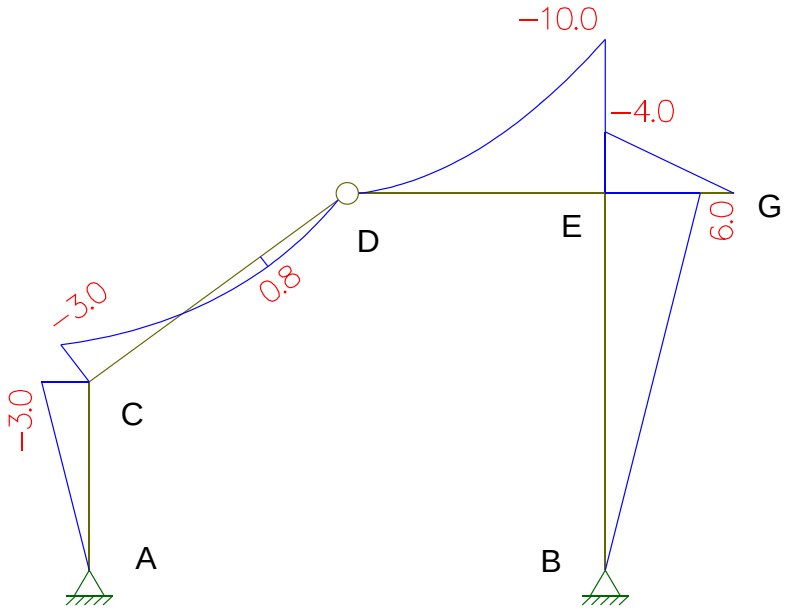
• No ponto G, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_G = 2 * 0 = 0\ KN.m}$

• No ponto E, temos x = 2 m, logo $\boldsymbol{M_E = 2 * 2 = 4\ KN.m}$

Lembre-se: o momento positivo deve ser desenhado do mesmo lado do observador e o momento negativo do lado oposto ao do observador

DMF $(KN.m)$

Fig. 486 – Exemplo 5



Fonte: autor

C) Diagrama do esforço normal (DEN)

$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{AC} = -3,5\ KN}$

$\begin{pmatrix} C & D \\ 0 \leq x \leq 5 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{CD} = 0,48x - 2,9}$

• No ponto C, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{N_C = 0{,}48 * 0 - 2{,}9 = -2,9\ KN}$

• No ponto D, temos x = 5 m, logo $\boldsymbol{N_D = 0{,}48 * 5 - 2{,}9 = -0,5\ KN}$

$\begin{pmatrix} D & E \\ 0 \leq x \leq 4 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{DE} = -1\ KN}$

$\begin{pmatrix} B & E \\ 0 \leq x \leq 6 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{BE} = -6,5\ KN}$

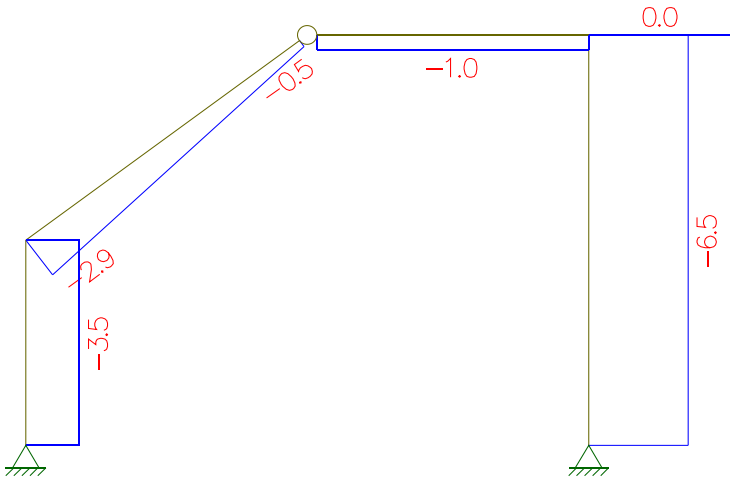
$\begin{pmatrix} G & E \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{GE} = 0\ KN}$

Lembre-se: o esforço normal positivo deve ser desenhado do lado oposto ao do observador e o negativo do mesmo lado do observador

DEN (KN)

Fig. 487 – Exemplo 5

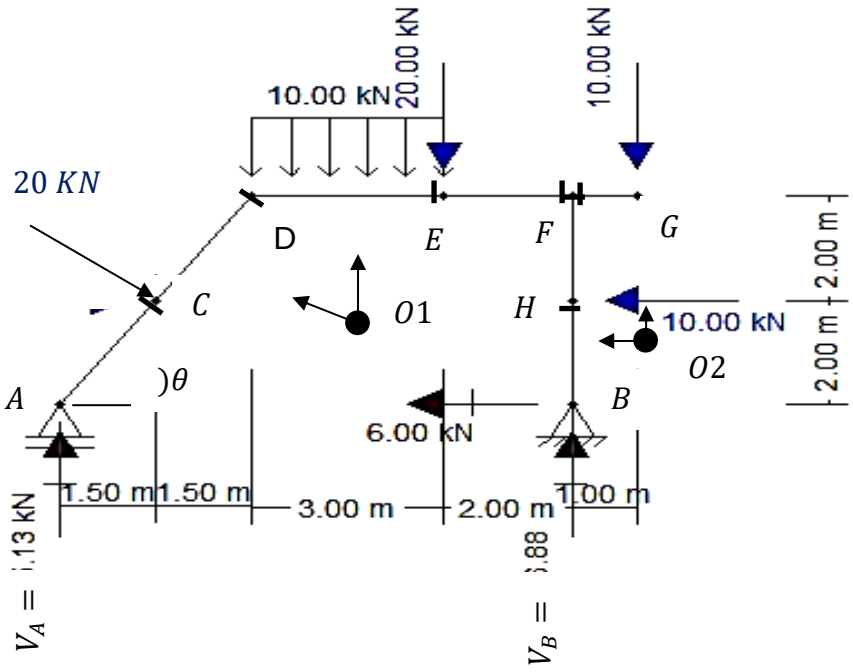


Fonte: autor

6°) Construa os diagramas dos esforços internos para o pórtico tri-articulado abaixo

DCL final

Fig. 488- Exemplo 6

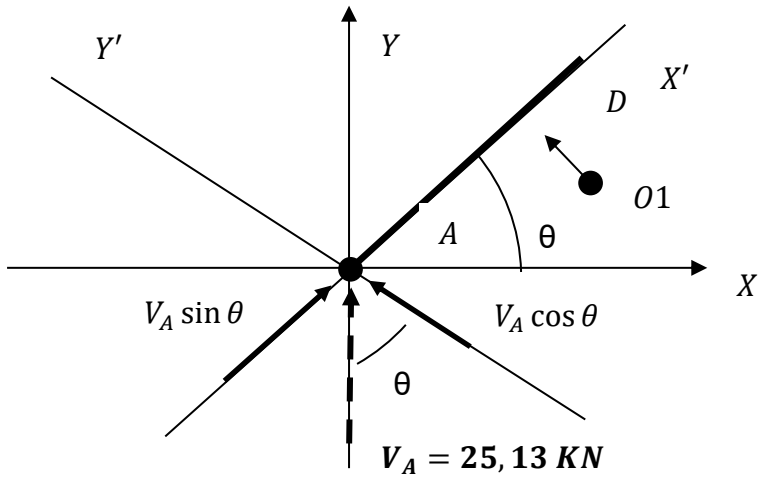


RESP.

Vamos iniciar a análise pela esquerda até o ponto F. Em seguida analisaremos a barra BF partindo do ponto B, a barra HF e a barra GF partindo do ponto G

O primeiro passo é obter as componentes no ponto A da reação V_A na direção perpendicular e paralela a barra AD

Fig. 489 – Exemplo 6



Fonte: autor

Comprimento (L_{AD}) da barra AC $\rightarrow \boldsymbol{L_{AD}} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = \boldsymbol{5\ m}$ e

$\theta = \tan^{-1}(\frac{4}{3}) = \boldsymbol{53,13°}$

Vamos adotar como positivas as componentes no sentido de x' e y', assim temos:

• Força cortante V_A, no ponto A da barra AD

$\boldsymbol{V_{A'}} = V_A \cos\theta = 25{,}13 \cos 53{,}13° =$

$\boldsymbol{15,08\ KN}$ $(V_{A'}\ atua\ no\ sentido\ de\ y', pois$

$resultou\ positiva)$

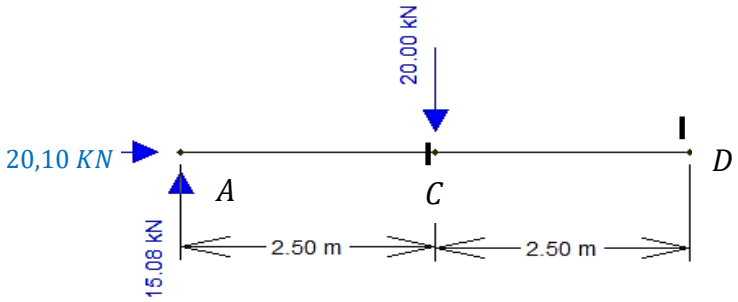
• Força axial H_A, no ponto A da barra AD

$\boldsymbol{H_{A'}} = V_A \sin\theta = 25{,}13 \sin 53{,}13° = \boldsymbol{20,10\ KN}$ $(H_A, atua\ no\ sentido\ de\ x')$

Não existe momento externo no ponto A

O observador 1 vê a barra AD na horizontal como mostrada abaixo

Fig. 490– Exemplo 6



Fonte: autor

• **Barra AD pela esquerda observador 1**

• Trecho AC pela esquerda, partindo do ponto A (observador 1)

$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 \le x \le 2{,}5 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{V_{AC}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\ \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int 0\ dx + (V_{A'}) = 0 + 15{,}08 \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_{AC} = 15,08\ KN}$$

$$\boldsymbol{M_{AC}} = \int \boldsymbol{V_{AC}}\ \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int (15{,}08)\ dx + 0 = 15{,}08x \ \Rightarrow \quad \boldsymbol{M_{AC} = 15,08x}$$

$$\boldsymbol{N_{AC}} = \int \boldsymbol{p(x)}\ \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} = \int 0\ dx + (-N_A) = 0 - 20{,}01 \Rightarrow \quad \boldsymbol{N_{AC} = -20,10\ KN}$$

• Trecho CD pela esquerda (observador 1)

$$\begin{pmatrix} C & & D \\ 0 \leq x \leq 2{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{CD}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} \Rightarrow \boldsymbol{V_{CD}} = \int 0\,dx + [V_{AC}(C) - 20) = 0 + (15{,}08 - 20)$$

$$\boldsymbol{V_{CD} = -4{,}92\ KN}$$

$$\boldsymbol{M_{CD}} = \int \boldsymbol{V_{CD}}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int (-4{,}92)\,dx + M_{AC}(C) = -4{,}92x + (15{,}08 * 2{,}5)$$

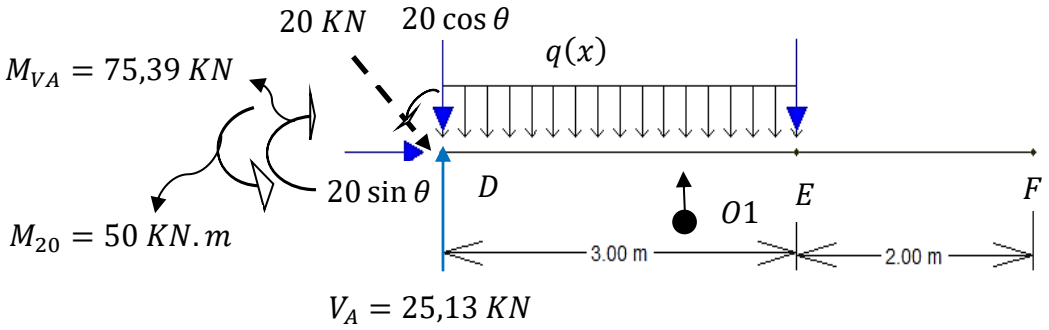
$$\boldsymbol{M_{CD} = -4{,}92x + 37{,}7}$$

$$\boldsymbol{N_{CD}} = \int \boldsymbol{p(x)}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} = \int 0\,dx + N_{AC} = 0 - 20{,}01 \Rightarrow \quad \boldsymbol{N_{AC} = -20{,}01\ KN}$$

• **Barra DF pela esquerda (observador 1)**

Agora o modo mais prático de prosseguir com a análise é observar o DCL final e transferir para o ponto D da barra DF todas as forças concentradas e resultantes de carregamentos distribuídos existentes à esquerda de D e obter as componentes na direção perpendicular e paralela a barra DF. Não esquecer de transferir também para o ponto D o momento produzido por cada força.

Fig. 491 – Exemplo 6



Fonte: autor

• $20\ KN \rightarrow$ *força inclinada aplicada no ponto C e transferida para o ponto D cujas componentes vertical e horizontal valem* $20\cos\theta$ *e* $20\sin\theta$ *respectivamente*

• M_{20} *é o momento produzido no ponto D pela força inclinada de* $20\ KN$ *aplicada no aplicada no ponto C*

• $\theta = \tan^{-1}(\frac{4}{3}) = 53{,}13°$

• Trecho DE pela esquerda, partindo do ponto D (observador 1)

$$\begin{pmatrix} D & & E \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{DE}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int -10\,dx + (V_A - 20\cos\theta)$$

$$\boldsymbol{V_{DE}} = -10x + (25{,}13 - 20\cos 53{,}13°) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{V_{DE} = -10x + 13{,}13}$$

$$\boldsymbol{M_{DE}} = \int \boldsymbol{V_{DE}}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int (-10x + 13{,}13)\,dx + (M_{VA} - M_{20}) \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{M_{DE}} = \frac{-10x^2}{2} + 13{,}13x + (75{,}39 - 50) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{M_{DE} = -5x^2 + 13{,}13x + 25{,}39}$$

$$\boldsymbol{N_{DE}} = \int \boldsymbol{p(x)}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} = \int 0\,dx - 20\sin 53{,}13° = -16 \Rightarrow \quad \boldsymbol{N_{DE} = -16\,KN}$$

• Trecho EF pela esquerda, partindo do ponto E (observador 1)

$$\begin{pmatrix} E & F \\ 0 \le x \le 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{EF}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int -0\,dx + [V_{DE}(E) - 20) \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{V_{EF}} = 0 + [(-10 * 3 + 13{,}13) - 20] \;\Rightarrow\; \boldsymbol{V_{EF} = -36{,}87\,KN}$$

$$\boldsymbol{M_{EF}} = \int \boldsymbol{V_{EF}}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int -36{,}87x\,dx + (M_{DE}) \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{M_{EF}} = \frac{-36{,}87x^2}{2} + (-5 * 3^2 + 13{,}13 * 3 + 25{,}39) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{M_{EF} = -18{,}435x^2 + 19{,}78}$$

$$\boldsymbol{N_{EF}} = \int \boldsymbol{p(x)}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N}' = \int 0\,dx + N_{DE} = 0 + (-20\,sen53{,}13°) = 0 - 16 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{N_{EF} = -16KN}$$

• **Barra BF observador O2**

• Trecho BH

$$\begin{pmatrix} B & H \\ 0 \le x \le 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{BH}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int -0\,dx + H_B = 0 + 6 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{V_{BH} = 6\,KN}$$

$$\boldsymbol{M_{BH}} = \int \boldsymbol{V_{BH}}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int 6\,dx + 0 = 6x \Rightarrow \quad \boldsymbol{M_{BH} = 6x}$$

$$\boldsymbol{N_{BH}} = \int \boldsymbol{p(x)}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} = \int 0\,dx + (-V_B) = 0 + (-46{,}87) = 0 - 46{,}87 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{N_{BH} = -46{,}87\,KN}$$

• Trecho HF

$$\begin{pmatrix} H & F \\ 0 \le x \le 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{HF}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int -0\,dx + [V_{BH}(H) + 10] = 0 + [(6) + 10]$$

$\boldsymbol{V_{HF} = 16\ KN}$

$\boldsymbol{M_{HF} = \int V_{HF}\, dx + \sum M' = \int 16\, dx + M_{BH}(H) = 16x + (6 * 2) = 16x + 12}$

$\boldsymbol{M_{HF} = 16x + 12}$

$\boldsymbol{N_{HF} = \int p(x)\, dx + \sum N' = \int 0\, dx + (-V_B) = 0 + (-46{,}87) = 0 - 46{,}87 \Rightarrow}$

$\boldsymbol{N_{HF} = -46,87\ KN}$

• Barra GF pela direita, partindo do ponto G observador 2

$\begin{pmatrix} G & F \\ 0 \leq x \leq 1 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{GF} = \int q(x)\, dx + \sum V' = \int 0\, dx + 10 = 0 + 10 \Rightarrow \quad V_{GF} = 10\ KN}$

$\boldsymbol{M_{GF} = \int -V_{GF}\, dx + \sum M' = \int -10\, dx + 0 = -10x \Rightarrow \quad M_{GF} = -10x}$

$\boldsymbol{N_{GF} = \int p(x)\, dx + \sum N' = \int 0\, dx + 0 = 0 + 0 = 0 \Rightarrow \quad N_{GF} = 0\ KN}$

Diagramas de esforços internos

C) Diagrama de esforço cortante (DEC)

$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 \leq x \leq 2{,}5 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{AC} = 15,08\ KN}$

$\begin{pmatrix} C & D \\ 0 \leq x \leq 2{,}5 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{CD} = -4,92\ KN}$

$\begin{pmatrix} D & E \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{DE} = -10x + 13,13}$

• No ponto D, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{V_D = -10 * 0 + 13{,}13 = 13,13\ KN}$

• No ponto E, temos x = 3 m, logo $\boldsymbol{V_E = -10 * 3 + 13{,}13 = -16,87\ KN}$

$\begin{pmatrix} E & F \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{EF} = -36,87\ KN}$

$\begin{pmatrix} B & H \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{BH} = 6\ KN}$

$\begin{pmatrix} H & F \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{HF} = 16\ KN}$

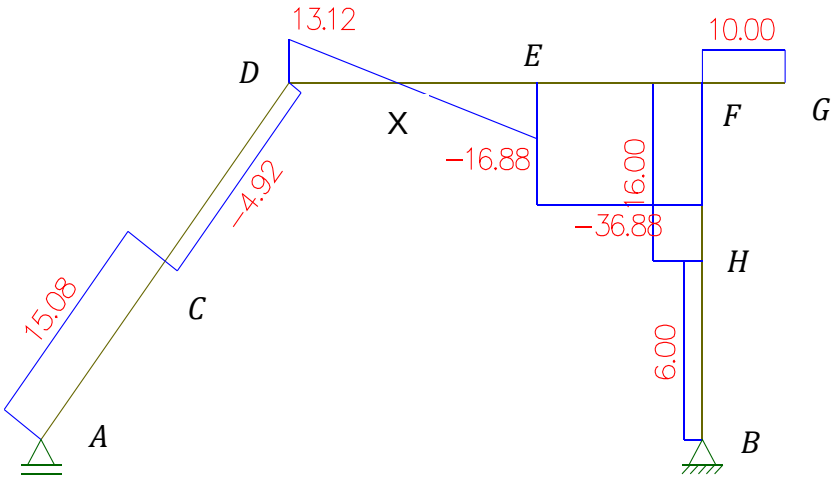
$\begin{pmatrix} G & F \\ 0 \leq x \leq 1 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{GF} = 10\ KN}$

Lembre-se: o cortante positivo deve ser desenhado do lado oposto ao do observador e o cortante negativo do mesmo lado do observador

DEC (KN)

Fig. 492 – Exemplo 6



Fonte: notas de aula

B) Diagrama do momento fletor (DMF)

$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 \leq x \leq 2{,}5 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{AC} = 15{,}08x}$

- No ponto A, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_A = 15{,}08 * 0 = 0\ KN.m}$
- No ponto C, temos x = 2,5 m, logo $\boldsymbol{M_C = 15{,}08 * 2{,}5 = 37{,}70\ KN.m}$

$\begin{pmatrix} C & D \\ 0 \leq x \leq 2{,}5 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{CD} = -4{,}92x + 37{,}7}$

- No ponto C, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_C = -4{,}92 * 0 + 37{,}7 = 37{,}70\ KN.m}$
- No ponto D, temos x = 2,5 m, logo $\boldsymbol{M_D = -4{,}92 * 2{,}5 + 37{,}7 = 25{,}39\ KN.m}$

$\begin{pmatrix} D & E \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{DE} = -5x^2 + 13,13x + 25,39}$

• No ponto D, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_D} = -5 * 0^2 + 13{,}13 * 0 + 25{,}39 = \boldsymbol{25,39\ KN.m}$

• No ponto X, onde o cortante V_{DE} é zero (x = 1,313 m), temos

$\boldsymbol{M_X} = -5 * 1{,}313^2 + 13{,}13 * 1{,}313 + 25{,}39 = \boldsymbol{34\ KN.m}$

• No ponto E, temos x = 3 m, logo $\boldsymbol{M_D} = -5 * 3^2 + 13{,}13 * 3 + 25{,}39 = \boldsymbol{19,78\ KN.m}$

$\begin{pmatrix} E & F \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{EF} = -18,435x^2 + 19,78}$

• No ponto E, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_E} = -18{,}435 * 0^2 + 19{,}78 = \boldsymbol{19,78\ KN.m}$

• No ponto E, temos x = 3 m, logo $\boldsymbol{M_F} = -18{,}435 * 2^2 + 19{,}78 = \boldsymbol{-53,96\ KN.m}$

$\begin{pmatrix} B & H \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{BH} = 6x}$

• No ponto B, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_B = 6 * 0 = 0\ KN.m}$

• No ponto H, temos x = 2 m, logo $\boldsymbol{M_H} = 6 * 2 = \boldsymbol{12\ KN.m}$

$\begin{pmatrix} H & F \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{HF} = 16x + 12}$

• No ponto H, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_H} = 16 * 0 + 12 = \boldsymbol{12\ KN.m}$

• No ponto F, temos x = 2 m, logo $\boldsymbol{M_F} = 16 * 2 + 12 = \boldsymbol{44\ KN.m}$

$\begin{pmatrix} G & F \\ 0 \leq x \leq 1 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{GF} = -10x}$

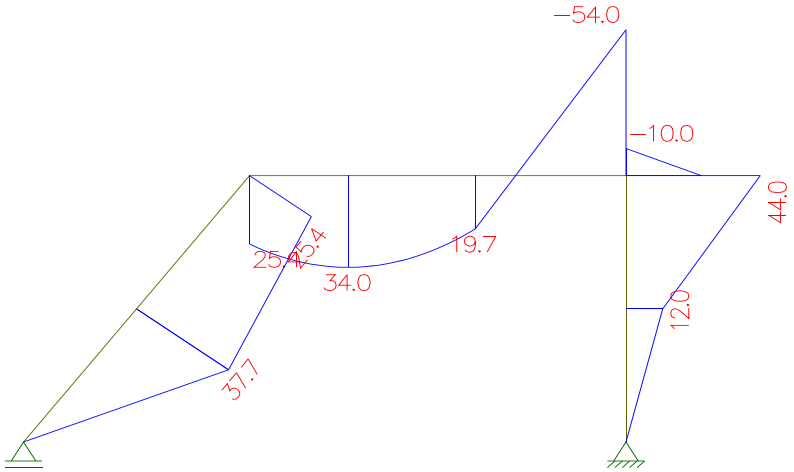
• No ponto G, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_G} = -2 * 0 = \boldsymbol{0\ KN.m}$

• No ponto F, temos x = 1 m, logo $\boldsymbol{M_F} = -10 * 1 = \boldsymbol{-10\ KN.m}$

Lembre-se: o momento positivo deve ser desenhado do mesmo lado do observador e o momento negativo do lado oposto ao do observador

DMF ($KN.m$)

Fig. 493 – Exemplo 6



Fonte: autor

C) Diagrama do esforço normal DEN (KN)

$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{AC} = -20,10\ KN}$

$\begin{pmatrix} C & D \\ 0 \leq x \leq 2{,}5 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{CD} = -20,10\ KN}$

$\begin{pmatrix} D & E \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{DE} = -16\ KN}$

$\begin{pmatrix} E & F \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{EF} = -16\ KN}$

$\begin{pmatrix} B & H \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{BH} = -46,87\ KN}$

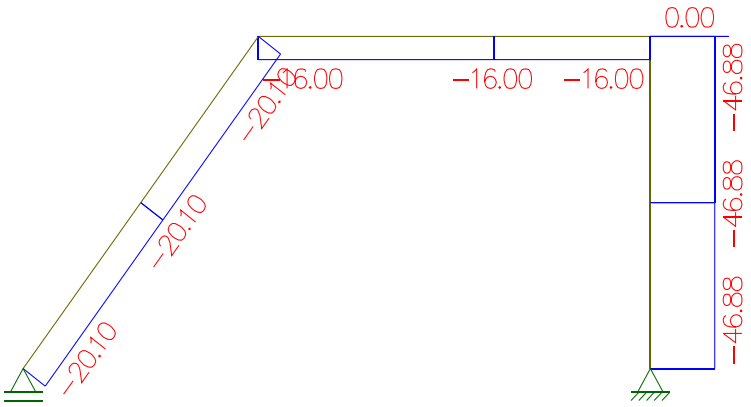
$\begin{pmatrix} H & F \\ 0 \leq x \leq 2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{BH} = -46,87\ KN}$

$\begin{pmatrix} G & F \\ 0 \leq x \leq 1 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{GF} = 0\ KN}$

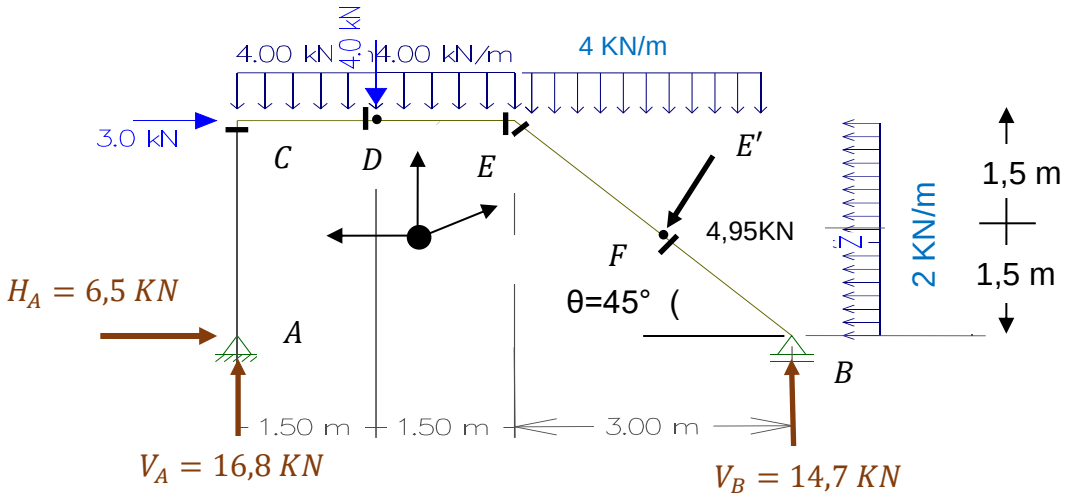
Lembre-se: o esforço normal positivo deve ser desenhado do lado oposto ao o observador e o negativo do mesmo lado do observador



7°) Construa os diagramas dos esforços internos para o pórtico abaixo

DCL final

Fig. 494 – Exemplo 7



Fonte: autor

RESP

Vamos iniciar a análise pela esquerda, do ponto A até o ponto E, e depois analisaremos a barra BE partindo do ponto B.

- **Barra AC**

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 \le x \le 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{AC}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int 0\,dx + (-H_A) = 0 + (-6{,}5) \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_{AC} = -6.5\ KN}$$

$$\boldsymbol{M_{AC}} = \int \boldsymbol{V_{AC}}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int -6{,}5\,dx + 0 = -6{,}5x \ \Rightarrow \quad \boldsymbol{M_{AC} = -6{,}5x}$$

$$\boldsymbol{N_{AC}} = \int \boldsymbol{p(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} = \int 0\, dx + (-V_A) = 0 + (-16{,}8) \Rightarrow \quad \boldsymbol{N_{AC} = -16{,}8\ KN}$$

• **Barra CD**

O ponto D define um trecho, pois existe uma carga concentrada aplicada

$\begin{pmatrix} C & D \\ 0 \le x \le 1{,}5 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{V_{CD}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int -4\, dx + V_A = -4x + 16{,}8 \Rightarrow \boldsymbol{V_{CD} = -4x + 16{,}8}$$

$$\boldsymbol{M_{CD}} = \int \boldsymbol{V_{CD}}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int (-4x + 16{,}8)\, dx + [M_{AC}(C)] \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{M_{CD}} = \frac{-4\boldsymbol{x^2}}{2} + 16{,}8x + (-6{,}5 * 3) \Rightarrow \boldsymbol{M_{CD} = -2x^2 + 16{,}8x - 19{,}5}$$

$$\boldsymbol{N_{CD}} = \int \boldsymbol{p(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} = \int 0\, dx + [-H_A - 3] = 0 + (-6{,}5 - 3) = \boldsymbol{-9{,}5\ KN}$$

$$\boldsymbol{N_{CD} = -9{,}5\ KN}$$

• **Trecho DE**

$\begin{pmatrix} D & E \\ 0 \le x \le 1{,}5 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{V_{DE}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int -4\, dx + [V_{CD}(D) - 4]$$

$$\boldsymbol{V_{DE}} = -4x + [(-4 * 1{,}5 + 16{,}8) - 4] \Rightarrow \boldsymbol{V_{DE} = -4x + 6{,}8}$$

$$\boldsymbol{M_{DE}} = \int \boldsymbol{V_{DE}}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int (-4x + 6{,}8)\, dx + [M_{CD}(D)] \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{M_{DE}} = \frac{-4\boldsymbol{x^2}}{2} + 6{,}8x + (-2 * 1{,}5^2 + 16{,}8 * 1{,}5 - 19{,}5) \Rightarrow \boldsymbol{M_{DE} = -2x^2 + 6{,}8x + 1{,}2}$$

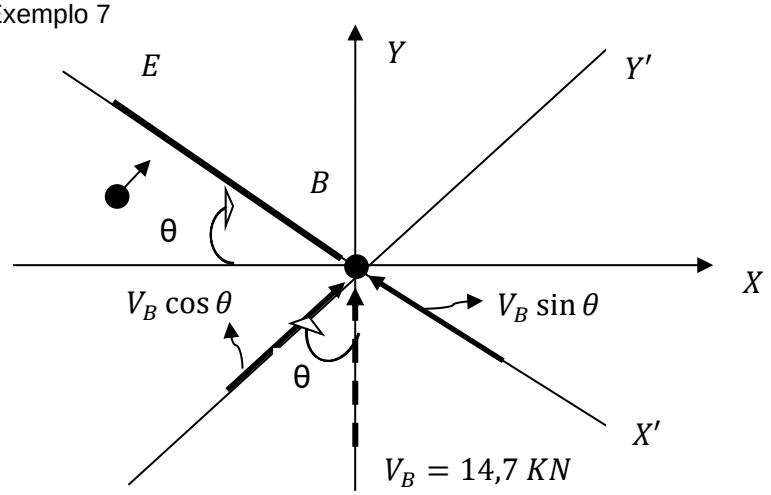
$$\boldsymbol{N_{DE}} = \int \boldsymbol{p(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} = \int 0\, dx + N_{CD}(D) = 0 + (-9{,}5) \Rightarrow \boldsymbol{N_{DE} = -9{,}5\ KN}$$

• **Barra BE pela direita**

Para o cálculo dos esforços internos na barra BE e construção dos seus respectivos diagramas é necessário primeiro obter as componentes dos carregamentos EE' e BB' na direção perpendicular e paralela a barra inclinada BE.

• **Componente perpendicular e paralela `barra BE**

Fig. 495 – Exemplo 7



Fonte: autor

• $\boldsymbol{L_{BE}} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = \boldsymbol{4{,}2\ m}$; •$\boldsymbol{\theta} = \tan^{-1}(\frac{b}{a}) = \tan^{-1}(\frac{3}{3}) = \boldsymbol{45°}$

Vamos adotar como positivas as componentes no sentido de x' e y', assim temos:

A) Componente V'_B da reação V_B na direção perpendicular à barra BE

• $\boldsymbol{V'_B = V_B \cos\theta} = 14{,}7 \cos 45° = \boldsymbol{10{,}4\ KN}$ (observando a figura acima vemos que atua no sentido Y')

B) Componente axial H'_B da reação V_B

$\boldsymbol{H_{B'} = V_B \sin\theta} = 14{,}7 \sin 45° = \boldsymbol{10{,}4\ KN}$ (Observando a figura acima vemos que atua

no sentido contrário a X')

• **Componente $q_{EE'}$ e $P_{EE'}$ na direção perpendicular e paralela a barra BE devidas aos carregamentos distribuídos**

• Componentes do carregamento EE'

$\boldsymbol{q_{EE'}(x) = q(\cos\theta)^2} = 4(\cos 45)^2 = \boldsymbol{2\ KN/m}$

• Componentes axial distribuída do carregamento EE'

• $\boldsymbol{P_{EE'}(x) = \frac{q \sin 2\theta}{2}} = \frac{4 * \sin(2 * 45°)}{2} = \boldsymbol{2\ KN/m}$ $(de\ E\ para\ B, ou\ seja, no\ sentido\ positivo\ de\ x')$

Para encontrar o sentido da componente axial do carregamento distribuído considere uma força F qualquer atuando na mesma direção e sentido do carregamento e obtenha a componente paralela e perpendicular a barra inclinada assim como fizemos com a força de 1 KN aplicada no ponto F

• Componente transversal do carregamento distribuído BE'

• $\boldsymbol{q_{BE'} = q(\sin\theta)^2 = 2(\sin 45\,°)^2 = 1\ KN/m}$

• Componentes axial distribuída do carregamento BE'

• $\boldsymbol{P_{BE'} = \frac{q \sin 2\theta}{2} = \frac{2\sin(2 * 45°)}{2} = -1\frac{KN}{m}}$ $(de\ B\ para\ E, ou\ seja\ no\ sentido\ negativo\ de\ x')$

Agora obtemos a resultante total na direção perpendicular e paralela a barra BE

• **Resultante q_{BE} distribuída na direção perpendicular a barra BE** $\boldsymbol{q_{BE}} = q_{EE'} + q_{BE'} = 2 + 1 = \boldsymbol{3\ KN.m}$

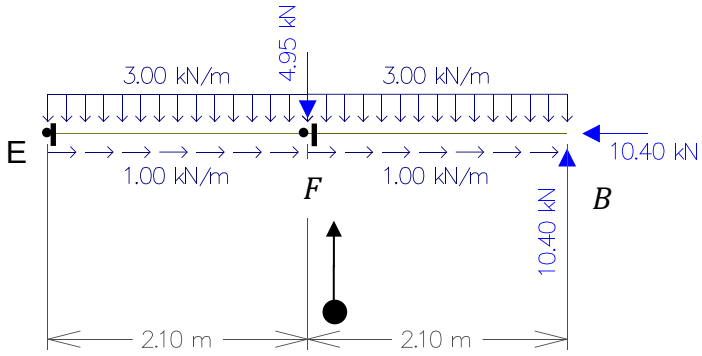
• **Resultante P_{BE} distribuída na direção paralela (axial) a barra BE**

$\boldsymbol{P_{BE}} = P_{EE'} + (-P_{BE'}) = 2 + (-1) = \boldsymbol{1KN.m}$ (resultou positiva, logo atua no sentido de X')

• A força concentrada aplicada no ponto F é perpendicular a barra BE, logo não possui componente na direção paralela á barra

O observador enxerga a barra BE horizontal como mostra a figura abaixo

Fig.496 – Exemplo 7



Fonte: autor

Analisando o trecho BF pela direita, temos

$\begin{pmatrix} B & F \\ 0 \le x \le 2{,}1 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{BF}} = \int \boldsymbol{q(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int 3\, dx + (-V'_B) = 3x - 10{,}4 \Rightarrow \boldsymbol{V_{BF} = 3x - 10{,}4}$

$\boldsymbol{M_{BF}} = \int -\boldsymbol{V_{EF}}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int -(3x - 10{,}4)\, dx + 0 = \frac{-3\boldsymbol{x^2}}{2} + 10{,}4x$

$\boldsymbol{M_{BF} = -1{,}5x^2 + 10{,}4x}$

$\boldsymbol{N_{BF}} = \int \boldsymbol{p(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} = \int 1\, dx + (-H'_B) = x + (-10{,}4) \Rightarrow$

$\boldsymbol{N_{BF} = x - 10{,}4\ KN}$

Trecho FE pela direita

$\begin{pmatrix} F & E \\ 0 \le x \le 2{,}1 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{FE}} = \int \boldsymbol{q(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int 3\, dx + [V_{BF}(F) + 4{,}95] \Rightarrow$

$\boldsymbol{V_{FE}} = 3x + [\,(3 * 2{,}1 - 10{,}4) + 4{,}95] \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_{FE} = 3x + 0{,}85}$

$\boldsymbol{M_{FE}} = \int -\boldsymbol{V_{FE}}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int -(3x + 0{,}85)\, dx + M_{BF}(F) \Rightarrow$

$\boldsymbol{M_{FE}} = \frac{-3\boldsymbol{x^2}}{2} - 0{,}85x + (-1{,}5 * 2{,}1^2 + 10{,}4 * 2{,}1) \Rightarrow \boldsymbol{M_{FE} = -1{,}5x^2 - 0{,}85x + 15{,}2}$

$\boldsymbol{N_{FE}} = \int \boldsymbol{p(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} = \int 1\, dx + [N_{BF}(F)] \Rightarrow$

$= x + (2{,}1 - 10{,}4) \Rightarrow \quad \boldsymbol{N_{FE} = x - 8{,}3}$

Diagramas de esforços internos

A) Diagrama de esforço cortante (DEC)

$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 \le x \le 3 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{AC} = -6.5\ KN}$

$\begin{pmatrix} C & D \\ 0 \le x \le 1{,}5 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{CD} = -4x + 16{,}8}$

- No ponto C, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{V_C} = -4 * 0 + 16{,}8 = \boldsymbol{16{,}8\ KN}$
- No ponto D, temos x = 1,5 m, logo $\boldsymbol{V_D} = -4 * 1{,}5 + 16{,}8 = \boldsymbol{10{,}8\ KN}$

$\begin{pmatrix} D & E \\ 0 \leq x \leq 1{,}5 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{DE} = -4x + 6{,}8}$

- No ponto D, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{V_D = -4 * 0 + 6{,}8 = 6{,}8\ KN}$
- No ponto E, temos x = 1,5 m, logo $\boldsymbol{V_E = -4 * 1{,}5 + 6{,}8 = 0{,}8\ KN}$

$\begin{pmatrix} B & F \\ 0 \leq x \leq 2{,}1 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{BF} = 3x - 10{,}4}$

- No ponto B, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{V_B = 3 * 0 - 10{,}4 = -10{,}4\ KN}$
- No ponto F, temos x = 2,1 m, logo $\boldsymbol{V_F = 3 * 2{,}1 - 10{,}4 = -4{,}1\ KN}$

$\begin{pmatrix} F & E \\ 0 \leq x \leq 2{,}1 \end{pmatrix}$

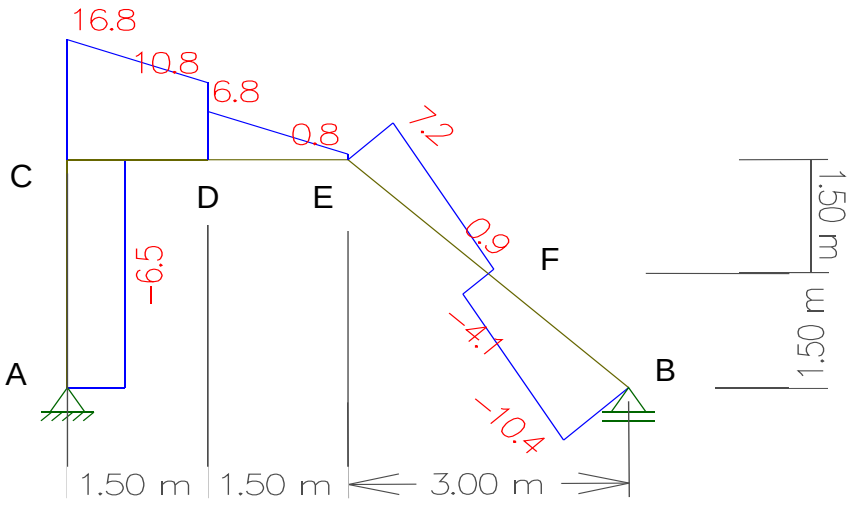
$\boldsymbol{V_{FE} = 3x + 0{,}85}$

- No ponto F, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{V_F = 3 * 0 + 0{,}85 = 0{,}85\ KN}$
- No ponto E, temos x = 1,8 m, logo $\boldsymbol{V_E = 3 * 2{,}1 + 0{,}85 = 7{,}15\ KN}$

DEC (KN)

Lembre-se: o cortante positivo deve ser desenhado do lado oposto ao do observador e o cortante negativo do mesmo lado do observador

Fig. 497 – Exemplo 7



Fonte: autor

B) Diagrama do momento fletor (DMF)

$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{AC} = -6,5x}$

• No ponto A, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_A = -6{,}5 * 0 = 0\ KN.m}$

• No ponto C, temos x = 3 m, logo $\boldsymbol{M_C = -6{,}5 * 3 = -19{,}5\ KN.m}$

$\begin{pmatrix} C & D \\ 0 \leq x \leq 1{,}5 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{CD} = -2x^2 + 16{,}8x - 19{,}5}$

• No ponto C, temos x = 0 m, logo

$$\boldsymbol{M_C = -2 * 0^2 + 16{,}8 * 0 - 19{,}5 = -19{,}5\ KN.m}$$

• No ponto D, temos x = 1,5 m, logo

$\boldsymbol{M_D = -2 * 1{,}5^2 + 16{,}8 * 1{,}5 - 19{,}5 = 1{,}2\ KN.m}$

$\begin{pmatrix} D & E \\ 0 \leq x \leq 1{,}5 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{DE} = -2x^2 + 6{,}8x + 1{,}2}$

• No ponto D, temos x = 0 m, logo

$$\boldsymbol{M_D = -2 * 0^2 + 6{,}8 * 0 + 1{,}2 = 1{,}2\ KN.m}$$

• No ponto E, temos x = 1,5 m, logo

$$\boldsymbol{M_E = -2 * 1{,}5^2 + 6{,}8 * 1{,}5 + 1{,}2 = 6{,}9\ KN}$$

$\begin{pmatrix} B & F \\ 0 \leq x \leq 2{,}1 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{BF} = -1{,}5x^2 + 10{,}4x}$

• No ponto B, temos x = 0 m, logo

$$\boldsymbol{M_B = -1{,}5 * 0^2 + 10{,}4 * 0 = 0\ KN.m}$$

• No ponto F, temos x = 2,1 m, logo

$$\boldsymbol{M_F = -1{,}5 * 2{,}1^2 + 10{,}4 * 2{,}1 = 15{,}2\ KN.m}$$

$\begin{pmatrix} F & E \\ 0 \leq x \leq 2{,}1 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{FE} = -1{,}5x^2 - 0{,}85x + 15{,}2}$

• No ponto F, temos x = 0 m, logo

$$\boldsymbol{M_F = -1{,}5 * 0^2 - 0{,}85 * 0 + 15{,}2 = 15{,}2\ KN.m}$$

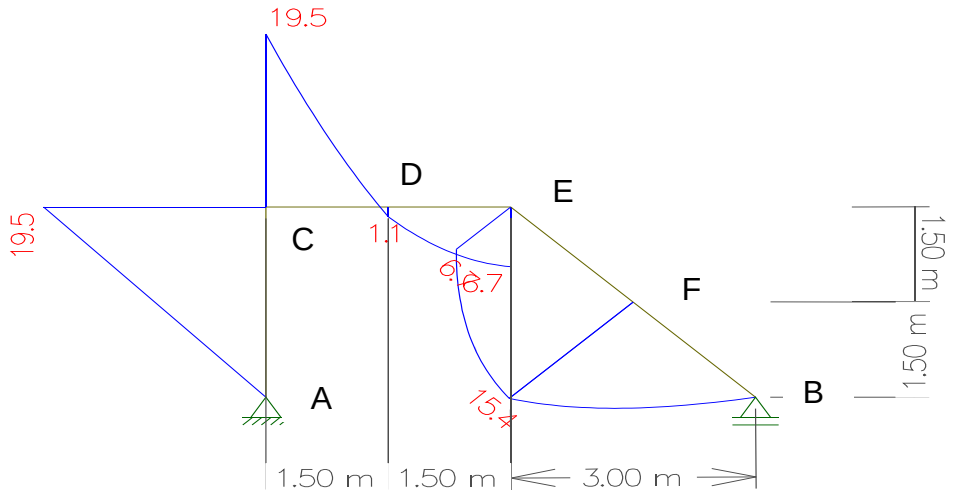
• No ponto E, temos x = 2,1 m, logo

$$\boldsymbol{M_E = -1{,}5 * 2{,}1^2 - 0{,}85 * 2{,}1 + 15{,}2 = 6{,}8\ KN.m}$$

Lembre-se: o momento positivo deve ser desenhado do mesmo lado do observador e o momento negativo do lado oposto ao do observador

DMF $(KN.m)$

Fig. 498– Exemplo 7



Fonte: autor

C) Diagrama do esforço normal (DEN)

$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{AC} = -16,8\ KN}$

$\begin{pmatrix} C & D \\ 0 \leq x \leq 1{,}5 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{CD} = -9,5\ KN}$

$\begin{pmatrix} D & E \\ 0 \leq x \leq 1{,}5 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{DE} = -9,5\ KN}$

$\begin{pmatrix} B & F \\ 0 \leq x \leq 2{,}1 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{BF} = x - 10,4\ KN}$

- No ponto B, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{N_B} = 0 - 10{,}4 = \boldsymbol{-10,4\ KN.m}$
- No ponto F, temos x = 2,1 m, logo $\boldsymbol{N_F} = 2{,}1 - 10{,}4 = \boldsymbol{-8,3\ KN.m}$

$\begin{pmatrix} F & E \\ 0 \leq x \leq 2{,}1 \end{pmatrix}$

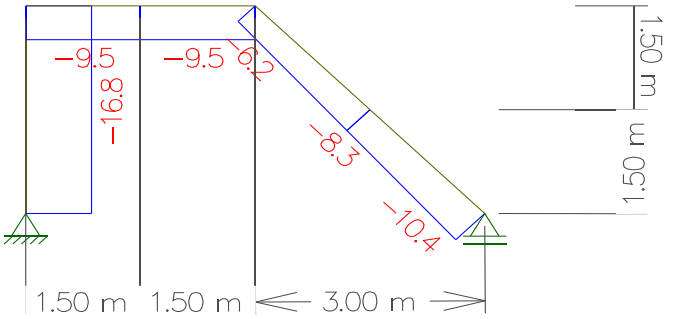
$\boldsymbol{N_{FE} = x - 8,3}$

- No ponto F, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{N_F} = 0 - 8{,}3 = \boldsymbol{-8,3\ KN.m}$
- No ponto F, temos x = 2,1 m, logo $\boldsymbol{N_F} = 2{,}1 - 8{,}3 = \boldsymbol{-6,2\ KN.m}$

Lembre-se: o esforço normal positivo deve ser desenhado do lado oposto ao do observador e o negativo do mesmo lado do observador

DEN (KN)

Fig.499- Exemplo 7

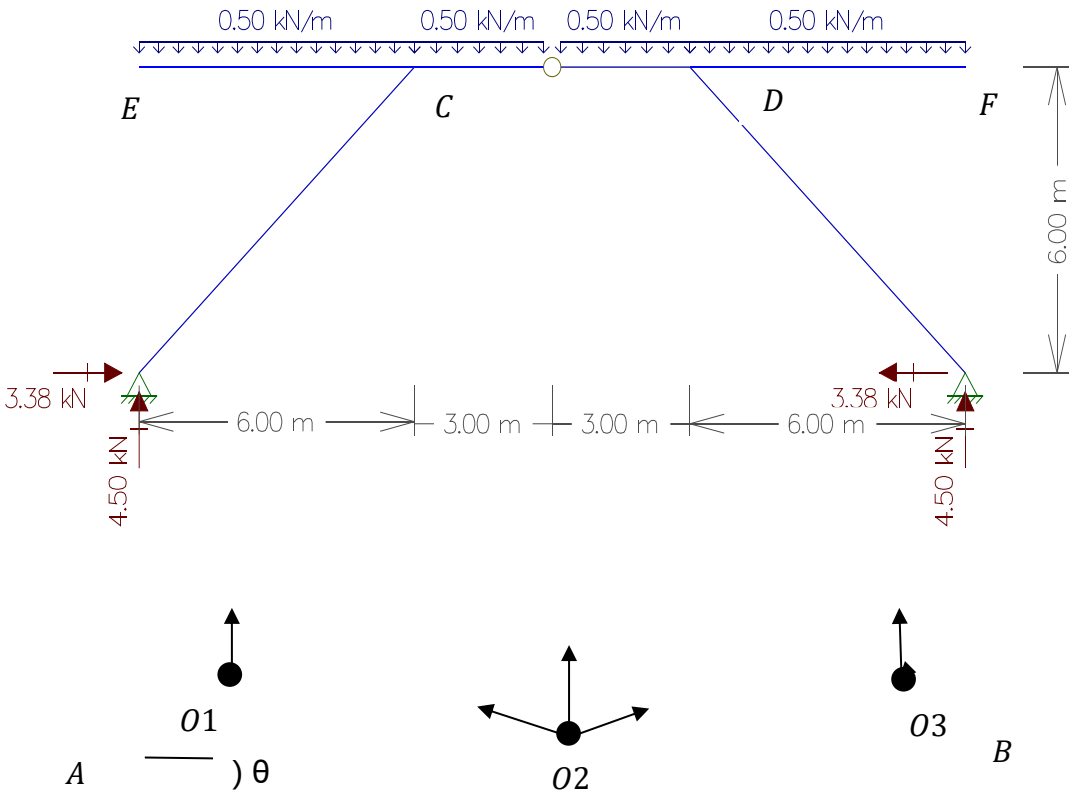


Fonte: autor

8°) Construa os diagramas dos esforços internos para o pórtico abaixo

DCL final

Fig. 500 – Exemplo 8



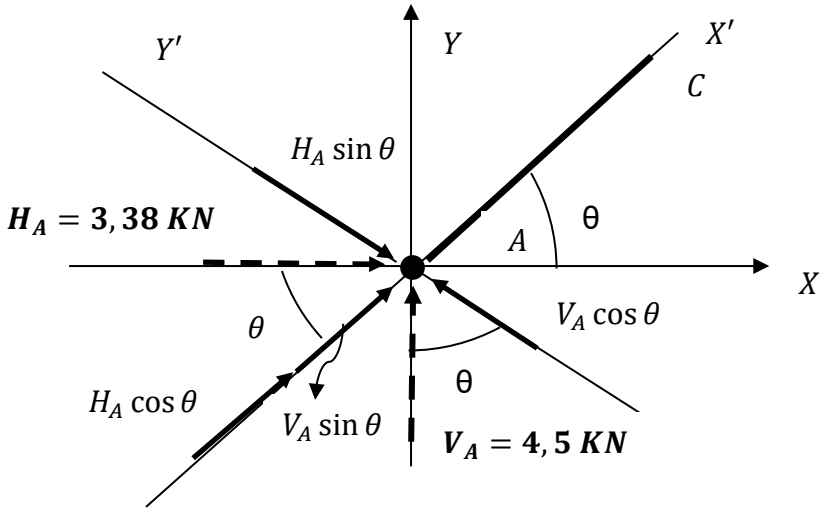
F **Fonte: notas de aula**

RESP

Nesse caso, a resolução mais prática é o obter as componentes das reações na direção paralela e perpendicular as barras inclinadas AC e BD, determinar as equações dos esforços internos para elas e em seguida transferir as forças e seus respectivos momentos para os pontos C e D e então analisar a barra horizontal EF.

• **Componentes paralelas e perpendiculares das reações de apoios na barra AC**

Fig. 501 – Exemplo 8



Fonte: autor

As componentes na barra inclinada AD podem ser obtidas de modo análogo, porém é desnecessário, pois sendo a estrutura simétrica os esforços na barra AC e BD têm os mesmos valores

• $\theta = \tan^{-1}(\frac{6}{6}) = 45°$

• Comprimento (L_{AC}) da barra AC → $\boldsymbol{L_{AC}} = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} = \boldsymbol{8,48\ m}$

Vamos adotar como positivas as componentes no sentido x' e y', assim temos:

A) Componente V_A, na direção perpendicular à barra AC das reações V_A e H_A

$\boldsymbol{V_{A'}} = V_A \cos\theta - H_A \sin\theta = 4{,}5 \cos 45° - 3{,}38 \sin 45° = \boldsymbol{0,80KN}$

(V_A, $atua\ no\ sentido\ de\ y', pois\ resultou\ positiva$)

B) Componente axial H_A, das reações V_A e H_A

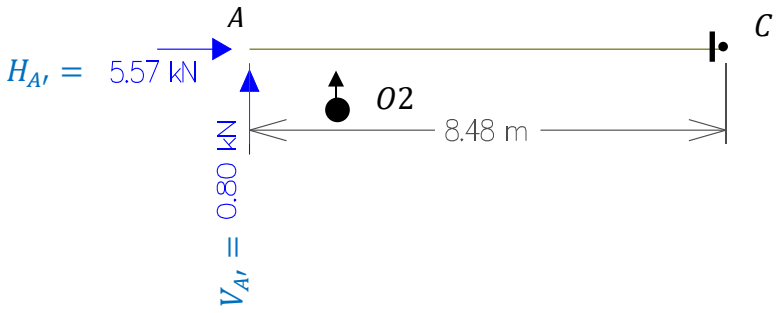
$\boldsymbol{H_{A'}} = V_A \sin\theta + H_A \cos\theta = 4{,}5 \sin 45° + 3{,}38 \cos 45° = \boldsymbol{5,57\ KN}$

$(H_{A'}\ atua\ no\ sentido\ de\ x', pois\ resultou\ positiva)$

Não existe momento externo no ponto A

O observador O2 enxerga a barra AC como mostrada abaixo

Fig. 502 – Exemplo 8



Fonte: autor

$$\begin{pmatrix} A & & C \\ 0 \leq x \leq 8{,}48 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{AC}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\ \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int 0\ dx + (V_{A'}) = 0 + 0{,}8 \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_{AC} = 0{,}8\ KN}$$

$$\boldsymbol{M_{AC}} = \int \boldsymbol{V_{AC}}\ \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int 0{,}8\ dx + 0 = 0{,}8x \ \Rightarrow \quad \boldsymbol{M_{AC} = 0{,}8x}$$

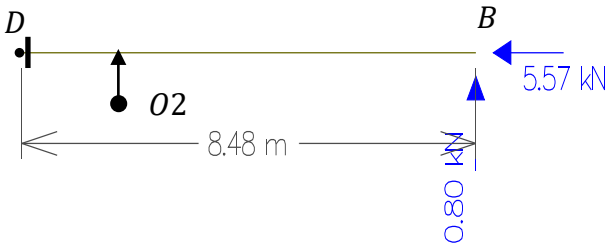
$$\boldsymbol{N_{AC}} = \int \boldsymbol{p(x)}\ \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} = \int 0\ dx - 5{,}57 = -5{,}57 \Rightarrow \quad \boldsymbol{N_{AC} = -5{,}57}$$

• Barra BD

As componentes na barra inclinada BD podem ser obtidas de modo análogo, porém sendo a estrutura simétrica os esforços na barra AC e BD têm os mesmos valores.

A vista que o observador O2 tem da barra DB é mostrada na figura abaixo

Fig. 503 – Exemplo 8



Fonte: autor

$$\begin{pmatrix} B & D \\ 0 \leq x \leq 8{,}48 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{BD}} = \int \boldsymbol{q(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int 0\, dx - 0{,}8 = 0 - 0{,}8 \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_{BD} = -0{,}8\ kN}$$

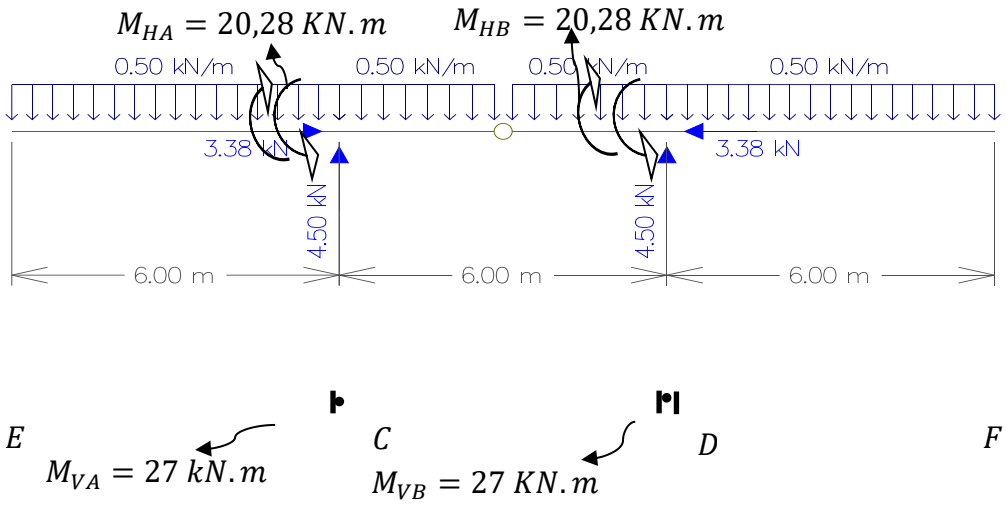
$$\boldsymbol{M_{BD}} = \int -\boldsymbol{V_{BD}}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int -(-0{,}8)\, dx + 0 = 0{,}8x \ \Rightarrow \quad \boldsymbol{M_{BD} = 0{,}8x}$$

$$\boldsymbol{N_{BD}} = \int \boldsymbol{p(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} = \int 0\, dx - 5{,}57 = -5{,}57 \Rightarrow \quad \boldsymbol{N_{BD} = -5{,}57\ KN}$$

• **Barra EF**

Para analisar a barra EF devemos transferir para os pontos C e D as respectivas forças e momentos produzidos pelas barras AC e BD

Fig. 504 – Exemplo 8



Fonte: autor

• Trecho EC

Lembre-se as forças e momentos aplicados na extremidade final de um trecho não entram nas equações dos esforços internos do trecho, assim as forças e

momentos aplicados no ponto C não entram nos cálculos do trecho EC, mas sim nos cálculos do trecho CD.

Para os esforços internos momentos aplicados em um ponto de uma viga são positivos quando tracionam as fibras inferiores. Exemplo M_{VA} no ponto C

$\begin{pmatrix} E & & C \\ 0 \leq x \leq 6 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{V_{EC}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int -0{,}5\,dx + 0 = -0{,}5x \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_{EC} = -0{,}5x}$$

$$\boldsymbol{M_{EC}} = \int \boldsymbol{V_{EC}}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int -0{,}5x\,dx + 0 = \frac{-0{,}5x^{\boldsymbol{2}}}{2} \Rightarrow \quad \boldsymbol{M_{EC} = -0{,}25x^2}$$

$$\boldsymbol{N_{EC}} = \int \boldsymbol{p(x)}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} = \int 0\,dx + 0 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{N_{EC} = 0\ KN}$$

• Trecho CD

$\begin{pmatrix} C & & D \\ 0 \leq x \leq 6 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{V_{CD}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int -0{,}5\,dx + [V_{EC}(C) + 4{,}5] \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{V_{CD}} = -0{,}5x + [(-0{,}5 * 6) + 4{,}5] \Rightarrow \boldsymbol{V_{CD} = -0{,}5x + 1{,}5}$$

$$\boldsymbol{M_{CD}} = \int \boldsymbol{V_{CD}}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int (-0{,}5x + 1{,}5)dx + [M_{EC}(C) + 27 - 20{,}28] \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{M_{CD}} = \frac{-0{,}5x^2}{2} + 1{,}5x + (-0{,}5 * 6^2 + 27 - 20{,}28) \Rightarrow \quad \boldsymbol{M_{CD}}$$

$$= \boldsymbol{-0{,}25x^2 + 1{,}5x - 2{,}28}$$

$$\boldsymbol{N_{CD}} = \int \boldsymbol{p(x)}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} = \int 0\,dx - 3{,}38 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{N_{CD} = -3{,}38\ KN}$$

• Trecho DF

Para facilitar os cálculos vamos analisar o trecho DF pela direita

$\begin{pmatrix} F & & D \\ 0 \leq x \leq 6 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{V_{FD}} = \int \boldsymbol{q(x)}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int 0{,}5\,dx \Rightarrow \boldsymbol{V_{FD} = 0{,}5x}$$

$$\boldsymbol{M_{FD}} = \int -\boldsymbol{V_{FD}}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int -0{,}5x\,dx = \frac{-0{,}5x^2}{2} \Rightarrow \quad \boldsymbol{M_{FD} = -0{,}25x^2}$$

$$\boldsymbol{N_{FD}} = \int \boldsymbol{p(x)}\,\boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N} \Rightarrow \boldsymbol{N_{DF}} = \int 0\,dx + (-3{,}38 + 3{,}38) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{N_{FD} = 0}$$

Diagramas de esforços internos

A) Diagrama de esforço cortante (DEC)

$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 \leq x \leq 8{,}48 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{AC} = -0{,}8\ KN}$

$\begin{pmatrix} B & D \\ 0 \leq x \leq 8{,}48 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{BD} = -0{,}8}$

$\begin{pmatrix} E & C \\ 0 \leq x \leq 6 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{EC} = -0{,}5x}$

- No ponto E, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{V_E = -0{,}5 * 0 = 0\ KN}$
- No ponto C, temos x = 6 m, logo $\boldsymbol{V_C = -0{,}5 * 6 = -3\ KN}$

$\begin{pmatrix} C & D \\ 0 \leq x \leq 6 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{CD} = -0{,}5x + 1{,}5}$

- No ponto C, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{V_C = -0{,}5 * 0 + 1{,}5 = 1{,}5\ KN}$
- No ponto D, temos x = 6 m, logo $\boldsymbol{V_D = -0{,}5 * 6 + 1{,}5 = -1{,}5\ KN}$

$\begin{pmatrix} F & D \\ 0 \leq x \leq 6 \end{pmatrix}$

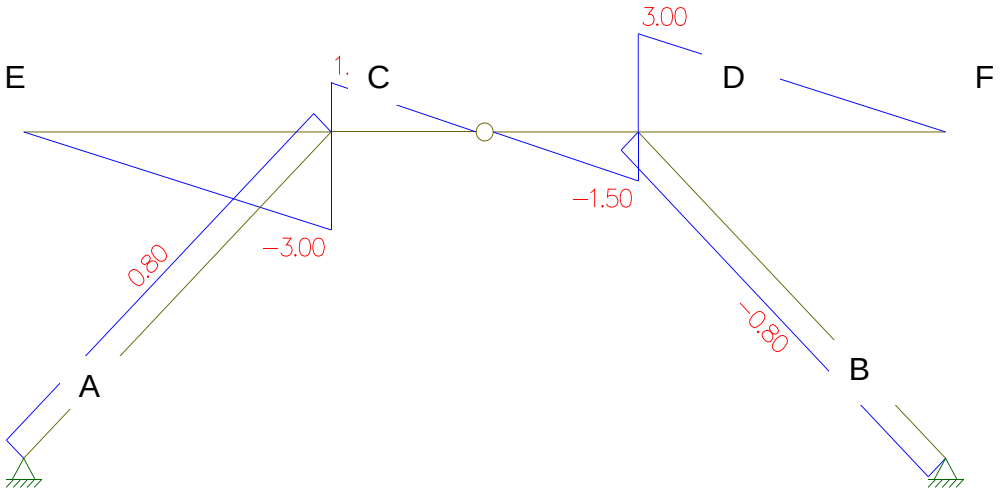
$\boldsymbol{V_{FD} = 0{,}5x}$

- No ponto F, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{V_F = -0{,}5 * 0 = 0\ KN}$
- No ponto D, temos x = 6 m, logo $\boldsymbol{V_D = 0{,}5 * 6 = 3\ KN}$

DEC (KN)

Lembre-se: o cortante positivo deve ser desenhado do lado oposto ao do observador e o cortante negativo do mesmo lado do observador

Fig. 505 – Exemplo 8



Fonte: autor

B) Diagrama de momento fletor (DMF)

$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 \leq x \leq 8{,}48 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{AC} = 0,8x}$

- No ponto A, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_A = 0{,}8 * 0 = 0\ KN.m}$
- No ponto C, temos x = 8,48 m, logo $\boldsymbol{M_C = 0{,}8 * 8{,}48 = 6{,}8\ KN.m}$

$\begin{pmatrix} B & D \\ 0 \leq x \leq 8{,}48 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{BD} = 0,8x}$

- No ponto B, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_B = 0{,}8 * 0 = 0\ KN.m}$
- No ponto D, temos x = 8,48 m, logo $\boldsymbol{M_D = 0{,}8 * 8{,}48 = 6{,}8\ KN.m}$

$\begin{pmatrix} E & C \\ 0 \leq x \leq 6 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{EC} = -0,25x^2}$

- No ponto E, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_E = -0{,}25 * 0^2 = 0\ KN.m}$
- No ponto C, temos x = 6 m, logo $\boldsymbol{M_C = -0{,}25 * 6^2 = -9\ KN.m}$

$\begin{pmatrix} C & D \\ 0 \leq x \leq 6 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{CD} = -0,25x^2 + 1,5x - 2,28}$

- No ponto C, temos x = 0 m, logo

$\boldsymbol{M_C = -0{,}25 * 0^2 + 1{,}5 * 0 - 2.28 = -2{,}28\ KN.m}$

• Na rótula (x = 3 m), temos

$$\boldsymbol{M_{Rót} = -0,25 * 3^2 + 1,5 * 3 - 2,28 = 0\ KN.m}$$

• No ponto D, temos x = 6 m, logo

$$\boldsymbol{M_D = -0,25 * 6^2 + 1,5 * 6 - 2,28 = -2,28\ KN.m}$$

$$\begin{pmatrix} D & F \\ 0 \leq x \leq 6 & \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M_{FD} = -0,25x^2}$$

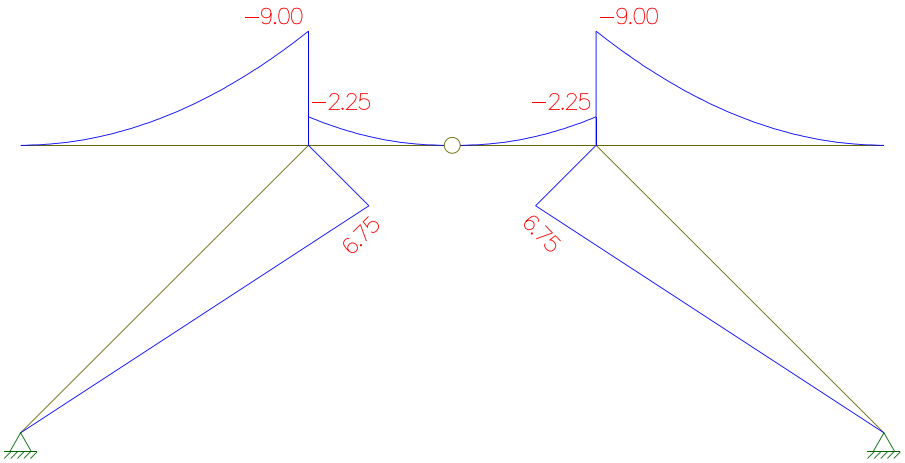
• No ponto F, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_F = -0,25 * 0^2 = 0\ KN}$

• No ponto D, temos x = 6 m, logo $\boldsymbol{M_D = -0,25 * 6^2 = -9\ KN}$

Lembre-se: o momento positivo deve ser desenhado do mesmo lado do observador e o momento negativo do lado oposto ao do observador

DMF $(KN.m)$

Fig. 506– Exemplo 8



Fonte: autor

C) Diagrama de esforço normal DEN (KN)

Lembre-se: o esforço normal positivo deve ser desenhado do lado oposto ao do observador e o negativo do mesmo lado do observador

$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 \leq x \leq 8{,}48 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{AC} = -5{,}57\ KN}$

$\begin{pmatrix} B & D \\ 0 \leq x \leq 8{,}48 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{BD} = -5{,}57\ KN}$

$\begin{pmatrix} E & C \\ 0 \leq x \leq 6 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{EC} = 0\ KN}$

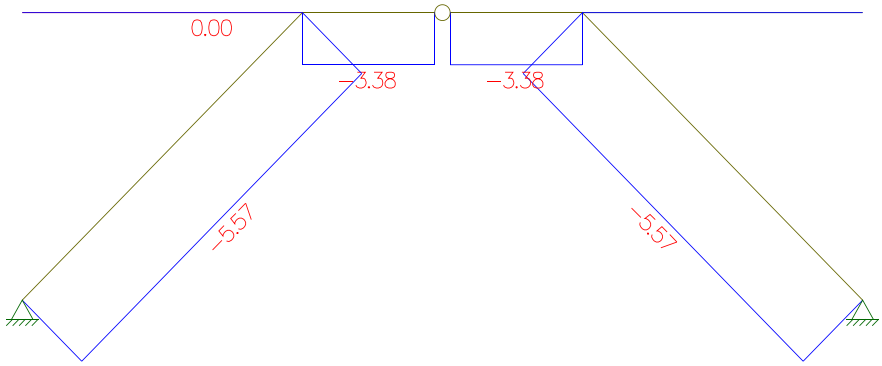
$\begin{pmatrix} C & D \\ 0 \leq x \leq 6 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{CD} = -3{,}38\ KN}$

$\begin{pmatrix} D & F \\ 0 \leq x \leq 6 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{DF} = 0\ KN}$

Fig.507 – Exemplo 8

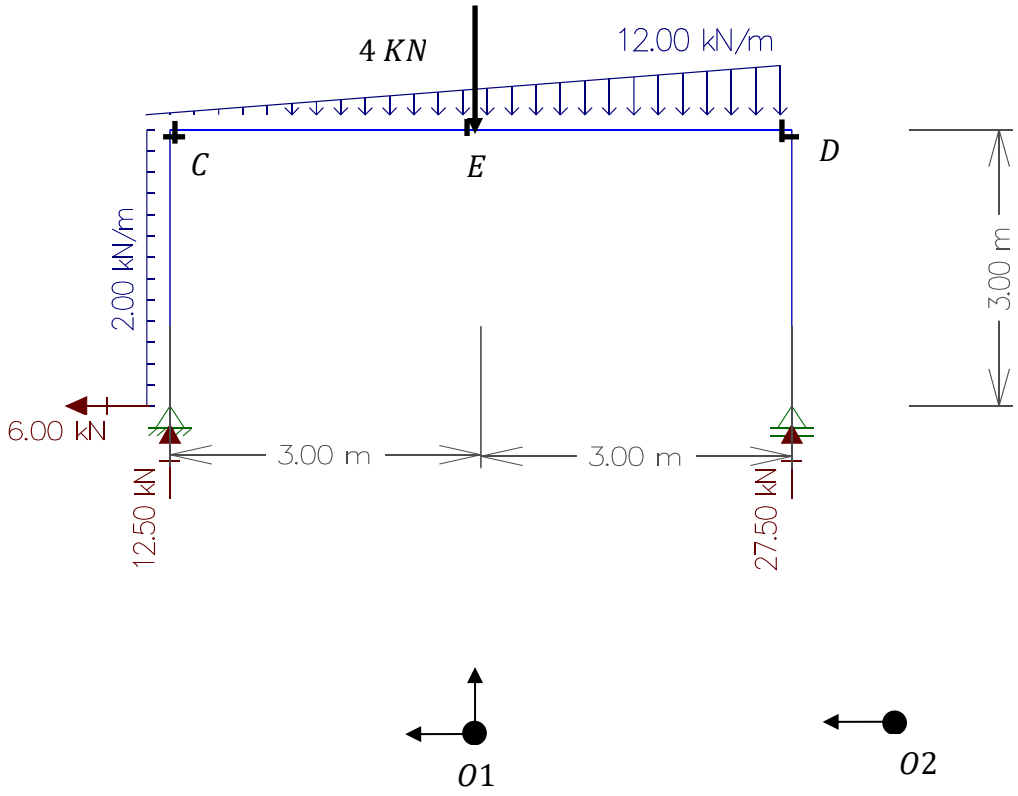


Fonte: autor

9°) Construa os diagramas dos esforços internos para o pórtico abaixo

DCL final

Fig. 508 – Exemplo 9



$H_A =$

$V_A =$ $V_B =$

Fonte: autor

RESP.

Aqui vamos iniciar a análise pela barra AC e em seguida transferir as forças da barra AC e seus respectivos momentos para o ponto C da barra horizontal CD.

• Barra AC pela esquerda, ou seja, de baixo para cima (observador 1)

$$\begin{pmatrix} A & & C \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V_{AC}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int -2\, dx + V_A = -2x + 6 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{V_{AC}} = \boldsymbol{-2x + 6}$$

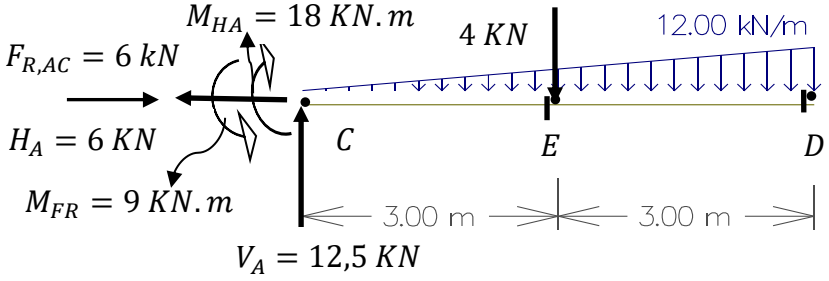
$$\boldsymbol{M_{AC}} = \int \boldsymbol{V_{AC}}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int (-2x + 6)dx + 0 = \frac{-2x^2}{2} + 6x \;\Rightarrow\; \boldsymbol{M_{AC}} = \boldsymbol{-x^2 + 6x}$$

$$\boldsymbol{N_{AC}} = \int \boldsymbol{p(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N} = \int 0\, dx + (-H_A) = -5{,}57 \Rightarrow \;\boldsymbol{N_{AC}} = \boldsymbol{-12,5}$$

• Barra CD pela esquerda, ou seja, partindo do ponto C (observador 1)

Transferindo as forças da barra AC e seus respectivos momentos para o ponto C da barra horizontal CD.

Fig. 509 – Exemplo 9



Fonte: autor

• $M_{HA} \rightarrow$ é *o momento no ponto C produzido pela reação* H_A

•$M_{FR} \rightarrow$

é *o momento no ponto C produzido pela resultante do carregamento distribuído que atua na barra AC*

O ponto E define trecho, pois existe carga concentrada aplicada nele.

• Trecho CE

Como a carga varia ao longo do trecho CE de acordo com uma função do 1° grau o primeiro passo para a resolução consiste em determinar a função para o carregamento no trecho CE, logo

Função do carregamento para o trecho CE → $\boldsymbol{q(x)_{CE} = 2x}$

$\begin{pmatrix} C & E \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{V_{CE}} = \int -\boldsymbol{q(x)dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int -2x\ dx + 12{,}5 = \frac{-2x^2}{2} + 12{,}5 \Rightarrow \boldsymbol{V_{CE} = -x^2 + 12{,}5}$$

$$\boldsymbol{M_{CE}} = \int \boldsymbol{V_{DE}\, dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int (-x^2 + 12{,}5)\, dx + (18 - 9) = \frac{-x^3}{3} + 12{,}5x + 9$$

$$\boldsymbol{M_{CE} = \frac{-x^3}{3} + 12{,}5x + 9}$$

$$\boldsymbol{N_{CE}} = \int \boldsymbol{p(x)\ dx} + \sum \boldsymbol{N'} = \int 0\ dx + \left(H_A - F_{R,AC}\right) = 0 + (6 - 6\ ) = 0 \Rightarrow\ \boldsymbol{N_{CE} = 0\ KN}$$

• Trecho ED

A função do carregamento no trecho ED é

$\boldsymbol{q(x)_{ED} = 2x + 6}$ $(\boldsymbol{a\ constante\ 6}$ é $\boldsymbol{o\ valor\ da\ fun}$ção $\boldsymbol{do\ trecho\ CE\ no\ ponto\ E,\ ou\ seja,\ para\ x = 3\ m})$

$\begin{pmatrix} E & & D \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{V_{ED}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\ \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int -(2x + 6)\ dx + [V_{CE}(E) - 4] \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{V_{ED}} = \frac{-2x^2}{2} - 6x + [(-3^2 + 12{,}5) - 4] \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_{ED} = -x^2 - 6x - 0{,}5}$$

$$\boldsymbol{M_{ED}} = \int \boldsymbol{V_{ED}}\ \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int (-x^2 - 6x - 0{,}5)\ dx + M_{CE}(E) \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{M_{ED}} = \frac{-x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} - 0{,}5x + \left(\frac{-3^3}{3} + 12{,}5 * 3 + 9\right) \Rightarrow \boldsymbol{M_{ED}}$$

$$= \frac{\boldsymbol{-x^3}}{\boldsymbol{3}} \boldsymbol{- 3x^2 - 0{,}5x + 37{,}5}$$

$$\boldsymbol{N_{ED}} = \int \boldsymbol{p(x)}\ \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} = \int 0\ dx + N_{CE}(E) = 0 + 0 \Rightarrow \quad \boldsymbol{N_{ED} = 0\ KN}$$

- **Barra BD pela esquerda, ou seja, de baixo para cima (observador 2)**

$\begin{pmatrix} B & & D \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{V_{BD}} = \int -\boldsymbol{q(x)}\ \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V} \Rightarrow \boldsymbol{V_{BD} = 0}$$

$$\boldsymbol{M_{BD}} = \int \boldsymbol{V_{AC}}\ \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M} \Rightarrow \quad \boldsymbol{M_{BD} = 0}$$

$$\boldsymbol{N_{BD}} = \int \boldsymbol{p(x)}\ \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} = \int 0\ dx + (-V_B) = 0 \Rightarrow \quad \boldsymbol{N_{BD} = -27{,}5\ KN}$$

Diagramas de esforços internos

A) Diagrama de esforço cortante (DEC)

$\begin{pmatrix} A & & C \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{AC} = -2x + 6}$

- No ponto A, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{V_A} = -2 * 0 + 6 = \boldsymbol{6\ KN}$
- No ponto C, temos x = 3 m, logo $\boldsymbol{V_C} = -2 * 3 + \boldsymbol{6} = \boldsymbol{0\ KN}$

$\begin{pmatrix} C & & E \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{CE} = -x^2 + 12{,}5}$

- No ponto C, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{V_C} = -0^2 + 12{,}5 = \boldsymbol{12{,}5\ KN}$

• No ponto E, temos x = 3 m, logo $\boldsymbol{V_E = -3^2 + 12{,}5 = 3{,}5\ KN}$

$\begin{pmatrix} E & & D \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{ED} = -x^2 - 6x - 0{,}5}$

• No ponto E, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{V_E = -0^2 - 6 * 0 - 0{,}5 = -0{,}5\ KN}$

• No ponto D, temos x = 3 m, logo $\boldsymbol{V_D = -3^2 - 6 * 3 - 0{,}5 = -27{,}5\ KN}$

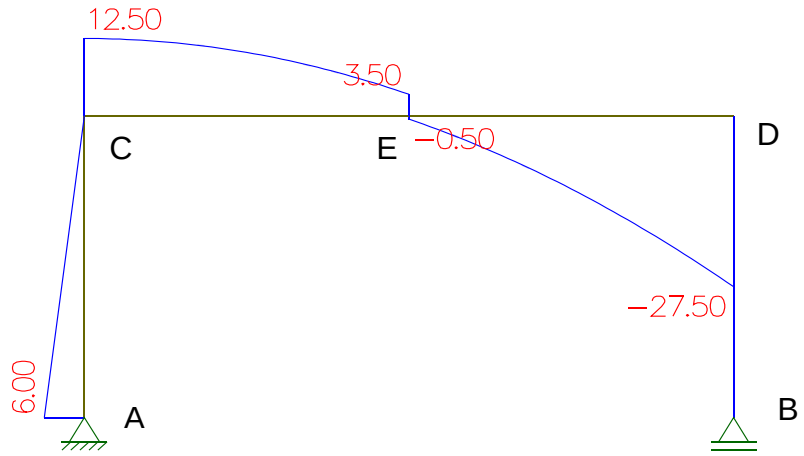
$\begin{pmatrix} B & & D \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{BD} = 0\ KN}$

Lembre-se: o cortante positivo deve ser desenhado do lado oposto ao do observador e o cortante negativo do mesmo lado do observador

DEC (KN)

Fig. 510 – Exemplo 9



Fonte: autor

B) Diagrama de momento fletor (DMF)

$\begin{pmatrix} A & & C \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{AC} = -x^2 + 6x}$

• No ponto A, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_A = -0^2 + 6 * 0 = 0\ KN.m}$

• No ponto C, temos x = 3 m, logo $\boldsymbol{M_C = -3^2 + 6 * 3 = 9\ KN.m}$

$\begin{pmatrix} C & & E \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{CE} = \frac{-x^3}{3} + 12{,}5x + 9}$

• No ponto C, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_C = \frac{-0^3}{3} + 12{,}5 * 0 = 9\ KN.m}$

• No ponto E, temos x = 3 m, logo $\boldsymbol{M_E = \frac{-3^3}{3} + 12{,}5 * 3 + 9 = 37{,}5\ KN.m}$

$\begin{pmatrix} E & D \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{M_{ED} = \frac{-x^3}{3} - 3x^2 - 0{,}5x + 37{,}5}$$

• No ponto E, temos x = 0 m, logo

$$\boldsymbol{M_E = \frac{-0^3}{3} - 3 * 0^2 - 0{,}5 * 0 + 37{,}5 = 37{,}5\ KN.m}$$

• No ponto D, temos x = 3 m, logo

$$\boldsymbol{M_D = \frac{-3^3}{3} - 3 * 3^2 - 0{,}5 * 3 + 37{,}5 = 0\ KN.m}$$

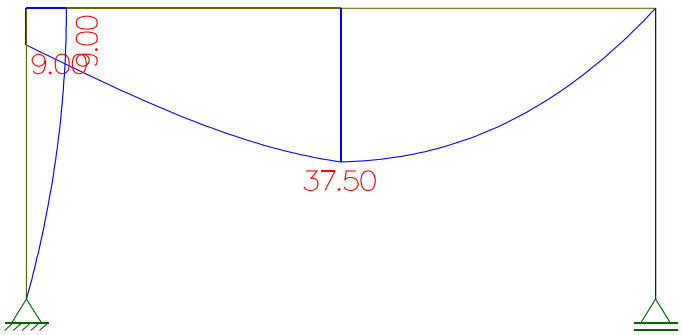
$\begin{pmatrix} B & D \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{BD} = 0\ KN.m}$

Lembre-se: o momento positivo deve ser desenhado do mesmo lado do observador e o momento negativo do lado oposto ao do observador

DMF $(KN.m)$

Fig.511– Exemplo 9



Fonte: autor

C) Diagrama de esforço normal DEN (KN)

$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{AC} = -12,5\ KN}$

$\begin{pmatrix} C & E \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{CE} = 0\ KN}$

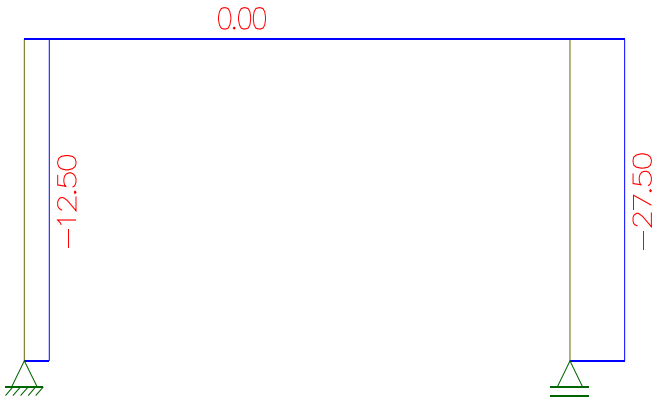
$\begin{pmatrix} E & D \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{ED} = 0\ KN}$

$\begin{pmatrix} B & D \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{BD} = -27,5\ KN}$

Fig. 512- Ex. 9



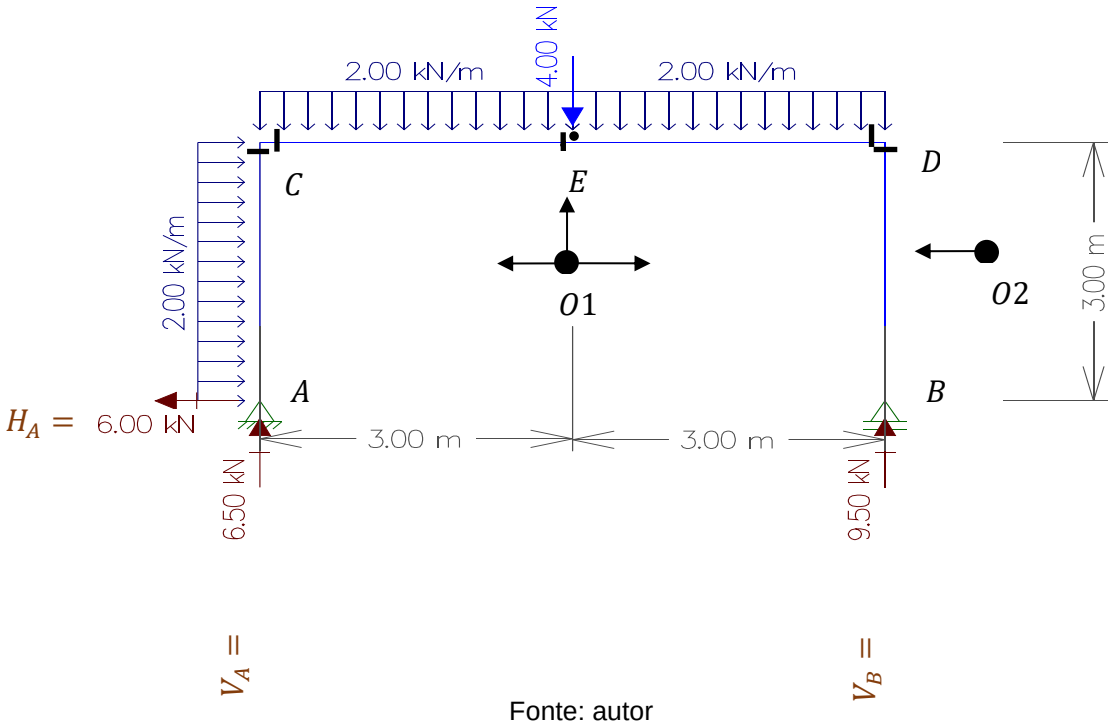
Fonte: autor

Lembre-se: o esforço normal positivo deve ser desenhado do lado oposto ao do observador e o esforço normal negativo do lado mesmo lado do observador

10°) Construa os diagramas dos esforços internos para o pórtico abaixo

DCL final

Fig. 513 – Exemplo 10



Fonte: autor

RESP

Aqui vamos iniciar a análise pela esquerda, ou seja, pela barra AC, em seguida analisaremos a barra BD e depois analisaremos a barra horizontal DC pela direita, assim precisaremos transferir apenas a reação V_B para o ponto D início da barra DC

• **Barra AC pela esquerda, ou seja, de baixo para cima (observador 1)**

$\begin{pmatrix} A & & C \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{V_{AC}} = \int -\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int -2\, dx + H_A = -2x + 6 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{V_{AC}} = \boldsymbol{-2x + 6}$$

$$\boldsymbol{M_{AC}} = \int \boldsymbol{V_{AC}}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int (-2x + 6)dx + 0 = \frac{-2x^2}{2} + 6x \;\Rightarrow\; \boldsymbol{M_{AC}} = \boldsymbol{-x^2 + 6x}$$

$$\boldsymbol{N_{AC}} = \int \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} = \int 0\, dx + (-V_A) = 0 + (-6{,}5) \Rightarrow \boldsymbol{N_{AC}} = \boldsymbol{-6{,}5\ KN}$$

• **Barra BD pela esquerda, ou seja, de baixo para cima (observador 2)**

$\begin{pmatrix} B & & D \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{V_{BD}} = \int -\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{V_{BD}} = \boldsymbol{0}$$

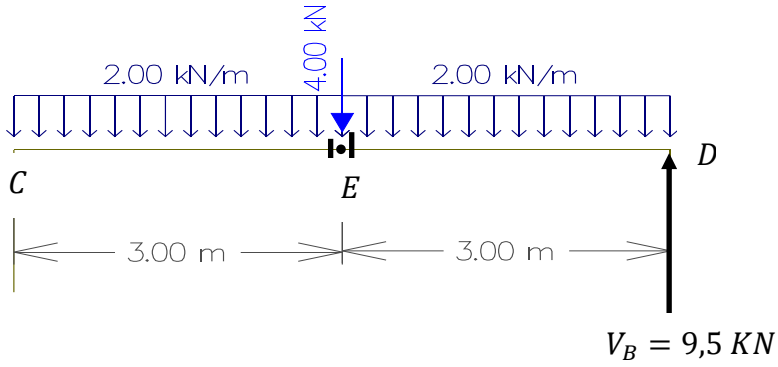
$$\boldsymbol{M_{BD}} = \int \boldsymbol{V_{ED}}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{M_{BD}} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{N_{BD}} = \int \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} = \int 0\, dx + (-V_B) = 0 + 0 = 0 + (-9{,}5) \Rightarrow \boldsymbol{N_{BD}} = \boldsymbol{-9{,}5\ KN}$$

• **Barra DC**

Para facilitar a resolução vamos analisar o trecho DC pela direita, pois, nesse caso, existe apenas a reação V_B a ser transferida para o ponto D.

Fig. 514– Exemplo 10



Fonte: autor

O ponto E define trecho, pois existe carga concentrada aplicada nele.

•Trecho DE pela direita

$\begin{pmatrix} D & & E \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{V_{DE}} = \int \boldsymbol{q(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int 2\, dx + (-V_B) = 2x - 9{,}5 \Rightarrow \quad \boldsymbol{V_{DE} = 2x - 9{,}5}$$

$$\boldsymbol{M_{DE}} = \int -\boldsymbol{V_{DE}}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int -(2x - 9{,}5)dx + 0 = \frac{-2x^2}{2} + 9{,}5x \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{M_{DE} = -x^2 + 9{,}5x}$$

$$\boldsymbol{N_{DE}} = \int \boldsymbol{p(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} \Rightarrow \quad \boldsymbol{N_{DE} = 0\ KN}$$

•Trecho EC pela esquerda

Agora para facilitar vamos analisar o trecho CE pela esquerda

$\begin{pmatrix} E & & C \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{V_{EC}} = \int \boldsymbol{q(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{V'} = \int 2\, dx + [V_{DE}(E) + 4 = 2x + [(2 * 3 - 9{,}5) + 4] \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{V_{EC} = 2x + 0{,}5}$$

$$\boldsymbol{M_{EC}} = \int -\boldsymbol{V_{EC}}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{M'} = \int -(2x + 0{,}5)dx + M_{DE}(E) = \frac{-2x^2}{2} - 0{,}5x \ \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{M_{EC}} = -x^2 - 0{,}5x + (-3^2 + 9{,}5 * 3) \Rightarrow \quad \boldsymbol{M_{EC} = -x^2 - 0{,}5x + 19{,}5}$$

$$\boldsymbol{N_{EC}} = \int \boldsymbol{p(x)}\, \boldsymbol{dx} + \sum \boldsymbol{N'} = \int 0\, dx + N_{DE}(E) = 0 + 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{N_{EC} = 0\ KN}$$

Diagramas de esforços internos

A) Diagrama de esforço cortante (DEC)

$\begin{pmatrix} B & & D \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{V_{BD} = 0\ KN}$$

$\begin{pmatrix} D & & E \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{V_{DE} = 2x - 9{,}5}$$

• No ponto D, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{V_D} = 2 * 0 - 9{,}5 = \boldsymbol{-9{,}5\ KN}$

• No ponto E, temos x = 3 m, logo $\boldsymbol{V_E} = 2 * 3 - 9{,}5 = \boldsymbol{-3{,}5\ KN}$

$\begin{pmatrix} E & & C \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{EC} = 2x + 0,5}$

• No ponto E, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{V_E = 2 * 0 + 0{,}5 = 0{,}5\ KN}$

• No ponto C, temos x = 3 m, logo $\boldsymbol{V_C = 2 * 3 + 0{,}5 = 6{,}5\ KN}$

$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{V_{AC} = -2x + 6}$

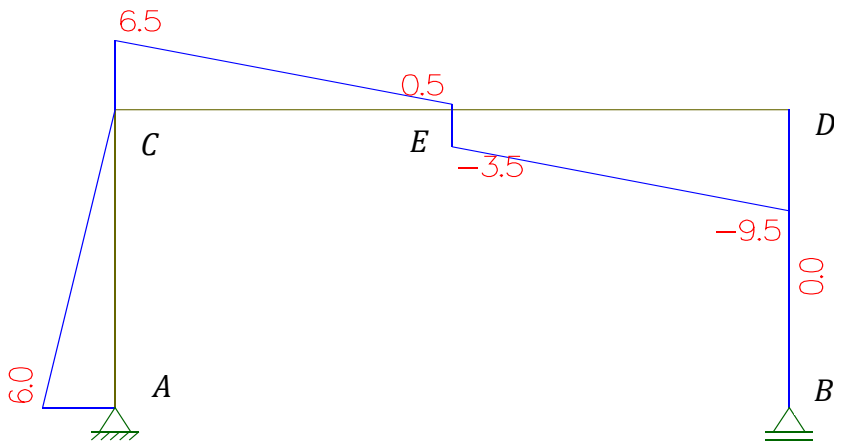
• No ponto A, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{V_A = -2 * 0 + 6 = 6\ KN}$

• No ponto C, temos x = 3 m, logo $\boldsymbol{V_C = -2 * 3 + 6 = 0\ KN}$

Lembre-se: o cortante positivo deve ser desenhado do lado oposto ao do observador e o cortante negativo do mesmo lado do observador

DEC (KN)

Fig. 515 – Exemplo 10



Fonte: autor

B) Diagrama de momento fletor (DMF)

$\begin{pmatrix} B & D \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{BD} = 0\ KN.m}$

$\begin{pmatrix} D & E \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{DE} = -x^2 + 9,5x}$

• No ponto D, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_D = -0^2 + 9{,}5 * 0 = 0\ KN.m}$

• No ponto E, temos x = 3 m, logo $\boldsymbol{M_E = -3^2 + 9{,}5 * 3 = 19{,}5\ KN.m}$

$\begin{pmatrix} E & C \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{EC} = -x^2 - 0,5x + 19,5}$

• No ponto E, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_E = -0^2 - 0{,}5 * 0 + 19{,}5 = 19,5\ KN.m}$

• No ponto C, temos x = 3 m, logo $\boldsymbol{M_C = -3^2 - 0{,}5 * 3 + 19{,}5 = 9\ KN.m}$

$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{M_{AC} = -x^2 + 6x}$

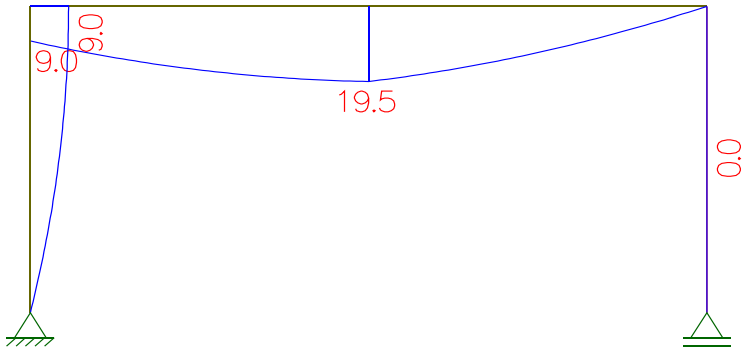
• No ponto A, temos x = 0 m, logo $\boldsymbol{M_E = -0^2 + 6 * 0 * 0 = 0\ KN.m}$

• No ponto C, temos x = 3 m, logo $\boldsymbol{M_C = -3^2 + 6 * 3 = 9\ KN.m}$

Lembre-se: o momento positivo deve ser desenhado do mesmo lado do observador e o momento negativo do lado oposto ao do observador

DMF $(KN.m)$

Fig. 516 – Exemplo 10



Fonte: autor

C) Diagrama de esforço normal (DEN)

$\begin{pmatrix} B & D \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{BD} = -9,5\ KN}$

$\begin{pmatrix} D & E \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{DE} = 0\ KN}$

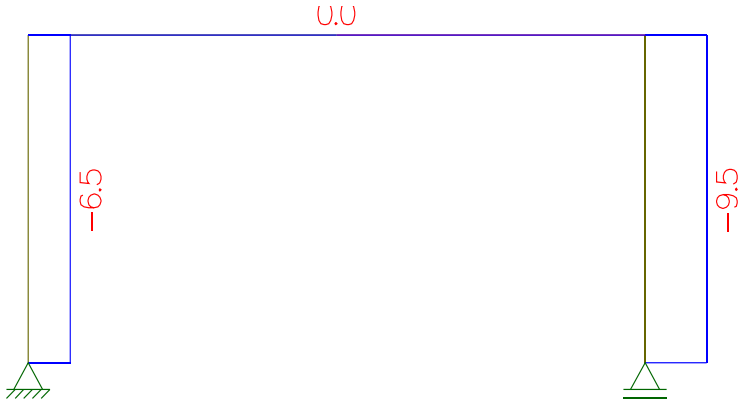
$\begin{pmatrix} E & C \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{EC} = 0\ KN}$

$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 \leq x \leq 3 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{N_{AC} = -6,5\ KN}$

Fig. 517: Exemplo 10



Fonte: autor

FIM

Conclusão

Na disciplina de Estruturas Isostáticas, ocorre o primeiro contato do aluno de engenharia civil com o cálculo de estruturas e embora muitos acadêmicos não compreendam a importância da disciplina, ela é a base do cálculo estrutural considerando-se que trata da aplicação da Física e da Matemática para garantir o equilíbrio estático das estruturas no plano, através da determinação das reações de apoios e dos chamados esforços internos solicitantes: esforço normal, esforço cortante e momento fletor, além da construção de seus respectivos diagramas

A perceptível dificuldade para uma assimilação efetiva de conceitos, assim como a falta de destreza com os cálculos na referida disciplina, demonstrada por parte de acadêmicos, alunos do curso de engenharia civil, motivaram a elaboração do presente material didático intitulado de “Caderno de Isostática”, utilizando uma linguagem de mais fácil compreensão para um aluno iniciante do que aquela apresentada em livros já consagrados, além de mostrar a resolução comentada de um grande número de exercícios, o que torna o “Caderno de Isostática” uma importante ferramenta auxiliar de estudo para a tão fundamental disciplina de Estruturas Isostáticas.

Bibliografia

HIBBELER, Russell C. **Estática: mecânica para engenharia; 12ª ed.** São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011

KENNET Leet; CHIA-MING Uang; Anne M. Gilbert. **Fundamentos da análise estrutural; 3ª ed**. São Paulo: McGraw-Hill Interamericana do Brasil Ltda, 2009

MACHADO Júnior, Eloy Ferraz **Introdução à isostática; 1ª ed. São Paulo: EESC – USP. São Carlos, 1999.**

FERREIRA de Almeida, Maria Cascão **Estruturas Isostáticas**; 1ª ed. São Paulo; Oficina de Textos, 2009.

SUSSEKIND, José Carlos **Curso de análise estrutural**, vol. 1; 6ª ed. Editora Globo 1981

BEER, Ferdinand P., Johnston Jr, E. Russell. **Resistência dos materiais, 3ª ed.** São Paulo 1995: MAKRON Books do Brasil Editora Ltda.